UEMASUL
Universidade Estadual
da Região Tocantina
do Maranhão

APOSTILA DE MATEMÁTICA

COLEÇÃO EDUCAÇÃO TRANSFORMA

ANNA BEATRIZ COSTA AZEVEDO
BRUNO PEREIRA RODRIGUES
GIOVANA ALVES
MÍURIA JOYCE PEREIRA RAPOSO

AUTORES

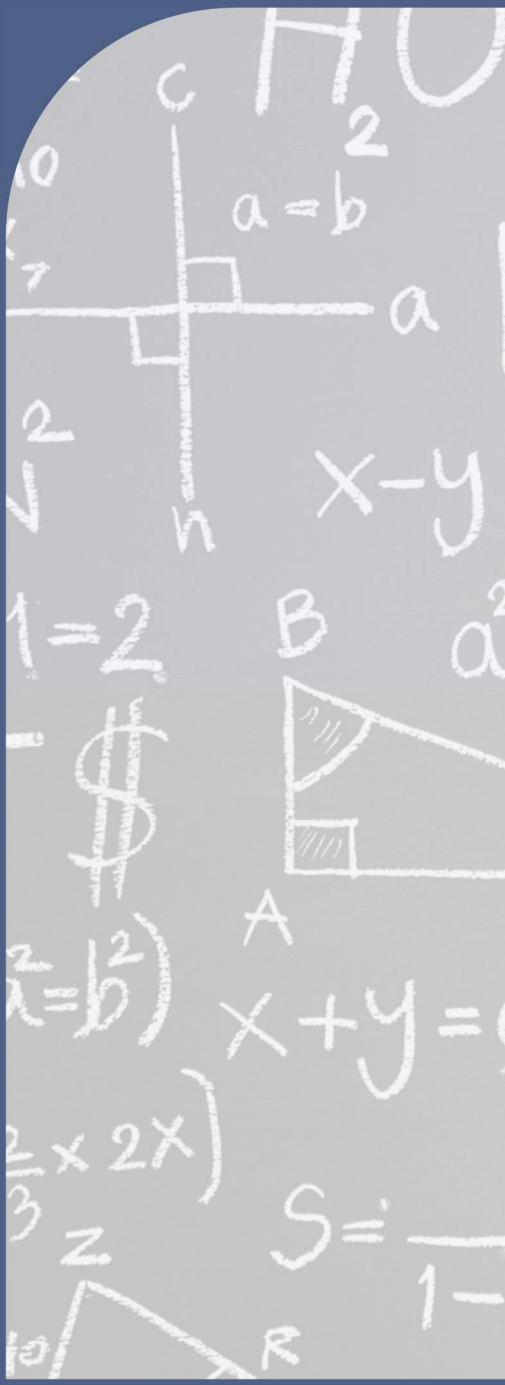


EDITORA
UEMASUL

Anna Beatriz Costa Azevedo
Bruno Pereira Rodrigues
Giovana Alves
Míuria Joyce Pereira Raposo
(AUTORES)

EDUCAÇÃO TRANSFORMA

Matemática



EDITORA UEMASUL
2025

A994a Apostila de matemática / Anna Beatriz Costa Azevedo ... [et al.]. –
Apostila destinada para o Cursinho Popular da UEMASUL. -
Imperatriz: EDUEMASUL, 2025.

685 p. : il. (Coleção Educação Transforma)

ISBN 978-65-89274-19-3

1. Matemática. 2. Aritmética – Álgebra - Geometria. I. Azevedo,
Anna Beatriz Costa. II. Rodrigues, Bruno Pereira. III. Alves, Giovana.

CDU 510/514

Ficha elaborada pelo Bibliotecário: **Mateus de Araújo Souza CRB13/955**

Apostila aprovada para a publicação através do Edital nº 11/2023 destinada para o Cursinho Popular da UEMASUL.

Direitos autorais 2025 – Editora UEMASUL

Todos os direitos reservados à Editora UEMASUL é proibida a reprodução total ou parcial, de qualquer forma ou por qualquer meio.

O conteúdo desta publicação é de inteira responsabilidade dos autores.

Projeto Gráfico Editora UEMASUL

Catalogação na publicação Seção de Catalogação e Classificação

UEMASUL | Universidade Estadual da Região Tocantina do Maranhão

PRÓ-REITORIA DE EXTENSÃO E ASSISTÊNCIA ESTUDANTIL – PROEXAE
COORDENADORIA DE SUSTENTABILIDADE E INTEGRAÇÃO SOCIAL - CSIS
DIVISÃO DE EXTENSÃO UNIVERSITÁRIA – DIVEXT

PROGRAMA INSTITUCIONAL DE BOLSAS DE EXTENSÃO – PIBEXT/UEMASUL (2023-2024)

Reitora

Profa. Dra. Luciléa Ferreira Lopes Gonçalves

Vice-reitora

Profa. Dra. Lilian Castelo Branco de Lima

Pró-Reitor de Extensão e Assistência Estudantil – PROEXAE

José Milton Lopes Pinheiro

Autores

Anna Beatriz Costa Azevedo
Bruno Pereira Rodrigues
Giovana Alves
Míuria Joyce Pereira Raposo

Coordenação da Editora

Profa. Dra. Aichely Rodrigues da Silva

Diagramação

Maria Eduarda da Silva Santos

Capa

Gabriel Vieira Lima



EDITORA
UEMASUL

2025

Apresentação

É com grande satisfação que apresentamos a Apostila de Matemática do Cursinho Popular da UEMASUL. Este material foi cuidadosamente elaborado para atender às suas necessidades de estudo, abrangendo os principais tópicos do Ensino Fundamental e Médio.

Organizamos a apostila em três frentes de estudo:

- **Frente A**: Aborda conteúdos numéricos e aritméticos, como operações fundamentais, propriedades dos números, frações, porcentagens e matrizes, essenciais para as bases matemáticas.
- **Frente B**: Foca em conteúdos algébricos, incluindo equações, funções e progressões, desenvolvendo raciocínio lógico e capacidade de abstração.
- **Frente C**: Explora conteúdos geométricos, além de Matemática Financeira e Estatística, abrangendo ângulos, áreas, volumes e relações métricas fundamentais.

Para maximizar o aprendizado, os temas foram organizados de forma que as aulas e os estudos sigam uma sequência alternada entre as frentes, garantindo uma abordagem dinâmica e gradual. Esse formato estimula diferentes habilidades e favorece a consolidação do conhecimento.

A apostila inclui questões de vestibulares de várias universidades, proporcionando contato direto com o estilo das provas. Além disso, o gabarito das questões está disponível ao final do material, para revisão e autoavaliação.

Desejamos que este material seja uma ferramenta valiosa na sua preparação. Tenha uma excelente jornada de aprendizado e muito sucesso em suas conquistas acadêmicas!

Os autores.

H_2O
$\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
$E=mc^2$
$a-b$
$x-y$
$90°$
$a^\circ=1$
$a^2+b^2=c^2$
B
A
C
$s=vt$
$x+y=a^2b$
$P=S(1-$
$P\ \Delta ABC \sim \Delta$
$S=\frac{}{1-n\cdot d}$
$\frac{n!}{r!(n-}$
$\frac{2}{3}\times 2x)$
$1=2$
$a=b^2)$
R

Sumário

MMC e MDC 11
Mínimo Múltiplo Comum (MMC) 11
Máximo Divisor Comum (MDC) 12
Exercícios 13
Frações, Números decimais e Porcentagem 24
Frações 24
Termos de uma Fração 24
Problemas Envolvendo Frações 24
Equivalência de Frações 25
Comparação entre Frações 25
Frações Irredutíveis (Simplificação de Frações) 26
Operações com Frações 27
Forma Mista da Fração 28
Números Decimais 28
Fração Geratriz de um Número Decimal 29
Operações com Números Decimais 30
Porcentagem 31
Problemas Envolvendo Porcentagem 31
Exercícios 32
Razão e Proporção 48
Razão 48
Proporção 48
Exercícios 49
Regra de Três Simples e Composta 63
Grandezas Diretamente e Inversamente Proporcionais 63
Grandezas Diretamente Proporcionais 63
Grandezas Inversamente Proporcionais 64
Regra de Três Simples 65
Regra de Três Composta 66
Exercícios 68
Produtos Notáveis e Fatoração 87
Produtos Notáveis 87

Quadrado da Soma de Dois Termos 87
Quadrado da Diferença de Dois Termos 87
Produto da Soma pela Diferença de Dois Termos 87
Cubo da Soma de Dois Termos 88
Cubo da Diferença de Dois Termos 88
Fatoração 88
Fatoração de Polinômios 89
Exercícios 90
Matrizes e Determinantes 100
Matrizes 100
Matrizes Especiais 101
Igualdade de Matrizes 102
Adição e Subtração de Matrizes 103
Multiplicação de Número Real por Matriz 104
Matriz Transposta 104
Multiplicação de Matrizes 105
Determinante 106
Exercícios 109
Sistemas Lineares 129
Equações Lineares 129
Sistemas de Equações Lineares 129
Solução do Sistema Linear 130
Classificação dos Sistemas Lineares 130
Matrizes, Sistemas Lineares e Determinantes 133
Sistemas Lineares Equivalentes 133
Escalonamento de Sistemas Lineares 133
Problemas Envolvendo Sistemas Lineares 135
Exercícios 136
Função Constante e Função Afim 153
Função Afim 153
Valores de uma Função Afim 154
Determinação de uma Função Afim 154
Gráfico de uma Função Afim 155
Zero da Função Afim 157
Inequações do 1° Grau 159

Exercícios 162
Função Quadrática 180
Definição 180
Valores de uma Função Quadrática 180
Zeros da Função Quadrática 181
Vértice, Valor Máximo e Valor Mínimo da Função Quadrática 184
Gráfico da Função Quadrática 187
Inequações do 2□ Grau 189
Estudo do Sinal 189
Sistema de Inequações do 1° Grau 192
Exercícios 193
Função Modular 214
Definição 214
Gráfico da Função Modular 214
Equações Modulares 216
Exercícios 217
Função Exponencial 226
Definição 226
Gráfico da Função Exponencial 226
Equações Exponenciais 227
Exercícios 228
Logaritmo e Função Logarítmica 248
Logaritmo 248
Propriedades dos Logaritmos 248
Calculando Logaritmos 250
Função Logarítmica 251
Gráfico da Função Logarítmica 251
Equações Logarítmicas 253
Exercícios 254
Trigonometria Circular e Funções Trigonométricas 270
Círculo Trigonométrico 270
Seno 270
Cosseno 271
Tangente 272
Cotangente 273

Secante 273
Cossecante 274
Relações Fundamentais 275
Fórmulas da Soma, da Subtração de Arcos e do Arco Duplo 276
Redução ao 1° Quadrante 278
Funções Trigonométricas 279
A Função Seno 279
A Função Cosseno 280
A Função Tangente 282
Exercícios 283
Progressão Aritmética (PA) 302
Definição 302
Termo Geral de uma Progressão Aritmética an 302
Soma do Termos de uma Progressão Aritmética Sn 303
Exercícios 304
Progressão Geométrica (PG) 326
Definição 326
Termo Geral de uma Progressão Geométrica 326
Soma dos Termos de uma Progressão Geométrica 327
Exercícios 328
Áreas de Figuras Planas 346
Área do Quadrado 346
Área do Retângulo 346
Área do Paralelogramo 347
Área do Triângulo 347
Área do Trapézio 349
Área do Losango 350
Área do Polígono Regular 350
Exercícios 351
Semelhança de Triângulos 368
Teorema de Tales 368
Semelhança de Triângulos 368
Casos de Semelhança de Triângulos 369
Teorema Fundamental da Semelhança de Triângulos 370
Exercícios 371

Relações Métricas e Trigonométricas no Triângulo Retângulo 392
Relações Métricas no Triângulo Retângulo 392
Relações Trigonométricas no Triângulo Retângulo 393
Relações entre seno, cosseno e tangente 394
Exercícios 394
Lei dos Senos e Lei dos Cossenos 419
Lei dos Senos 419
Lei dos Cossenos 420
Exercícios 421
Poliedros, Prismas e Cilindros 435
Poliedros 435
Poliedro Convexo e Não Convexo 435
Relação de Euler 436
Poliedros Regulares 436
Prismas 437
Prismas Retos 438
Área da Superfície de um Prisma 439
Volume do Prisma 439
Cilindros 439
Área da Superfície de um Cilindro Reto 441
Volume do Cilindro 441
Exercícios 442
Pirâmides e Cones 467
Pirâmides 467
Pirâmide Regular 467
Área da Superfície da Pirâmide 468
Volume da Pirâmide 468
Tronco de Pirâmide 469
Cones 470
Cone Reto e Cone Oblíquo 470
Área da Superfície do Cone 471
Volume do Cone 472
Tronco de Cone 472
Exercícios 473
Esfera 494

Definição ... 494
Área da Superfície da Esfera ... 494
Volume da Esfera ... 495
Fuso Esférico ... 495
Cunha Esférica ... 495
Exercícios ... 496
Ponto, Reta e Circunferência ... 510
Sistema Cartesiano Ortogonal ... 510
Ponto ... 510
Distância entre Dois Pontos ... 510
Ponto Médio de um Segmento de Reta ... 511
Alinhamento de Três Pontos ... 512
Reta ... 512
Inclinação de uma Reta ... 512
Coeficiente Angular ... 513
Equação Fundamental da Reta ... 514
Equações da Reta ... 515
Posições Relativas entre Duas Retas ... 516
Perpendicularidade entre Retas ... 518
Distância entre Ponto e Reta ... 518
Área de uma Região Triangular ... 519
Circunferência ... 519
Obtenção do centro e do raio de uma circunferência a partir de sua equação geral ... 520
Posição Relativa entre Reta e Circunferência ... 521
Exercícios ... 522
Juros Simples ... 542
Juros Simples ... 542
Exercícios ... 544
Juros Compostos ... 555
Juros Compostos ... 555
Exercícios ... 557
Estatística ... 568
Termos Importantes ... 568
População e Amostra ... 568

Indivíduo ou Objeto 568
Variável 568
Frequências Absoluta e Relativa 568
Medidas de Tendência Central 569
Média Aritmética (MA) 569
Média Aritmética Ponderada (MP) 570
Mediana (Me) 570
Moda (Mo) 571
Medidas de Dispersão 571
Variância (V) 571
Desvio Padrão (DP) 572
Exercícios 572
Análise Combinatória 598
Princípio Fundamental da Contagem 598
Permutações 599
Permutação Simples 600
Permutação com Repetição 601
Arranjo Simples 601
Combinação Simples 602
Exercícios 604
Probabilidade 621
Espaço Amostral 621
Evento 621
Probabilidade de um evento 621
Probabilidade de um evento complementar 622
Probabilidade da união de dois eventos 623
Probabilidade da intersecção de dois eventos 623
Probabilidade condicional 623
Exercícios 624
Apêndice 1 - Conjuntos Numéricos 643
Definição 643
Propriedades e operações 643
Conjuntos de números naturais ($\mathbb{N}$) 645
Conjuntos de números inteiros ($\mathbb{Z}$) 645
Conjuntos de números racionais ($\mathbb{Q}$) 646

Conjuntos de números irracionais (I) 646
Conjuntos de números reais $(\mathbb{R})$ 646
Apêndice 2 - Unidades de medida: comprimento, massa, área, capacidade, tempo e velocidade 648
Unidades de medida 648
Comprimento 648
Massa 648
Área: medida de superfície 649
Capacidade 649
Tempo 650
Velocidade 651
Apêndice 3 - Potenciação e Radiciação 652
Potenciação 652
Definição 652
Propriedades 652
Radiciação 653
Definição 653
Propriedades 654
Apêndice 4 - Função 656
Definição 656
Domínio, Contradomínio, Imagem e Gráfico de uma função 657
Funções Numéricas 658
Propriedades das funções 658
Função injetiva (injetora) 658
Função sobrejetiva (sobrejetora) 658
Função bijetiva (bijetora) 659
Gabarito 660
Referências 675


$(x+y)^2-(x-y)^2$
$\sqrt{b^2-4ac}$
$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}$
H^+ CH_4
$\sqrt{a^2+b^2}$
$xy=ab^2$
$g(x)$
$\hat{ACB}=\frac{2}{5}\hat{ABD}$
$xy=ab^2$
$=\sqrt{\frac{b^2}{c}+c-\frac{b}{2}}$
A
b
c
$\sum_{i=1}^{n}(x_i-x)^2$
H_0 $\frac{\partial^2\Omega}{\partial}$
$\lim_{x\to\infty}$

MMC e MDC

Mínimo Múltiplo Comum (MMC)

O mínimo múltiplo comum de dois ou mais números inteiros e não nulos (a, b e c, por exemplo) é o menor número inteiro positivo simultaneamente múltiplo de a, de b e de c. Isso significa que o MMC de a, b e c é, também, divisível por a, b e c ao mesmo tempo.

Exemplo 1: Determinar o mínimo múltiplo comum dos números 4 e 5.

Identificando os múltiplos positivos dos números 4 e 5, temos:

- Múltiplos de $4 = \{4, 8, 12, 16, \mathbf{20}, 24, 28, 32, 36, \mathbf{40}, \dots\}$.
- Múltiplos de $5 = \{5, 10, 15, \mathbf{20}, 25, 30, 35, \mathbf{40}, 45, 50, \dots\}$.

Desse modo, percebemos que os números 20 e 40 são múltiplos comuns a 4 e a 5 simultaneamente. Além disso, o número 20 é o menor múltiplo comum de 4 e 5.

Portanto, o mínimo múltiplo comum de 4 e 5 é igual a 20, ou seja, o $MMC(4, 5) = 20$.

Atenção!

Apesar dos múltiplos encontrados no exemplo acima terem sido 20 e 40, é importante lembrarmos que a sequência dos números múltiplos é infinita. Logo, existem outros múltiplos para esse exemplo ou para qualquer outro.

Exemplo 2: Determinar o mínimo múltiplo comum dos números 2, 3 e 12.

Seguindo os passos do exemplo anterior, identificamos os múltiplos positivos dos números 2, 3 e 12.

- Múltiplos de $2 = \{2, 4, 6, 8, 10, \mathbf{12}, 14, 16, 18, 20, 22, \mathbf{24}, 26, 28, 30, 32, 34, \mathbf{36}, \dots\}$.
- Múltiplos de $3 = \{3, 6, 9, \mathbf{12}, 15, 18, 21, \mathbf{24}, 27, 30, 33, \mathbf{36}, 40, \dots\}$.
- Múltiplos de $12 = \{\mathbf{12}, \mathbf{24}, \mathbf{36}, 48, 60, 72, 84, 96, \dots\}$.

Desse modo, os números 12, 24 e 36, dentre outros, são múltiplos de 2, 3 e 12.

O menor múltiplo comum a 2, 3 e 12 é o número 12. Logo, o $MMC(2, 3, 12) = 12$.

Outra maneira de encontrarmos o mínimo múltiplo comum de dois ou mais números inteiros positivos é por meio da decomposição simultânea desses números em fatores primos.

Exemplo 1: Determinar o mínimo múltiplo comum dos números 4 e 5.

Decompondo 4 e 5 em fatores primos, temos:

4	5	2
2	5	2
1	5	5
1	1	$\mathbf{2 \cdot 2 \cdot 5 = 2^2 \cdot 5 = 20}$

Logo, o $MMC(4, 5) = 20$.

Exemplo 2: Determinar o mínimo múltiplo comum dos números 2, 3 e 12.

Decompondo 2, 3 e 12 em fatores primos, temos:

2	3	12	2
2	3	6	2
1	3	3	3
1	1	1	$\mathbf{2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3 = 12}$

Logo, o $MMC(2, 3, 12) = 12$.

Máximo Divisor Comum (MDC)

O máximo divisor comum de dois ou mais números inteiros - $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$, por exemplo - com $\boldsymbol{a \neq 0}$ ou $\boldsymbol{b \neq 0}$ é o número de maior valor positivo pertencente ao conjunto de divisores de $\boldsymbol{a}$ e de $\boldsymbol{b}$.

Exemplo 1: Determinar o máximo divisor comum dos números 6 e 14.
Identificando os divisores positivos dos números 6 e 14, temos:

- Divisores de $6 = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, 3, 6\}$.
- Divisores de $14 = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, 7, 14\}$.

Desse modo, os divisores comuns a 6 e a 14 simultaneamente, são $\{1, 2\}$. Assim, o número de maior valor dentre os divisores comuns a 6 e a 14 e, portanto, o MDC, é o número 2.

Exemplo 2: Determinar o máximo divisor comum dos números 16, 28 e 36.
Identificando os divisores positivos dos números 16, 28 e 36, temos:

- Divisores de $16 = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{4}, 8, 16\}$.
- Divisores de $28 = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{4}, 7, 14, 28\}$.
- Divisores de $36 = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, 3, \mathbf{4}, 6, 9, 12, 18, 36\}$.

Os divisores comuns a 16, a 28 e a 36 simultaneamente, são $\{1, 2, 4\}$. Assim, o máximo divisor comum a 16, 28 e 36 é igual a 4.

Outra maneira de calcularmos o máximo divisor comum de dois ou mais números é por meio da decomposição simultânea deles em fatores primos.
A decomposição deverá ser feita apenas enquanto for possível dividir todos os números, pelo mesmo valor, ao mesmo tempo.

Exemplo 1: Determinar o máximo divisor comum dos números 6 e 14.
Decompondo 6 e 14 em fatores primos, temos:

6	14	2
3	7	$\mathbf{2}$

Logo, o $MDC(6, 14) = 2$.

Exemplo 2: Determinar o máximo divisor comum dos números 16, 28 e 36.

Decompondo 16, 28 e 36 em fatores primos, temos:

16	28	36	2
8	14	18	2
4	7	9	$\mathbf{2 \cdot 2 = 2^2 = 4}$

Logo, o $MDC(16, 28, 36) = 4$.

Exemplo 3: Determinar o máximo divisor comum dos números 9, 15 e 25.
Decompondo 9, 15 e 25 em fatores primos, temos:

15	45	75	3
5	15	25	5
1	3	5	$\mathbf{3 \cdot 5 = 15}$

Logo, o $MDC(15, 45, 75) = 15$.

Exercícios

01 - (IFBA/2020) Após apresentar resfriado, Júlio buscou atendimento médico. Para tratar os sintomas, foram prescritos dois remédios: um para uso a cada 6 h e outro para uso a cada 10 h. Sabendo que Júlio tomou, ao mesmo tempo, os remédios às 13 h da segunda-feira, o próximo horário que ele tomará os dois juntos novamente será:

a) segunda-feira, 19 h
b) segunda-feira, 23 h
c) terça-feira, 7 h
d) terça-feira, 13 h
e) terça-feira, 19 h

02 - (ESPM SP/2020) O cofre de um banco só pode ser aberto pelo acionamento de 3 chaves distintas, cada uma em posse de um gerente. As 3 fechaduras têm travas de segurança que só permitem seu acionamento de tempos em tempos, a saber: 12 min, 18 min e 21 min, respectivamente. Num certo dia, esse cofre foi aberto apenas duas vezes durante o expediente, uma às 10h15min e a outra às:

a) 15h05min
b) 14h48min
c) 15h45min
d) 16h12min
e) 14h27min

03 - (UEG GO/2022) João e seu irmão dividem o aluguel de um apartamento em Goiânia, para onde voltam sempre nos dias de folga. João trabalha 8 dias e folga no nono dia. Seu irmão trabalha 20 dias e folga no vigésimo primeiro dia. Se eles folgaram juntos hoje, eles vão se encontrar no apartamento novamente daqui a:

a) 40 dias

b) 50 dias
c) 52 dias
d) 63 dias
e) 65 dias

04 - (Fac. Santo Agostinho BA/2018) Em uma certa indústria, é feita a manutenção na máquina X a cada 4 dias. Na máquina Y, a cada 6 dias e, na máquina Z, a cada 8 dias. Se no dia 18 de setembro foi feita a manutenção nas três máquinas, após quantos dias as máquinas receberão manutenção no mesmo dia?

a) 18 dias.
b) 24 dias.
c) 16 dias.
d) 30 dias.

05 - (Unifor CE/2018) Um hospital universitário de dois em dois anos publica edital para programa de residência na área de Neurologia, de três em três anos publica edital para programa de residência na área de Gastroenterologia, e de 18 em 18 meses, publica edital para programa de residência na área de Cardiologia.

Se em janeiro de 2017, esse hospital publicou, ao mesmo tempo, edital para essas três áreas, então o próximo ano previsto para que ele novamente publique edital para essas três áreas, ao mesmo tempo, será em:

a) 2019.
b) 2020.
c) 2021.
d) 2022.
e) 2023.

06 - (IFG GO/2019) Antônio realiza atividades físicas regularmente, entre as modalidades de corrida, ciclismo e natação. Ele corre a cada três dias, pedala dia sim e dia não e nada de quatro em quatro dias. Certa vez, coincidiu de realizar essas três atividades físicas no mesmo dia. É correto afirmar que essa coincidência voltará a ocorrer daqui a:

a) 06 dias.
b) 08 dias.
c) 10 dias.
d) 12 dias.

07 - (IFSC/2019) A prefeitura de uma cidade decidiu colocar postes de iluminação, igualmente espaçados, em uma praça retangular de dimensões 195m x 255m. Como pré-requisito, foi estipulado que em cada vértice do terreno deverá ser fixado um poste e que a distância entre os centros de dois postes consecutivos deverá ser um número inteiro. Qual a quantidade mínima de postes que deve ser utilizada para que essas especificações sejam entendidas?

Para cálculo, desconsidere o diâmetro ou a largura de cada poste.

a) 52 postes
b) 60 postes
c) 56 postes
d) 48 postes
e) 44 postes

08 - (Unifor CE/2019) Um galpão foi construído de tal forma que seu piso é retangular e tem dimensões 36 m e 40 m. O proprietário pretende revestir o piso do galpão com azulejos idênticos, de formato quadrado e dimensões inteiras. Qual é o menor número de azulejos quadrados necessários para revestir o piso do galpão nas condições dadas, de maneira que não haja cortes ou sobras de material?

a) 90
b) 95
c) 98
d) 100
e) 110

09 - (IFBA/2019) Marieta era fã tanto do futebol masculino quanto do futebol feminino e colecionava fotos de grandes expoentes do futebol no cenário mundial. Por algum motivo, enjoou e quis mudar sua admiração para outro esporte. Resolveu, então, presentear seus colegas da escola com suas figurinhas relacionadas ao futebol.
Ela tem 125 fotos do jogador de futebol Cristiano Ronaldo, 250 fotos da jogadora de futebol Marta e 300 fotos do jogador de futebol Messi. Marieta deseja dividi-las entre um maior número de grupos possível, contendo os três expoentes de jogadores que ela possui, de forma a conter um mesmo número de foto em cada grupo, e ainda cada grupo deverá conter uma mesma quantidade de fotos de cada jogador.

Determine o número de fotos do jogador Cristiano Ronaldo contido em cada grupo.

a) 30
b) 15
c) 05
d) 10
e) 20

10 - (ENEM MEC/2015) Um arquiteto está reformando uma casa. De modo a contribuir com o meio ambiente, decide reaproveitar tábuas de madeira retiradas da casa. Ele dispõe de 40 tábuas de 540 cm, 30 de 810 cm e 10 de 1 080 cm, todas de mesma largura e espessura. Ele pediu a um carpinteiro que cortasse as tábuas em pedaços de mesmo comprimento, sem deixar sobras, e de modo que as novas peças ficassem com o maior tamanho possível, mas de comprimento menor que 2 m.

Atendendo o pedido do arquiteto, o carpinteiro deverá produzir:

a) 105 peças.
b) 120 peças.
c) 210 peças.
d) 243 peças.
e) 420 peças.

11 - (ENEM MEC/2015) O gerente de um cinema fornece anualmente ingressos gratuitos para escolas. Este ano serão distribuídos 400 ingressos para uma sessão vespertina e 320 ingressos para uma sessão noturna de um mesmo filme. Várias escolas podem ser escolhidas para receberem ingressos. Há alguns critérios para a distribuição dos ingressos:

1) cada escola deverá receber ingressos para uma única sessão;
2) todas as escolas contempladas deverão receber o mesmo número de ingressos;
3) não haverá sobra de ingressos (ou seja, todos os ingressos serão distribuídos).

O número mínimo de escolas que podem ser escolhidas para obter ingressos, segundo os critérios estabelecidos, é:

a) 2.
b) 4.
c) 9.
d) 40.
e) 80.

12 - (UEFS BA/2015) Três cometas se aproximam do Sol a cada 20, 24 e 28 anos, respectivamente.

Se o último ano em que todos estiveram próximos do Sol foi 1984, o próximo ano em que isso deverá ocorrer será:
a) 2056
b) 2104
c) 2264
d) 2824
e) 15424

13 - (Unievangélica GO/2015) Três pessoas fazem fisioterapia em intervalos de 5 dias, 6 dias e 7 dias, respectivamente.

Se a última vez que fizeram fisioterapia no mesmo dia foi no mês de maio, em que mês elas tornarão a se encontrar?

a) Janeiro
b) Fevereiro
c) Novembro
d) Dezembro

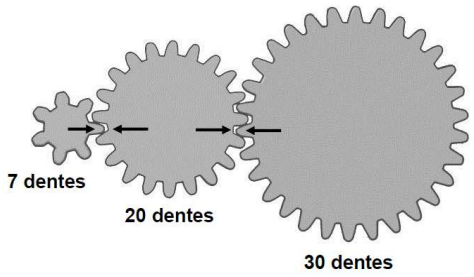
14 - (Unievangélica GO/2015) Três barras de alumínio medem, respectivamente, 8m, 96m e 112m. Um serralheiro deseja cortá-las em pedaços de mesmo comprimento.

Qual deverá ser esse comprimento, em metros, para que os pedaços tenham o maior tamanho possível?

a) 8
b) 2

c) 4
d) 6

15 - (UFPR/2015) Qual é o número mínimo de voltas completas que a menor das engrenagens deve realizar para que as quatro flechas fiquem alinhadas da mesma maneira novamente?



a) 14 voltas.
b) 21 voltas.
c) 57 voltas.
d) 60 voltas.
e) 84 voltas.

16 - (IFSC/2015) Em uma loja existe três relógios cucos desregulados. O primeiro toca o cuco a cada 12 min, o segundo a cada 22 min e o terceiro a cada 39 min. Se os três cucos tocaram juntos às quinze horas da tarde, é CORRETO afirmar que eles tocarão juntos novamente:

a) Às 19 horas e 32 minutos do mesmo dia.
b) Somente às 4 horas e 28 minutos do dia seguinte.
c) Às 16 horas e 32 minutos do mesmo dia.
d) Somente às 2 horas e 44 minutos do dia seguinte.
e) Somente às 19h e 36 min do dia seguinte.

17 - (Fac. Direito de Sorocaba SP/2015) Hugo abastece seu veículo a cada 3 dias, e José abastece o seu a cada 6 dias. Luís vai abastecer seu veículo sempre aos sábados e em nenhum outro dia. Se no dia 20 de setembro os três abasteceram seus veículos, a próxima data em que os três terão ido ao posto para abastecimento será:

a) 18 de outubro.
b) 25 de outubro.
c) 1 de novembro.
d) 8 de novembro.
e) 15 de novembro.

18 - (Unit AL/2016) Uma clínica atende um paciente para certo tratamento a intervalos regulares de 6 semanas exatas, outro paciente, a cada 20 dias, e um terceiro, a cada 9 semanas exatas.

Se os três coincidirem de ir, em um mesmo dia, isso só deverá ocorrer novamente após cerca de:

a) 11 meses e 25 dias.
b) 1 ano 6 meses e 22 dias.

c) 2 anos 3 meses e 20 dias.
d) 2 anos 10 meses e 18 dias.
e) 3 anos 5 meses e 15 dias.

19 - (IFPE/2016) Na Escola Pierre de Fermat, foi realizada uma gincana com o objetivo de arrecadar alimentos para a montagem e doação de cestas básicas. Ao fim da gincana, foram arrecadados 144 pacotes de feijão, 96 pacotes de açúcar, 192 pacotes de arroz e 240 pacotes de fubá. Na montagem das cestas, a diretora exigiu que fosse montado o maior número de cestas possível, de forma que não sobrasse nenhum pacote de alimento e nenhum pacote fosse partido. Seguindo a exigência da diretora, quantos pacotes de feijão teremos em cada cesta?

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

20 - (FIEB SP/2016) Ana, Flávio e Celso foram admitidos no mesmo dia para trabalharem como supervisores, em determinada empresa. Nessa função, eles terão que visitar as filiais da empresa para desenvolverem suas tarefas e prestar contas das suas atividades, na matriz. No plano de trabalho apresentado a Ana, consta que de seis em seis dias corridos, ela deverá prestar contas na matriz da empresa; no plano apresentado a Flávio, consta que ele deverá prestar contas na matriz da empresa, de sete em sete dias corridos; já no plano apresentado a Celso, que visitará as filiais mais distantes, consta que ele deverá prestar contas de suas atividades, na matriz da empresa, de oito em oito dias corridos. Se no primeiro dia de trabalho desses três funcionários eles iniciaram suas atividades na matriz, então está previsto que a próxima vez em que coincidirá de todos estarem na matriz para prestar contas de suas atividades será:

a) 168 dias após a data de admissão.
b) 210 dias após a data de admissão.
c) 252 dias após a data de admissão.
d) 294 dias após a data de admissão.
e) 336 dias após a data de admissão.

21 - (UEFS BA/2016) Uma equipe de professores corrigiu, em três dias de correção de um vestibular, números de redações iguais a 702, 728 e 585. Em cada dia, as redações foram igualmente divididas entre os professores.

O número de professores na equipe é um divisor de:

a) 52
b) 54
c) 60
d) 68
e) 77

22 - (Acafe SC/2016) Um feirante deseja distribuir 576 goiabas, 432 laranjas e 504 maçãs entre várias famílias de um bairro carente. A exigência do feirante é que a distribuição seja feita de modo que cada família receba o mesmo e o menor número possível de frutas de uma mesma espécie.

A quantidade total de frutas recebida por cada família representa um número:

a) Divisível por 9.
b) Múltiplo de 7.
c) Múltiplo de 12.
d) Entre 40 e 50.

23 - (ENEM MEC/2017) Uma empresa de manutenção de jardins foi contratada para plantar grama em um campo de futebol retangular cujas dimensões são 70 m x 100 m. A grama que será utilizada é vendida em tapetes retangulares de dimensões 40 cm x 125 cm.

Quantos tapetes de grama, no mínimo, serão necessários para cobrir todo o campo de futebol?

a) 103
b) 140
c) 7 000
d) 10 303
e) 14 000

24 - (FCM MG/2017) Uma enfermeira acompanha um paciente hospitalizado. O médico, ao prescrever uma receita, determina que três medicamentos sejam ingeridos pelo paciente de acordo com a seguinte escala de horários: remédio A, de 4 em 4 horas, remédio B, de 3 em 3 horas e remédio C, de 6 em 6 horas. Caso o paciente utilize os três remédios às 9 horas da manhã, qual será o próximo horário de ingestão simultânea desses remédios?

a) 6 horas do dia seguinte.
b) 9 horas do dia seguinte.
c) 12 horas do mesmo dia.
d) 21 horas do mesmo dia.

TEXTO: Comum à questão 25

Leia o texto publicado em maio de 2013.

Os Estados Unidos se preparam para uma invasão de insetos após 17 anos

Elas vivem a pelo menos 20 centímetros sob o solo há 17 anos. E neste segundo trimestre, bilhões de cigarras (*Magicicada septendecim*) emergirão para invadir partes da Costa Leste, enchendo os céus e as árvores, e fazendo muito barulho.
Há mais de 170 espécies de cigarras na América do Norte, e mais de 2 mil espécies ao redor do mundo. A maioria aparece todos os anos, mas alguns tipos surgem a cada 13 ou 17 anos. Os visitantes deste ano, conhecidos como Brood II (Ninhada II, em tradução livre) foram vistos pela última vez em 1996. Os moradores da Carolina do Norte e de

Connecticut talvez tenham de usar rastelos e pás para retirá-las do caminho, já que as estimativas do número de insetos são de 30 bilhões a 1 trilhão.
Um estudo brasileiro descobriu que intervalos baseados em números primos ofereciam a melhor estratégia de sobrevivência para as cigarras.
<http://tinyurl.com/zh8daj6> Acesso em: 30.08.2016. Adaptado.

25 - (Fatec SP/2017) Suponha a existência de uma espécie C_1 de cigarras, emergindo na superfície a cada 13 anos, e de uma espécie C_2 de cigarras, emergindo a cada 17 anos.

Se essas duas espécies emergirem juntas em 2016, elas emergirão juntas novamente no ano de:

a) 2271.
b) 2237.
c) 2145.
d) 2033.
e) 2029.

26 - (Unifor CE/2017) O Natal é um feriado religioso cristão comemorado anualmente em 25 de Dezembro. A data é o centro das festas de fim de ano e da temporada de férias. Costumes populares modernos típicos do feriado incluem a troca de presentes, a Ceia de Natal, músicas natalinas, festas na igreja e a decorações das casas e espaços públicos em alusão ao período, o que inclui árvores de Natal, pisca-piscas, guirlandas, presépios etc.
Uma família comprou uma árvore de Natal e um dos enfeites colocados na árvore foi um pisca – pisca. Ao se ligar o pisca – pisca, todas as lâmpadas se acendem e depois um grupo de lâmpadas se acende de 3 em 3 segundos, outro grupo de 8 em 8 segundos e, finalmente, um terceiro grupo se acende de 10 em 10 segundos. Depois de quanto tempo todas as lâmpadas se acenderão novamente?


Fonte Internet

a) 2 minutos
b) 3 minutos
c) 5 minutos
d) 7 minutos
e) 8 minutos

27 - (IFSC/2017) Roberto e João são amigos de infância e, sempre que podem, saem para pedalar juntos. Um dia, empolgados com a ideia de saberem mais sobre o desempenho da dupla, resolveram cronometrar o tempo que gastavam andando de bicicleta. Para tanto, decidiram pedalar numa pista circular, próxima à casa deles.
Constataram, então, que Roberto dava uma volta completa em 24 segundos, enquanto João demorava 28 segundos para fazer o mesmo percurso. Diante disso, João questionou:

- Se sairmos juntos de um mesmo local e no mesmo momento, em quanto tempo voltaremos a nos encontrar, pela primeira vez, neste mesmo ponto de largada?

Assinale a alternativa CORRETA.

a) 3 min 8 s
b) 2 min 48 s
c) 1 min 28 s
d) 2 min 28 s
e) 1 min 48 s

28 - (UESB BA/2018) **Um laboratório pretende embalar latas cilíndricas de mesmas dimensões, contendo medicamento líquido, em caixas retangulares, medindo 104cm x 72cm, de modo que seja aproveitado, ao máximo, o espaço disponível e que, o diâmetro da base das latas seja o maior possível.**

Nessas condições, pode-se afirmar que o raio da base das latas deverá ser igual a:

01. 10cm.
02. 9cm.
03. 8cm.
04. 5cm.
05. 4cm.

29 - (IFBA/2018) **O Supermercado "Preço Baixo" deseja fazer uma doação ao Orfanato "Me Adote" e dispõe, para esta ação, 528 Kg de açúcar, 240 Kg de feijão e 2016 Kg de arroz. Serão montados Kits contendo, cada um, as mesmas quantidades de açúcar, de feijão e de arroz. Quantos quilos de açúcar deve haver em cada um dos kits, se forem arrumados de forma a contemplar um número máximo para cada item?**

a) 20
b) 11
c) 31
d) 42
e) 44

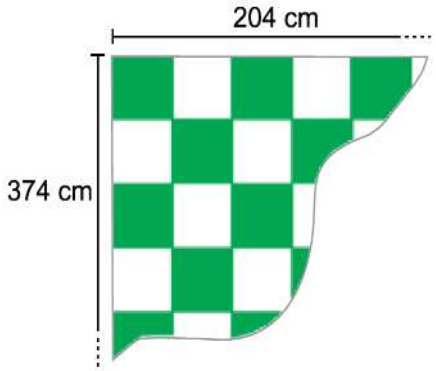
30 - (Fatec SP/2018) **Uma empresa decide contratar três funcionários, cada qual com uma jornada de trabalho distinta.**

I. O primeiro deles deve seguir uma escala de trabalho 12 x 36 — a cada 12 horas consecutivas de trabalho, o funcionário tem direito a 36 horas consecutivas de descanso.
II. O segundo, por sua vez, se enquadrará em uma escala de trabalho 18 × 36 — a cada 18 horas consecutivas de trabalho, o funcionário tem direito a 36 horas consecutivas de descanso.
III. O terceiro, e último, estará subordinado a uma escala de trabalho 24 × 48 — a cada 24 horas consecutivas de trabalho, o funcionário tem direito a 48 horas consecutivas de descanso.

Supondo que os três comecem a trabalhar ao mesmo tempo e no mesmo dia, bem como cumpram a jornada estabelecida, respeitando inclusive as horas de descanso, eles irão iniciar o trabalho juntos novamente depois de:

a) 54 dias.
b) 36 dias.
c) 24 dias.
d) 18 dias.
e) 6 dias.

31 - (Santa Casa SP/2020) A figura representa parte de um tapete retangular de 204 cm por 374 cm. O tapete é formado por retalhos em forma de quadrados verdes e brancos, todos congruentes entre si. A medida do lado desses quadrados, em centímetros, é o maior número inteiro possível.



O número de retalhos usados na confecção desse tapete é igual a:

a) 33.
b) 66.
c) 34.
d) 68.
e) 51.

32 - (Fuvest SP/2021) Alice quer construir um paralelepípedo reto retângulo de dimensões 60 cm x 24 cm x 18 cm, com a menor quantidade possível de cubos idênticos cujas medidas das arestas são números naturais. Quantos cubos serão necessários para construir esse paralelepípedo?

a) 60
b) 72
c) 80
d) 96
e) 120

33 - (UFES/2015) Uma associação de moradores arrecadou 2160 camisas, 1800 calças e 1200 pares de sapatos, que serão todos doados. As doações serão dispostas em pacotes. Dentro de cada pacote, um item poderá ter quantidade diferente da dos demais itens (por exemplo, a quantidade de camisas não precisará ser igual à de calças

ou à de pares de sapatos); porém, a quantidade de camisas, em todos os pacotes, deverá ser a mesma, assim como a quantidade de calças e a de pares de sapatos.

a) Determine o maior número possível de pacotes que podem ser preparados e qual a quantidade de camisas, de calças e de pares de sapatos que, nesse caso, haverá em cada pacote. Justifique.

b) Pedro recebeu um pacote de doações com l camisas diferentes, m calças diferentes e n pares de sapatos diferentes. Calcule a quantidade de escolhas, que ele pode fazer, de um conjunto contendo apenas 1 camisa, 1 calça e 1 par de sapatos do pacote.

Frações, Números decimais e Porcentagem

Frações

Uma fração pode ser interpretada como sendo a divisão de dois números naturais, ou ainda como sendo a parte de um todo.

São exemplos de frações: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{7}{10}, \frac{8}{23}$.

Termos de uma Fração

$$\frac{2}{5} \quad \begin{matrix} \rightarrow \text{Numerador} \\ \rightarrow \text{Denominador} \end{matrix}$$

Quando uma fração representa uma divisão entre dois números, o numerador será o número a ser dividido (dividendo), e o denominador o número que irá dividir (divisor).

Exemplo: Mariana ganhou duas bananas e pretende dividir para quatro pessoas.

Número de bananas por pessoa = $2 \div 4 = \frac{2}{4}$.

Já se a fração é uma representação da parte pelo todo, o numerador indica quantas partes foram consideradas, e o denominador corresponde ao número total de partes.

Exemplo: Reunião com 30 participantes em que 2 a cada 3 pessoas vestiram preto.

Número de pessoas que vestiram preto = $\frac{2}{3}$ de 30.

Isso quer dizer que, se dividirmos os 30 participantes em 3 partes, 2 dessas partes serão compostas por pessoas vestindo preto.

Problemas Envolvendo Frações

Problema 1: A fim de aumentar a renda da família, Poliana decidiu fazer bolo de pote para vender. No primeiro dia, ela produziu 60 bolos de pote e conseguiu vender $\frac{3}{4}$ do total. Quantas unidades de bolo de pote foram vendidas neste dia?

$\frac{3}{4}$ de $60 = \frac{3}{4} \cdot 60 = \frac{180}{4} = 45$ unidades.

Problema 2: Giovana comprou 100 brigadeiros para a festa de aniversário do seu gatinho Frederico Evandro. Ao final da festa, percebeu que sobraram $\frac{2}{5}$ dos brigadeiros. Quantos brigadeiros foram consumidos durante a festa de aniversário?

Se sobraram 2 partes dentre as 5 existentes, então, 3 partes foram consumidas.

Portanto, $\frac{3}{5}$ de $100 = \frac{3}{5} \cdot 100 = 60$ brigadeiros.

Problema 3: Uma escola de ensino médio possui 580 alunos matriculados. Ao fazer um levantamento sobre os alunos, a diretora da escola percebeu que 280 deles pertenciam ao gênero masculino. Qual fração corresponde ao número de alunos do gênero masculino nessa escola?

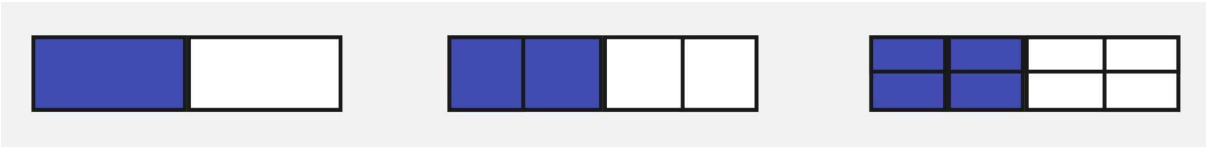
$$\frac{alunos\ do\ gênero\ masculino}{número\ total\ de\ alunos} = \frac{280}{580}.$$

Observação: A resposta mais adequada é a fração equivalente e irredutível correspondente a $\frac{280}{580} = \frac{14}{29}$. No entanto, para chegar a esse resultado é necessário conhecermos como é feita a simplificação de uma fração (será mostrada posteriormente).

Equivalência de Frações

Frações equivalentes são aquelas que representam a mesma porção de um todo.

Exemplo:



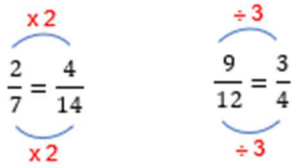
$\frac{1}{2}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{4}{8}$

Logo: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$.

Atenção!

Propriedade: Ao multiplicarmos ou dividirmos o numerador e o denominador de uma fração por um mesmo número, diferente de zero, obtemos sempre uma fração equivalente à fração dada.

Exemplos:



Comparação entre Frações

- **Frações de Mesmo Denominador**

Quando duas ou mais frações possuem o mesmo denominador, a maior é aquela que possui o maior numerador.

Exemplo: Comparação entre $\frac{2}{5}$ e $\frac{4}{5}$.

$$\frac{2}{5} < \frac{4}{5}.$$

- **Frações com Numeradores e Denominadores Diferentes**

Em frações com numeradores e denominadores diferentes, o primeiro passo que devemos dar é calcular o MMC entre denominadores das frações em questão, a fim de encontrarmos um denominador comum. Em seguida, para encontrarmos o numerador de cada fração, dividimos o denominador comum pelo denominador de cada fração e multiplicamos o resultado obtido por seus respectivos numeradores.

Após esse processo, encontramos frações de mesmo denominador, logo, a maior fração será aquela cujo numerador for maior.

Exemplo: Comparação entre $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{5}$.

$MMC(2,5) = 10.$

2	5	2
1	5	5
1	1	10

Assim, as frações terão denominador igual a 10.

Para descobrirmos o numerador de cada fração, calculamos:

Para a fração $\frac{1}{2}$, temos:

$$10 \div 2 = \mathbf{5}$$
$$\mathbf{5} \cdot 1 = \mathbf{5}.$$

Logo, $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$.

Para a fração $\frac{3}{5}$, temos:

$$10 \div 5 = \mathbf{2}$$
$$\mathbf{2} \cdot 3 = \mathbf{6}.$$

Logo, $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$.

Se $\frac{6}{10} > \frac{5}{10}$, então: $\frac{3}{5} > \frac{1}{2}$.

- **Frações com Mesmo Numerador**

Quando duas ou mais frações possuem o mesmo numerador, a maior será aquela que possuir o menor denominador.

Exemplo: Comparação entre $\frac{3}{5}$ e $\frac{3}{7}$.

$$\frac{3}{5} > \frac{3}{7}.$$

Frações Irredutíveis (Simplificação de Frações)

A simplificação de uma fração é feita com o objetivo de obter uma fração equivalente, porém com termos menores.

Para simplificarmos uma fração é necessário dividirmos o numerador e o denominador pelo mesmo número (maior que 1). Devemos fazer a divisão deve até que sejam encontrados os menores termos possíveis.

Exemplo: Simplifique a fração $\frac{27}{36}$.

$$\frac{27}{36} \overset{\div 3}{=} \frac{9}{12} \overset{\div 3}{=} \frac{3}{4}$$

$$\frac{27}{36} \overset{\div 9}{=} \frac{3}{4}$$

Outra maneira de simplificarmos uma fração é dividindo seu numerador (27) e o seu denominador (36) pelo $MDC(27,36)$.

Exemplo: Simplifique a fração $\frac{27}{36}$.

27	36 |	3
9	12 |	3
	3 |	4 9

Operações com Frações

- **Adição e Subtração de Frações**

Na adição/subtração de frações de mesmo denominador, somamos/subtraímos os numeradores e conservamos o denominador.

Exemplo 1: $\frac{5}{7} + \frac{1}{7} = \frac{(5+1)}{7} = \frac{6}{7}$.

Exemplo 2: $\frac{4}{5} - \frac{2}{5} = \frac{4-2}{5} = \frac{2}{5}$.

Na adição/subtração de frações com denominadores diferentes, calculamos o mmc dos denominadores, para encontrar o denominador comum. Em seguida, dividimos o denominador comum pelo denominador de cada fração envolvida na operação e multiplicamos o resultado pelo numerador da fração correspondente. Depois disso, somamos/subtraímos os valores encontrados para chegarmos ao numerador final.

Exemplo 1: $\frac{4}{5} + \frac{2}{7} = \frac{28+1}{35} = \frac{38}{35}$.

Exemplo 2: $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{2-1}{4} = \frac{1}{4}$.

Exemplo 3: $\frac{3}{5} + \frac{1}{9} - \frac{4}{6} = \frac{54+10-60}{90} = \frac{64-60}{90} = \frac{4}{90} = \frac{2}{45}$.

- **Multiplicação de Frações**

Na multiplicação de frações, multiplicamos os numeradores das frações para encontrar o numerador final. O mesmo processo é feito com os denominadores, ou seja, multiplicamos os denominadores das frações para encontrar o denominador final.

Exemplo: $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{7} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 7} = \frac{6}{35}$.

- **Divisão de Frações**

Na divisão de duas frações, multiplicamos a primeira fração pelo inverso da segunda.

Exemplo: $\mathbf{\frac{1}{2} \div \frac{1}{5}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{1} = \frac{5}{2}$.

Forma Mista da Fração

A forma mista da fração é representada por um número inteiro acompanhado de uma fração.

Exemplo: **Representação de duas bananas e meia.**

$$2 \text{ bananas} + \frac{1}{2} \text{ banana} = 2 + \frac{1}{2} = \mathbf{2\frac{1}{2}} \textbf{ (forma mista)}.$$

ou

$$= 2 + \frac{1}{2} = \frac{4+1}{2} = \frac{5}{2} \textbf{ (forma imprópria)}.$$

Atenção!

- Quando o numerador de uma fração é maior que o seu denominador, a chamamos de **fração imprópria**.
- Toda fração imprópria pode ser escrita na forma mista.
- Todo número racional escrito na forma mista pode ser transformado em fração imprópria.

Números Decimais

A representação na forma de números decimais é obtida quando efetuamos a divisão do numerador pelo denominador da fração em questão.

As frações possuem representação em forma de números decimais exatos (finitos) ou dízimas periódicas (infinitas).

- **Decimais exatos**

Exemplo 1: $\frac{1}{8} = 0{,}125$.

10	8
20	**0,125**
40	
0	

Exemplo 2: $\frac{4}{5} = 0{,}8$.

40	5
0	**0,8**

- **Decimais periódicos (dízimas periódicas)**

Exemplo 1: $\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$ ⇒ O algarismo 3 (parte periódica) é chamado de período.

10	3

$$\begin{array}{ll} 10 & \mathbf{0,333} \\ 10 & \\ 1 & \end{array}$$

Exemplo 2: $\frac{31}{45} = 0{,}6888\ldots$ ⇒ O período é igual a 8 e a parte não periódica igual a 6.

$$\begin{array}{ll} 310 & \vert\ 45 \\ \cline{2-2} 400 & \mathbf{0,688} \\ 400 & \\ 40 & \end{array}$$

Observação: A dízima periódica é simples quando o período vem logo após a vírgula. Se, entre a vírgula e o período existir uma parte não periódica, a dízima é chamada de composta.

Fração Geratriz de um Número Decimal

- **Fração Geratriz de um Decimal Exato**

Para obtermos a fração geratriz de um número decimal exato consideramos como numerador da fração o número decimal sem a vírgula e como denominador dela uma potência de 10 em que o número de zeros é igual à quantidade de algarismos da parte decimal do número dado.

Exemplo 1: $\mathbf{1,53} = \frac{153}{100}$.

Exemplo 2: $\mathbf{0,25} = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$.

Exemplo 3: $\mathbf{2,008} = \frac{2008}{1000} = \frac{1004}{500} = \frac{502}{250} = \frac{251}{125}$.

- **Fração Geratriz de um Decimal Periódico**

Dízima Periódica Simples

Para obtermos a fração geratriz de uma dízima periódica simples, sem parte inteira, consideramos como numerador o período da dízima e como denominador números 9 (de acordo com a quantidade de algarismos do período).

Exemplo 1: $\mathbf{0,444}\ldots = \frac{4}{9}$.

Exemplo 2: $\mathbf{0,676767}\ldots = \frac{67}{99}$.

Em dízimas que apresentam parte inteira devemos fazer o mesmo procedimento descrito acima e somar à fração geratriz encontrada o valor da parte inteira da dízima.

Exemplo: $\mathbf{1,222}\ldots = 1 + 0{,}222\ldots = 1 + \frac{2}{9} = \frac{9+2}{9} = \frac{11}{9}$.

Dízima Periódica Composta

Para obtermos a fração geratriz de uma dízima periódica composta devemos, primeiramente, igualar a dízima a x e multiplicar os dois termos por uma potência de 10 conveniente. A seguir, fazemos o mesmo processo para a obtenção da fração geratriz de uma dízima periódica simples.

Exemplo: $\mathbf{0,1333}$ ...

$$x = 0{,}1333\ldots$$
$$10x = 1{,}333\ldots$$
$$10x = 1 + 0{,}333\ldots$$
$$10x = 1 + \frac{3}{9}$$
$$10x = \frac{12}{9}$$
$$x = \frac{12}{90}.$$

Logo, $0{,}1333\ldots = \frac{12}{90}$.

Operações com Números Decimais

- **Adição e Subtração com Números Decimais**

Para adicionarmos ou subtrairmos números decimais devemos estar atentos às seguintes recomendações:

1) Os algarismos que ocupam a mesma ordem devem ficar alinhados, com uma vírgula alinhada à outra.
2) Serão adicionadas ou subtraídas as unidades de mesma ordem entre si.
3) No resultado, a vírgula deverá ser colocada alinhada com as demais.

Após isso, basta darmos prosseguimento ao processo de adição ou subtração normalmente, seguindo a mesma lógica utilizada para os números naturais.

Exemplo 1: $\mathbf{1,53 + 5,3}$.

$$\begin{array}{r} 1{,}53 \\ +\ 5{,}30 \\ \hline \mathbf{6,83} \end{array}$$

Exemplo 2: $\mathbf{4,29 - 0,85}$.

$$\begin{array}{r} 4{,}29 \\ -\ 0{,}85 \\ \hline \mathbf{3,44} \end{array}$$

- **Multiplicação com Números Decimais**

Em multiplicações com números decimais devemos multiplicar os números como se fossem números naturais e, posteriormente, colocar a vírgula no resultado, de modo que a quantidade de casas decimais seja igual à soma do número de casas decimais dos fatores.

Exemplo 1: $\mathbf{7,482 \cdot 3}$.

$7{,}428$ → 3 casas decimais.

$$\begin{array}{r} \times 3 \\ \hline \mathbf{22,446} \end{array} \quad \rightarrow \text{3 casas decimais.}$$

Exemplo 2: $\mathbf{5,291 \cdot 2,7.}$

$$\begin{array}{r} 5{,}291 \quad \rightarrow \text{3 casas decimais.} \\ \times\ 2{,}7 \quad \rightarrow \text{1 casa decimal.} \\ \hline 37037 \\ 10582 \\ \hline \mathbf{14,2857} \quad \rightarrow \text{4 casas decimais.} \end{array}$$

- **Divisão com Números Decimais**

Em divisões com números decimais, multiplicamos os dois termos (dividendo e divisor) por uma mesma potência de 10 conveniente, assim, eliminamos a vírgula e obtemos uma divisão com números naturais.

Exemplo 1: $\mathbf{453 \div 2,4.}$

$$\begin{array}{r|l} 4530 & 24 \\ \hline 0 & \mathbf{188,75} \end{array}$$

Exemplo 2: $\mathbf{2,5 \div 1,25.}$

$$\begin{array}{r|l} 250 & 125 \\ \hline 0 & \mathbf{2} \end{array}$$

Porcentagem

Porcentagens são frações de denominador 100. As porcentagens também são chamadas de razões centesimais ou taxas percentuais e costumam ser representadas pelo símbolo % (por cento).

Uma porcentagem pode ser escrita de três maneiras, são elas:

Forma Percentual	Forma Fracionária	Forma Decimal
20%	$\frac{20}{100}$	0,20
85%	$\frac{85}{100}$	0,85

Observação: A porcentagem de um determinado valor pode ser calculada a partir de uma fração de denominador igual a 100, ou por meio de regra de três.

Problemas Envolvendo Porcentagem

Problema 1: Calu é dono de uma concessionária de carros importados. Recentemente, ele recebeu em sua loja um lote com 200 carros novos. Com o final do mês se aproximando, Calu precisa saber quantos carros deste lote já foram vendidos, então, ao analisar suas planilhas, percebeu que 30% dos carros permanecem no estoque da concessionária. Quantos carros deste lote foram vendidos?

$$30\% \text{ de } 200 = \frac{30}{100} . 200 = 60 \text{ carros não foram vendidos.}$$

Número de carros vendidos $= 200 - 60 = 140$ carros.

Problema 2: Jade e Cacau foram à pizzaria comemorar os 7 anos de sua amizade. Chegando lá, pediram uma pizza GG (12 fatias) metade nordestina e metade portuguesa. Sabendo que $\frac{5}{6}$ e $\frac{1}{2}$ das metades nordestina e portuguesa, respectivamente, foram consumidas pelas amigas, como esses valores são representados em porcentagem?

Metade nordestina: $\frac{5}{6} \approx 0{,}83 \rightarrow \frac{5}{6} \approx \frac{83}{100}$ ou 83%.

Metade portuguesa: $\frac{1}{2} = 0{,}5 \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{50}{100}$ ou 50%.

Problema 3: Uma loja de eletrodomésticos resolveu fazer uma liquidação e anunciou que todos os seus produtos estavam com descontos que variavam de 10% a 70%. Precisando de uma geladeira nova, Joana compareceu à loja e observou que a geladeira de que ela gostou custava, inicialmente, $6.500{,}00$, mas estava com 25% de desconto devido à liquidação. Disposta a aproveitar o desconto oferecido pela loja, quanto Joana pagou pela geladeira?

$$25\% \text{ de } 6.500{,}00 = \frac{25}{100} . 6500 = 1.625{,}00 \text{ de desconto.}$$

Valor pago pela geladeira $= 6.500 - 1.625 = 4.875{,}00$ reais.

Exercícios

01 - (IFPE/2016) O professor de Matemática passou uma lista de exercícios para que os alunos da turma de Eletrotécnica respondessem, em duplas, e entregassem uma semana depois. Cleiton e Bruno decidiram separar algumas questões para que fizessem separados e depois juntariam as respostas para que ganhassem tempo na resolução. Três dias depois, Cleiton conseguiu responder a 12/60 das questões, enquanto Bruno conseguiu resolver 18/60 das questões. Se eles não fizeram questões em comum, a fração da lista de exercícios respondida pela dupla Cleiton e Bruno é

a) 24/60.
b) 1/4.
c) 1/2.
d) 3/10.
e) 3/4.

02 - (UFSCar SP/2016) Em uma caixa, há 36 pregos. Jair retirou $\frac{1}{9}$ deles e, logo depois, seu irmão retirou $\frac{1}{8}$ dos pregos restantes. Dos pregos que sobraram na caixa, o pai de Jair retirou 8 deles para finalizar um serviço. A fração que representa a razão entre o número de pregos que ficaram na caixa e os 36 pregos iniciais é

a) $\frac{1}{9}$
b) $\frac{2}{9}$

c) $\frac{5}{9}$
d) $\frac{7}{9}$
e) $\frac{8}{9}$

03 - (UFT TO/2012) No ano de 2007, o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) teve 3.584.569 inscritos em todo o país. Neste ano, 23,60% dos candidatos inscritos, nacionalmente, não compareceram para fazer o Exame (faltosos). No Tocantins o número total de candidatos inscritos foi de 24.768. A Universidade Federal do Tocantins (UFT) possui 7 Campi em todo o Estado. A tabela a seguir apresenta os números de candidatos inscritos no ENEM para fazerem as provas nas cidades onde há Campi da UFT, bem como o número de candidatos que compareceu para fazer o ENEM nestes municípios (presentes).

Cidade	Número de inscritos	Número de inscritos presentes
Araguaína	3.977	3.147
Arraias	380	311
Gurupi	1.421	1.066
Miracema do Tocantins	576	426
Palmas	6.425	4.561
Porto Nacional	1.879	1.449
Tocantinópolis	1.302	946
Total	**15.960**	**11.906**

Fonte: www.inep.gov.br

Ao analisar as informações anteriores, verifica-se que a diferença entre o percentual de faltosos nas cidades tocantinenses indicadas na tabela pelo percentual nacional de faltosos, em pontos percentuais, é de:
(considere duas casas decimais após a vírgula)

a) 0,80
b) 1,80
c) 18,00
d) 23,60
e) 25,40

04 - (PUC Campinas SP/2021) Maria aplicou R$ 10 000,00 em um fundo de investimentos por 3 meses. Descontadas as taxas, o fundo rendeu 20% no primeiro mês, mas perdeu 5% em cada um dos outros dois meses de aplicação. O valor que Maria possui ao final dos 3 meses é:

a) R$ 10 830,00
b) R$ 10 800,00
c) R$ 11 400,00
d) R$ 11 000,00
e) R$ 11 500,00

05 - (PUC Campinas SP/2021) O custo total de instalação de um sistema de energia solar de uma determinada residência foi de R$ 18.240,00. Antes da instalação do sistema solar, o gasto mensal com energia elétrica dessa residência era de R$ 400,00.

Se a economia, a partir da instalação, é de 95%, o número de meses necessários para que o investimento dê retorno é:

a) 48
b) 38
c) 46
d) 44
e) 36

06 - (Encceja/2017) Uma menina precisa dividir, de forma equânime, para oito amigos, uma quantidade de doces igualmente contida em dois potes também iguais.

Qual é a fração correspondente à parte de um pote que será dada a cada um desses oito amigos?

a) $\frac{1}{2}$
b) $\frac{1}{4}$
c) $\frac{1}{8}$
d) $\frac{1}{10}$

07 - (ENEM MEC/2017) Um estudante elaborou uma planta baixa de sua sala de aula. A sala, com forma de retângulo, tem lados medindo 9 m e 5,5 m. No desenho feito pelo estudante, os lados da figura mediam 18 cm e 11 cm.

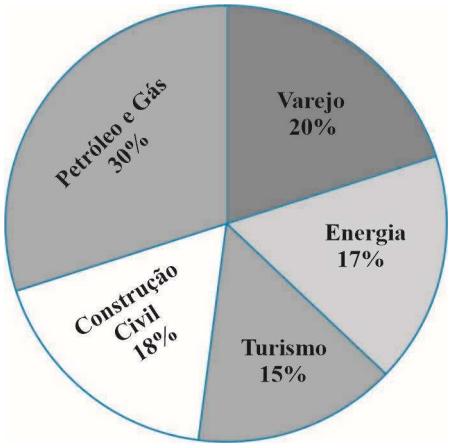
A fração que representa a razão entre as medidas dos lados da figura desenhada e as medidas dos lados do retângulo que representa a sala original é

a) $\frac{1}{2}$
b) $\frac{1}{5}$
c) $\frac{1}{20}$
d) $\frac{1}{50}$
e) $\frac{1}{200}$

08 - (UFPR/2017) Rafaela e Henrique participaram de uma atividade voluntária que consistiu na pintura da fachada de uma instituição de caridade. No final do dia, restaram duas latas de tinta idênticas (de mesmo tamanho e cor). Uma dessas latas estava cheia de tinta até a metade de sua capacidade e a outra estava cheia de tinta até 3/4 de sua capacidade. Ambos decidiram juntar esse excedente e dividir em duas partes iguais, a serem armazenadas nessas mesmas latas. A fração que representa o volume de tinta em cada uma das latas, em relação à sua capacidade, após essa divisão é:

a) 1/3.
b) 5/8.
c) 5/6.
d) 4/3.
e) 5/2.

09 - (PUC RS/2021) Um investidor iniciante aplicou uma certa quantia (Q) na Bolsa de Valores. Para montar a sua carteira de ações, optou por investir em empresas de cinco setores distintos, Varejo, Construção Civil, Turismo, Energia e Petróleo e Gás. O gráfico abaixo mostra a porcentagem do capital investido em cada setor.



Considerando que o valor total investido nos setores de Turismo e de Petróleo e Gás foi de R$11.250,00, e analisando o gráfico apresentado, qual é a quantia investida (Q) em reais?

a) 5.062,50
b) 7.500,00
c) 20.454,54
d) 25.000,00

10 - (PUC RS/2021) Ao planejar os gastos mensais, uma família deve levar em consideração a sua renda. Especialistas recomendam que os gastos de consumo variável como viagens, restaurantes, cinema, entre outros, seja de 30% da renda mensal. Considerando uma família que siga essas orientações e inicie o mês com um custo fixo de R$ 2.000,00 e que, nesse mesmo mês, tenha um gasto total de R$ 4.100,00 (custo fixo mais o consumo variável), qual foi a renda familiar, em reais, nesse mês?

a) 5.000
b) 6.000
c) 7.000
d) 9.000

11 - (Unemat MT/2013) O professor de Matemática, em uma aula, ao trabalhar com a comparação de números decimais, pediu que os alunos efetuassem cálculos recorrendo a uma operação por vez (adição, subtração, divisão e multiplicação) com os números 1000 e 0,01.

Em quais dessas operações foi obtido maior resultado?
a) 1000 – 0,01.
b) 0,01/1000.
c) 1000/0,01.
d) 1000 x 0,01.

e) 1000 + 0,01.

12 - (IFSC/2017) Jéssica comprou 7 pizzas, com 8 fatias cada uma, para comemorar seu aniversário junto com os amigos. No final da festa, ao terminarem a refeição, a mãe de Jéssica constatou que foram consumidas 6 pizzas inteiras. Além dessas, foram consumidas também 5 fatias, das oito que havia na sétima pizza.

A fração que representa de forma CORRETA a quantidade total de pizza que Jéssica e seus amigos comeram é

a) $\frac{53}{8}$
b) $\frac{46}{8}$
c) $\frac{11}{8}$
d) $\frac{7}{8}$
e) $\frac{5}{8}$

13 - (IFMT/2018) Alberto e seus quatro filhos foram a uma pizzaria comer pizzas. Alberto comeu $\frac{2}{3}$ de uma pizza. O 1º filho comeu $\frac{3}{2}$ do que seu pai havia comido. O 2º filho comeu $\frac{3}{2}$ do que o 1º filho havia comido. O 3º filho comeu $\frac{3}{2}$ do que o 2º filho havia comido e o 4º filho comeu $\frac{4}{3}$ do que o 3º filho havia comido. Eles compraram a menor quantidade de pizzas inteiras necessárias para atender a todos. Assim, é possível calcular corretamente que a fração de uma pizza que sobrou foi igual a:

a) $\frac{5}{12}$
b) $\frac{3}{2}$
c) $\frac{7}{9}$
d) $\frac{7}{12}$
e) $\frac{7}{24}$

14 - (UNIG RJ/2021) O projeto Minha Casa Minha Vida 2020 está vendendo um apartamento com as seguintes opções de pagamento

I. À vista, com um desconto de 20% do valor real.
II. Duas parcelas iguais, com um desconto de 5% do valor real.

Sabendo-se que o preço à vista é de R$ 48 000,00, o valor de cada parcela, na opção II, é igual a

01) R$30000,00
02) R$29000,00
03) R$28500,00
04) R$27500,00
05) R$26400,00

15 - (UNIG RJ/2021) Durante a crise econômica provocada pela pandemia, para atrair clientes, uma loja resolve fazer uma promoção, dando desconto de 15% para compras

entre R$900,00 e R$1800,00, o que não aumentou o volume de vendas. A loja resolveu então aumentar em 10% o desconto já anunciado.

Com base nessa informação, uma compra no valor de R$1600,00 teve um desconto, em reais, igual a

01) 500
02) 324
03) 264
04) 240
05) 220

16 - (UPE/2018) Um ciclista estabeleceu a meta de percorrer a distância entre duas cidades durante três dias. No primeiro dia, percorreu um terço da distância. No dia seguinte, mais um terço do que faltava. Que fração da distância ele necessita percorrer no terceiro dia para atingir sua meta?

a) $\frac{1}{3}$
b) $\frac{2}{3}$
c) $\frac{2}{9}$
d) $\frac{4}{9}$
e) $\frac{5}{9}$

17 - (Universidade Iguaçu RJ/2018) Sabe-se que, dentre os médicos de uma Casa de Saúde, 2, em cada 5, trabalham exclusivamente ali. Dentre os fisioterapeutas, que são em número 3 vezes maior, 3, em cada 4, são exclusivos daquele Sanatório.

Ao todo, dessas duas categorias de profissionais, a fração que não é exclusiva do Sanatório é igual a

01) $\frac{27}{80}$
02) $\frac{39}{40}$
03) $\frac{1}{2}$
04) $\frac{23}{40}$
05) $\frac{53}{80}$

18 - (PUC Campinas SP/2017) O tempo de um dia é medido em um período chamado hora e em número de 24 horas. Esse mesmo tempo poderia ser subdividido em 54 períodos iguais, chamados de TAS. Assim, um dia teria 54 TAS. Nesta hipótese, considere subdivisões decimais da unidade de medida TAS. Decorridas 7 horas e 40 minutos de um evento, esse mesmo tempo, medido em TAS, é igual a

a) 13,5.
b) 21,25.
c) 17,25.
d) 15,1.
e) 19,75.

19 - (UnirG TO/2021) A loja ATACADÃO oferece um desconto de 20% sobre o preço de venda para um determinado produto. Agindo assim, ainda obtém um lucro de 20% sobre o preço de compra do produto. Imaginando uma situação em que o desconto não fosse dado, qual seria o lucro da loja?

a) 35%.
b) 40%.
c) 45%.
d) 50%.

20 - (UFMS/2021) Num período de três semanas, as ações de determinada empresa tiveram duas altas sucessivas, de 10% e 8%, mas, devido a notícias negativas veiculadas pela mídia, registrou-se uma queda de suas cotações em 50%.

Em relação aos seus valores iniciais, tais ações sofreram uma diminuição percentual igual a:

a) 59,4%.
b) 50,0%.
c) 40,6%.
d) 32,0%.
e) 28,8%.

21 - (Unipê PB/2018) Das internações em um hospital, um terço dura menos de 1 semana, e três quintos das restantes chegam, no máximo, a 2 semanas.
Nessas condições, é correto afirmar que a fração de internações que ultrapassa 2 semanas é igual a

01) $\frac{2}{15}$
02) $\frac{1}{5}$
03) $\frac{4}{15}$
04) $\frac{1}{3}$
05) $\frac{2}{5}$

22 - (Unifor CE/2018) Um aluno da disciplina de Álgebra Linear do curso de engenharia da Universidade de Fortaleza deve executar uma atividade determinada pelo professor em 4 semanas. Esse aluno executou 3/8 da atividade na primeira semana. Na segunda semana, ele executou 1/3 do que havia executado na primeira semana. Na terceira e quarta semanas, o aluno termina a execução da atividade e verifica que na terceira semana executou o dobro do que havia executado na quarta semana.

Sendo assim, a fração de toda a atividade que esse aluno executou na quarta semana é igual a

a) 1/6.
b) 1/4.
c) 6/16.
d) 8/24.

e) 2/5.

23 - (UCB DF/2018) Embora o número π (pi) tenha sido objeto de estudo muitos séculos antes de Cristo, ainda hoje algumas pessoas consideram esse número como o decimal exato 3,14. Já foi provado, no entanto, que é um número irracional e que a respectiva representação, incluindo as oito primeiras casas decimais, é 3,14159265... Os números $3\frac{1}{7}$ e $3\frac{10}{71}$ já foram utilizados, na Antiguidade, como aproximações para o valor de π.

Com base nessas informações, é correto afirmar que

a) $3\frac{10}{71} = \pi = 3\frac{1}{7}$.
b) $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$.
c) $\pi > 3\frac{1}{7}$.
d) $\pi < 3\frac{10}{71}$.
e) $3\frac{1}{7} < \pi < 3\frac{10}{71}$.

24 - (UEG GO/2021) Pedro comprou três calças pelo preço unitário de R$ 82,00 e cinco camisas pelo preço unitário de R$ 110,50. Como pagou a vista, ele teve desconto de 15% no preço das calças e 18% no preço das camisas. Nessas condições, o valor total de descontos nas compras foi

a) R$ 119,77
b) R$ 122,57
c) R$ 128,77
d) R$ 136,35
e) R$ 138,35

25 - (UFPR/2021) O manual de instruções de uma balança de precisão informa que o erro cometido na aferição de objetos de até 500 g é de no máximo 0,5%. Se um objeto de 70 g for colocado nessa balança, o valor registrado por ela será de no máximo:

a) 70,035 g.
b) 70,350 g.
c) 73,500 g.
d) 75,000 g.
e) 75,500 g.

26 - (IFPI/2020) Se adicionarmos x ao numerador e subtrairmos x do denominador da fração $\frac{7}{12}$, obtemos a fração $\frac{4}{3}$. Assim, a fração $\frac{7x+8}{7x-6}$ é equivalente a:

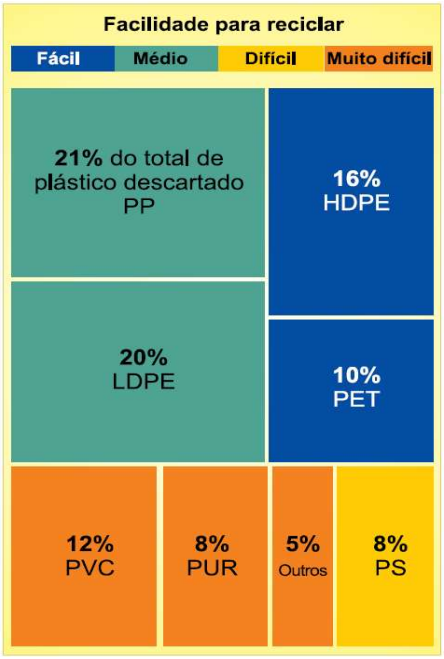
a) $\frac{4}{5}$
b) $\frac{5}{3}$
c) $\frac{5}{6}$
d) $\frac{7}{4}$
e) $\frac{2}{3}$

27 - (ENEM MEC/2020) Foi feita uma pesquisa sobre a escolaridade dos funcionários de uma empresa. Verificou-se que $\frac{1}{4}$ dos homens que ali trabalham têm o ensino médio completo, enquanto $\frac{2}{3}$ das mulheres que trabalham na empresa têm o ensino médio completo. Constatou-se, também, que entre todos os que têm o ensino médio completo, metade são homens.

A fração que representa o número de funcionários homens em relação ao total de funcionários dessa empresa é

a) $\frac{1}{8}$
b) $\frac{3}{11}$
c) $\frac{11}{24}$
d) $\frac{2}{3}$
e) $\frac{8}{11}$

28 - (Unesp SP/2021) Existem diferentes tipos de plásticos e diversas finalidades de uso para cada um deles, sendo alguns tipos mais descartados do que outros. O esquema mostra a distribuição do plástico descartado por tipo e a facilidade em reciclá-lo.



(www.nexojornal.com.br)

Considerando apenas os cinco tipos mais descartados, temos que os plásticos de fácil ou média dificuldade de reciclagem correspondem a um valor

a) superior a 86%.
b) entre 79% e 86%.
c) entre 72% e 79%.
d) entre 65% e 72%.
e) inferior a 65%.

29 - (Fac. Medicina de Petrópolis RJ/2021)



O álcool 70º é um produto no qual qualquer quantidade contém 70% de álcool etílico puro e 30% de água.
Esse álcool é indicado para uso profissional como, por exemplo, nos hospitais. Para fins domésticos, utiliza-se o álcool 40º, que é eficiente para limpeza e muito mais seguro.

Nesse contexto, considere 1 litro de álcool 70º.

Qual a quantidade de água, em mL, que deve ser acrescentada a esse produto para obter álcool 40º?

a) 450
b) 600
c) 850
d) 500
e) 750

30 - (Udesc SC/2020) Operando a soma de frações abaixo e simplificando a expressão $\frac{2}{x+2} - \frac{x-1}{x-1} + \frac{1}{3}$, obtém-se:

a) $\frac{-2x^2-3x-22}{3x^2-12}$
b) $\frac{-2x^2+3x-10}{3x^2-12}$
c) $\frac{-2x^2+3x-2}{3x^2+12}$
d) $\frac{-2x^2+3x-2}{3x^2+4}$
e) $\frac{-2x^2+3x-22}{3x^2-4}$

31 - (ENEM MEC/2020) Um jogo pedagógico é formado por cartas nas quais está impressa uma fração em uma de suas faces. Cada jogador recebe quatro cartas e vence aquele que primeiro consegue ordenar crescentemente suas cartas pelas respectivas frações impressas. O vencedor foi o aluno que recebeu as cartas com as frações: $\frac{3}{5}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$ e $\frac{5}{9}$.

A ordem que esse aluno apresentou foi

a) $\frac{1}{4}; \frac{5}{9}; \frac{3}{5}; \frac{2}{3}$
b) $\frac{1}{4}; \frac{2}{3}; \frac{3}{5}; \frac{5}{9}$
c) $\frac{2}{3}; \frac{1}{4}; \frac{3}{5}; \frac{5}{9}$
d) $\frac{5}{9}; \frac{1}{4}; \frac{3}{5}; \frac{2}{3}$

e) $\frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{1}{4}, \frac{5}{9}$

32 - (ENEM MEC/2022) Uma escola realizou uma pesquisa entre todos os seus estudantes e constatou que três em cada dez deles estão matriculados em algum curso extracurricular de língua estrangeira.

Em relação ao número total de estudantes dessa escola, qual porcentagem representa o número de alunos matriculados em algum curso extracurricular de língua estrangeira?

a) 0,3%
b) 0,33%
c) 3%
d) 30%
e) 33%

33 - (ENEM MEC/2022) A associação de comerciantes varejistas de uma cidade, a fim de incrementar as vendas para o Natal, decidiu promover um fim de semana de descontos e promoções, no qual produtos e serviços estariam com valores reduzidos. Antes do período promocional, um celular custava R$ 300,00 e teve seu preço reajustado, passando a custar R$ 315,00. Durante o fim de semana de descontos e promoções, o preço desse celular recebeu um desconto de 20%.

O desconto dado no preço do celular, em porcentagem, com base no valor dele anteriormente ao aumento sofrido antes da promoção, foi de

a) 15,24%
b) 16,00%
c) 19,04%
d) 21,00%
e) 25,00%

34 - (Uncisal AL/2018) De acordo com a Organização Mundial das Nações Unidas, cada pessoa necessita de 3,3 m3/mês de água para atender suas necessidades de consumo e higiene. Para saber qual é a quantidade de água que deve ser ingerida diariamente, é necessário avaliar a idade, o sexo, o hábito de vida e a saúde da pessoa. Sobre essa temática, considere as seguintes informações:

- Uma recomendação é ingerir 35 ml de água a cada quilograma de massa, diariamente.
- Em uma pessoa sadia, há equilíbrio entre a água ingerida e a eliminada. Essa eliminação ocorre sob a forma de urina ($\frac{1}{2}$da água ingerida), nas fezes ($\frac{1}{10}$da água ingerida) e na transpiração (o restante da água ingerida).
- Uma grande porcentagem do corpo de um ser humano adulto é formada por moléculas de água e isso representa $\frac{3}{4}$ de seu peso em água.

Considerando o exposto, assinale a alternativa correta.

a) A fração correspondente à água eliminada em forma de transpiração é menor do que a metade da soma das frações correspondentes à eliminação de água pela urina e pelas fezes, juntas.
b) Uma pessoa de 84 Kg tem seu peso em água de 62 Kg.

c) Uma pessoa de 80 Kg deve ingerir, no mínimo, 2,5 litros de água diariamente.

d) Uma pessoa com peso em água de 84 Kg pesa mais do que 100 Kg.

e) A quantidade de água eliminada pela transpiração é maior do que a quantidade de água eliminada pela urina e pelas fezes, juntas.

35 - (FGV /2015) Sueli colocou 40 mL de café em uma xícara vazia de 80 mL, e 40 mL de leite em outra xícara vazia de mesmo tamanho. Em seguida, Sueli transferiu metade do conteúdo da primeira xícara para a segunda e, depois de misturar bem, transferiu metade do novo conteúdo da segunda xícara de volta para a primeira. Do conteúdo final da primeira xícara, a fração correspondente ao leite é

a) $\frac{1}{4}$
b) $\frac{1}{3}$
c) $\frac{3}{8}$
d) $\frac{2}{5}$
e) $\frac{1}{2}$

36 - (ENEM MEC/2022) Os aeroportos apresentam regras rígidas para despacho de bagagem. No caso de embarque nacional, algumas companhias aéreas ainda não cobravam, até 2017, por unidade de bagagem despachada, limitada a 23 kg por passageiro.
Uma pessoa irá viajar com uma única mala. Como não quer pagar por "excesso de peso" e dispõe, em casa, de uma balança de pêndulo que apresenta um erro máximo de 8% a mais em relação à massa real do objeto que nela for verificada, conferirá qual a massa de sua mala antes de ir para o aeroporto.

O valor máximo, em quilograma, indicado em sua balança deverá ser

a) 21,16.
b) 22,08.
c) 23,92.
d) 24,84.
e) 25,00.

37 - (UEMA/2022) A empresa Maranhense de Administração Portuária (EMAP) administra o Porto de Itaqui e os terminais de Ferry Boat da Ponta da Espera, em São Luís, e Cujupe, no Município de Alcântara, responsável pela Infraestrutura-Preservação Ambiental-Segurança. A Agência Estadual de Transporte e Mobilidade Urbana (M0B), por sua vez, é responsável pelo Planejamento, pela Coordenação, pela Concessão, pela Permissão, pela Autorização, pela Regulamentação, pela Inspeção e pela Fiscalização dos serviços públicos de transportes aquáticos intermunicipal de passageiros, de cargas e de veículos. Atualmente, no Maranhão, duas empresas marítimas fazem essa travessia.



Embarcação de Ferry Boat
http://kamaleao.com/saoluis/5351/ferry-boat-sao-luis-cujupe. Adaptado.

Ambas as empresas praticam os mesmos preços dos bilhetes de passagens para todas as categorias de passageiros e de veículos. A capacidade máxima de lotação, por embarcação, por viagem, de uma das empresas é de 1000 passageiros e de 70 veículos, em média.

Analise o quadro que corresponde a uma viagem, de uma embarcação, com saída do Terminal da Ponta da Espera e chegada ao Porto do Cujupe.

DESCRIÇÃO	QUANTIDADE	VALOR EM R$ POR PASSAGEM
Passageiros (de 0 a 5 anos) gratuidade	30	0
Idosos a partir de 65 anos gratuidade	80	0
Passageiros de 6 a 10 anos	50	2,00
Estudantes (Lei nº 9985/2014-Art.48)	50	6,00
Passageiros maiores de 10 anos	200	12,00
Veículo de passeio/utilitário acima de 04 metros	14	88,00
Caminhão 3/4 carregado	5	140,00
Van Porte Grande 20 lugares (rodagem dupla)	5	115,00
Micro Ônibus (até 29 passageiros)	5	145,00
Veículo de passeio/utilitário de até 04 metros	10	77,00

Considerando as condições descritas no quadro, os percentuais em relação à lotação máxima dos quantitativos de passageiros e de veículos, respectivamente, e o total, em reais, arrecadado nas vendas dos bilhetes de passageiros e de veículos, em uma viagem, são

	Percentuais de passageiros e de veículos	Total arrecadado
a)	41,50% e 50%	R$ 6.670,00
b)	55% e 51%	R$ 6.402,00
c)	41% e 55,71%	R$ 6.802,00
d)	54,5% e 45%	R$ 6.527,00
e)	50% e 56,70%	R$ 6.930,00

38 - (Unifor CE/2015) Um automóvel pode andar, sem se abastecer e consumo constante, durante 360 minutos. Tendo saído com um furo no tanque de combustível, ele andou apenas 144 minutos. A fração do tanque que escoaria, caso ficasse 15 minutos parado, é de :

a) 1/4
b) 1/8
c) 1/12
d) 1/16

e) 1/20

39 - (IFSC/2016) Para encher um reservatório de água, estão conectadas a ele duas torneiras com vazões diferentes. A primeira torneira enche esse reservatório em 15 horas e, a segunda, em 10 horas.

Qual a fração, em relação à capacidade total do reservatório, representaria a quantidade de água eliminada pelas torneiras se elas ficassem abertas ao mesmo tempo, durante 2 horas?

Assinale a alternativa CORRETA.

a) 1/3
b) 2/25
c) 1/150
d) 1/6
e) 2/15

40 - (FMABC SP/2022) Em uma campanha de vacinação, a previsão inicial era vacinar n pessoas da faixa etária A e n pessoas da faixa etária B. Sabe-se que o número de pessoas vacinadas, da faixa etária A, foi 20% inferior ao número previsto, e que o número de pessoas vacinadas, da faixa etária B, foi 60% superior ao número de pessoas vacinadas da faixa etária A. Nessas condições, o número de pessoas vacinadas dessas duas faixas etárias superou a previsão inicial em

a) 4%.
b) 8%.
c) 12%.
d) 6%.
e) 10%.

41 - (Fuvest SP/2022) Uma indústria produz três modelos de cadeiras (indicadas por $M1$, $M2$ e $M3$), cada um deles em duas opções de cores: preta e vermelha (indicadas por P e V, respectivamente). A tabela mostra o número de cadeiras produzidas semanalmente conforme a cor e o modelo:

	P	V
M_1	500	200
M_2	400	220
M_3	250	300

As porcentagens de cadeiras com defeito são de 2% do modelo $M1$, 5% do modelo $M2$ e 8% do modelo $M3$. As cadeiras que não apresentam defeito são denominadas boas.

A tabela que indica o número de cadeiras produzidas semanalmente com defeito (D) e boas (B), de acordo com a cor, é:

a)

	P	V
D	55	39
B	1095	681

b)

	P	V
D	51	40
B	1099	680

c)

	P	V
D	50	39
B	1100	681

d)

	P	V
D	50	37
B	1100	683

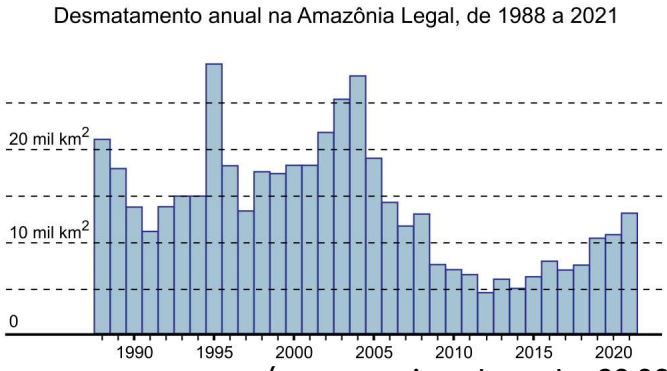
e)

	P	V
D	51	39
B	1099	681

42 - (Famerp SP/2022) Segundo dados do Instituto Trata Brasil, 83,3% dos brasileiros contam com água encanada, mas apenas 51,9% têm acesso a tratamento de esgoto. De acordo com estimativas do IBGE, em 2021 a população brasileira atingiu a marca de 213,3 milhões de pessoas. Considerando-se que todos os brasileiros que têm acesso a tratamento de esgoto também têm acesso à água encanada, o número aproximado de brasileiros que, em 2021, têm acesso à água encanada, mas não têm acesso ao tratamento de esgoto, é de

a) 110 milhões.
b) 85 milhões.
c) 92 milhões.
d) 102 milhões.
e) 67 milhões.

43 - (Famerp SP/2023) Analise o gráfico.



(www.nexojornal.com.br. 29.08.2022. Adaptado.)

Com relação ao período de 30 anos, de 1991 até 2020, a porcentagem de anos cujo desmatamento anual na Amazônia Legal foi maior do que 10 000 km^2 e menor do que 15 000 km2, foi de, aproximadamente,

a) 23%.
b) 27%.
c) 66%.
d) 46%.
e) 33%.

44 - (Unicamp SP/2023) Um recipiente de 30 litros contém uma solução de 14 partes de álcool e 1 parte de água. Quantos litros de água devem ser adicionados para que se tenha uma solução com 70% de álcool?

a) 8 litros.
b) 10 litros.
c) 12 litros.
d) 14 litros.

45 - (Fuvest SP/2023) André e Bianca possuem automóveis que podem ser abastecidos com etanol, gasolina ou uma mistura dos dois combustíveis. Em um mesmo posto de combustível, André abasteceu seu carro com 18 litros da bomba de etanol e 32 litros da bomba de gasolina; já Bianca abasteceu seu carro com 30 litros da bomba de etanol e 20 litros da bomba de gasolina. Sabendo que o valor total pago por André foi 10% maior do que o pago por Bianca, a razão entre os preços, por litro, de etanol e de gasolina é:

a) 5/8
b) 2/3
c) 7/10
d) 3/4
e) 4/5

Razão e Proporção

Razão

A razão entre dois números $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$, com $b \neq 0$, é o quociente $\frac{a}{b}$ (também representado por $a:b$).

Exemplo 1: Uma empresa que organiza casamentos lucrou, no ano de 2022, o valor de 240 mil reais. No ano seguinte, esta mesma empresa conseguiu lucrar 300 mil reais. Qual o lucro desta empresa em 2023 em relação ao valor obtido em 2022?

O lucro de 2023 em relação ao de 2022 é a razão entre o lucro nos anos 2023 e 2022.

Logo, $L = \frac{300000}{240000} = 1{,}25$.

O lucro obtido em 2023 corresponde a $1{,}25$ vezes o valor obtido em 2022.

Exemplo 2: Juliana comprou uma bicicleta por $R\$\ 1200{,}00$. Dois meses depois, se arrependeu e resolveu vender por $R\$\ 1050{,}00$. Qual a razão entre os valores de venda e de compra da bicicleta?

$$\frac{Venda}{Compra} = \frac{1050}{1200} = \frac{7}{8}.$$

A razão entre os valores de venda e de compra da bicicleta é $\frac{7}{8}$.

Atenção!

Observação: Quando $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ representam medidas de uma mesma grandeza, é necessário expressá-las na mesma unidade de medida.

Exemplo: Anna e André decidem participar de uma corrida de rua. Sabendo que Anna completou o percurso da corrida em 1 hora e 45 minutos e André fez o mesmo percurso em 50 minutos, qual a razão entre os tempos gastos por Anna e André?

A grandeza expressa no problema é o tempo, no entanto, essa grandeza está representada tanto em horas quanto em minutos. Desse modo, é necessário colocarmos os tempos de Anna e André somente em horas ou somente em minutos.

Assim, a razão entre os tempos gastos por Anna e André é:

$$\frac{Tempo\ de\ Anna\ (min)}{Tempo\ de\ André\ (min)} = \frac{105}{50} = \mathbf{\frac{21}{10}}.$$

Proporção

A proporção é definida como a igualdade entre razões. Portanto, dadas as razões $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, elas serão proporcionais quando $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Observação: Os valores $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ são chamados de meios, enquanto os valores $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{d}$ são denominados extremos.

Exemplo 1: Supondo que o lucro da empresa de casamentos tenha sido de 144 mil reais em 2020 e 180 mil em 2021 e, sabendo que os lucros em 2022 e 2023 foram 240

mil e 300 mil reais, respectivamente, é possível afirmar que a razão entre os anos de 2023 e 2022 é igual à razão entre 2021 e 2020. Portanto, representam uma proporção:

$$\frac{300000}{240000} = \frac{18000}{144000} = 1{,}25.$$

Atenção!

Propriedade: Em toda proporção, o produto dos meios é igual ao produto dos extremos. Então, para $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, temos, $a \,.\, d = b \,.\, c$

Exemplo 2: Uma empresa pretende investir 500 mil reais na melhoria de suas instalações e na qualificação de seus trabalhadores. Esse investimento será feito na proporção de $3:5$, respectivamente. Quais os valores que serão investidos nas instalações da empresa e na qualificação profissional?

Valor investido na melhoria das instalações $= x$
Valor investido na qualificação dos profissionais $= 500000 - x$

Desse modo:

$$\frac{x}{500000 - x} = \frac{3}{5}$$

$$5x = 1500000 - 3x$$

$$8x = 1500000$$

$$x = 187500 \text{ reais.}$$

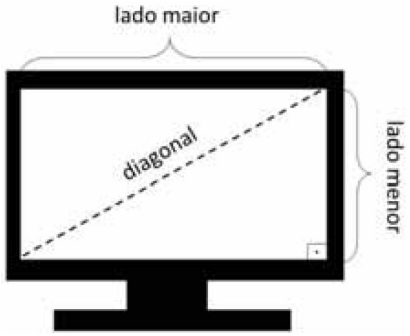
Logo, o valor investido na melhoria das instalações é de $187500{,}00$ reais e na qualificação dos profissionais é de $312500{,}00$ reais.

Exercícios

01 - (UFPB/2010) Na fabricação de certo tipo de fertilizante, são utilizados apenas dois produtos, A e B, em quantidades que obedecem à proporção A : B = 1: 4 . A quantidade desse fertilizante que pode ser produzida com apenas 30 kg do produto A e 160 kg do produto B é:

a) 150 kg
b) 160 kg
c) 170 kg
d) 180 kg
e) 190 kg

02 - (UEL PR/2019) Convenciona-se que o tamanho dos televisores, de tela plana e retangular, é medido pelo comprimento da diagonal da tela, expresso em polegadas. Define-se a proporção dessa tela como sendo o quociente do lado menor pelo lado maior, também em polegadas. Essas informações estão dispostas na figura a seguir.



Suponha que Eurico e Hermengarda tenham televisores como dado na figura e de proporção 3/4. Sabendo que o tamanho do televisor de Hermengarda é 5 polegadas maior que o de Eurico, assinale a alternativa que apresenta, corretamente, quantas polegadas o lado maior da tela do televisor de Hermengarda excede o lado correspondente do televisor de Eurico.

a) 2
b) 3
c) 4
d) 5
e) 6

03 - (ENEM MEC/2012) José, Carlos e Paulo devem transportar em suas bicicletas uma certa quantidade de laranjas. Decidiram dividir o trajeto a ser percorrido em duas partes, sendo que ao final da primeira parte eles redistribuiriam a quantidade de laranjas que cada um carregava dependendo do cansaço de cada um. Na primeira parte do trajeto José, Carlos e Paulo dividiram as laranjas na proporção 6 : 5 : 4, respectivamente. Na segunda parte do trajeto José, Carlos e Paulo dividiram as laranjas na proporção 4 : 4 : 2, respectivamente.

Sabendo-se que um deles levou 50 laranjas a mais no segundo trajeto, qual a quantidade de laranjas que José, Carlos e Paulo, nessa ordem, transportaram na segunda parte do trajeto?

a) 600, 550, 350
b) 300, 300, 150
c) 300, 250, 200
d) 200, 200, 100
e) 100, 100, 50

04 - (UEA AM/2020) Um taxista abastece seu veículo com gasolina e etanol, mantendo sempre a proporção de duas partes de gasolina para cada cinco partes de etanol. Em certa semana, ele fez dois abastecimentos, colocando 15 litros de gasolina no primeiro e 30 litros de etanol no segundo. A diferença entre as quantidades totais de combustível colocadas pelo taxista no primeiro e no segundo abastecimentos foi igual a

a) 10,5 litros.
b) 9 litros.
c) 9,5 litros.

d) 8,5 litros.
e) 10 litros.

05 - (FPS PE/2020) Um técnico de laboratório compôs uma mistura de dois produtos químicos, X e Y. Inicialmente, ele obteve 6,0 kg da mistura, consistindo em 1/4 de X e o restante de Y. Ele percebeu que usou a proporção errada e, ao invés de desperdiçar os produtos químicos já usados, decidiu adicionar um pouco mais de X, para que a nova mistura consista em 40% de X e 60% de Y. Que massa de X ele deve adicionar à primeira mistura?

a) 3,0 kg
b) 1,5 kg
c) 2,0 kg
d) 1,0 kg
e) 2,5 kg

06 - (UEG GO/2009) Um automóvel, quando abastecido apenas com álcool, percorre 7 km com um litro deste combustível. Este mesmo automóvel e no mesmo percurso, abastecido com "gasolina brasileira", que é uma mistura de gasolina pura e álcool na proporção de 3:1, percorre 10 km com um litro deste outro combustível. Mantidas estas relações e se este automóvel fosse abastecido apenas com gasolina pura, para cada litro, ele percorreria

a) 10,5 km.
b) 11 km.
c) 11,5 km.
d) 12 km.

07 - (ENEM MEC/2010)

FONTES ALTERNATIVAS

Há um novo impulso para produzir combustível a partir de gordura animal. Em abril, a High Plains Bioenergy inaugurou uma biorrefinaria próxima a uma fábrica de processamento de carne suína em Guymon, Oklahoma. A refinaria converte a gordura do porco, juntamente com o óleo vegetal, em biodiesel. A expectativa da fábrica é transformar 14 milhões de quilogramas de banha em 112 milhões de litros de biodiesel.

Revista Scientific American. Brasil, ago. 2009 (adaptado).

Considere que haja uma proporção direta entre a massa de banha transformada e o volume de biodiesel produzido.

Para produzir 48 milhões de litros de biodiesel, a massa de banha necessária, em quilogramas, será de, aproximadamente,

a) 6 milhões.
b) 33 milhões.
c) 78 milhões.
d) 146 milhões.
e) 384 milhões.

08 - (UFG GO/2010) Estatísticas da Organização das Nações Unidas para a Agricultura e Alimentação (FAO) revelam que a fome atingiu 1,02 bilhão de seres humanos, em 2009. As pessoas submetidas à insegurança alimentar nesse ano eram 53 milhões na América Latina e Caribe; 42 milhões no Oriente Médio e Norte da África; 15 milhões em países ricos; 642 milhões na Ásia e no Pacífico e 265 milhões na África subsaariana.
Para o combate à fome, a FAO indica ser necessário investimento anual de U$ 83 bilhões no agronegócio em países em desenvolvimento, até 2050, quando, segundo estimativa, a população será de 9,1 bilhões de habitantes, cerca de 3 bilhões a mais do que em 2009.

De acordo com estas informações, em relação às pessoas submetidas à insegurança alimentar, a quantidade delas

a) na África subsaariana era inferior a 25% do total dessas pessoas, em 2009.
b) no mundo, em 2050, será de aproximadamente 1,52 bilhão, caso a proporção entre elas e a população total seja a mesma de 2009.
c) no continente americano era superior a 68 milhões de pessoas, em 2009.
d) nos países ricos representava 15% do total dessas pessoas, em 2009.
e) no mundo representava 11% da população total, em 2009.

09 - (ENEM MEC/2011) Nos últimos cinco anos, 32 mil mulheres de 20 a 24 anos foram internadas nos hospitais do SUS por causa de AVC. Entre os homens da mesma faixa etária, houve 28 mil internações pelo mesmo motivo.

Época. 26 abr. 2010 (adaptado).

Suponha que, nos próximos cinco anos, haja um acréscimo de 8 mil internações de mulheres e que o acréscimo de internações de homens por AVC ocorra na mesma proporção.

De acordo com as informações dadas, o número de homens que seriam internados por AVC, nos próximos cinco anos, corresponderia a

a) 4 mil.
b) 9 mil.
c) 21 mil.
d) 35 mil.
e) 39 mil.

10 - (ENEM MEC/2012) Um pintor dispõe de 35 litros de tinta vermelha e de 30 litros de tinta branca. Ele deseja misturar essas tintas na proporção de 5 litros de tinta vermelha para cada 3 litros de tinta branca para obter um tom de tinta mais claro. Para obter o maior volume possível de tinta misturada, ele deverá utilizar toda a tinta disponível de uma das cores e sobrará uma certa quantidade de tinta da outra cor.

Quantos litros de tinta sobrarão sem serem misturados?
a) 5.
b) 9.
c) 12.
d) 14.
e) 17.

11 - (UEPA/2012) Em todo o estado de São Paulo, no primeiro semestre de 2011, foram registrados 2.241 homicídios. Desses, 241 foram cometidos por uma certa categoria A de cidadãos"

(Fonte: http://g1.globo.com/sao-paulo/noticia/2011/09/decada-5-assassinatos-registrados-na-cidade-de-sp-1-ede-autoria-da-pm.html)

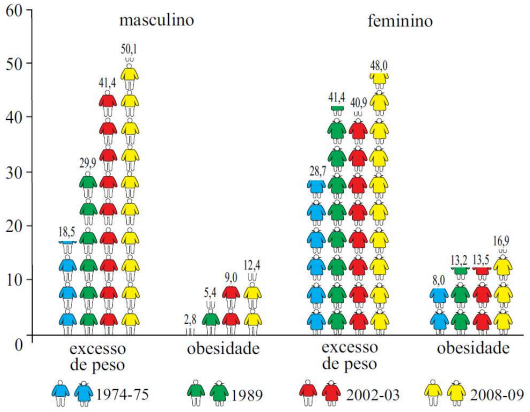
O texto mostra o número de homicídios no primeiro semestre no estado de São Paulo, o que dá uma proporção aproximada de:

a) um assassinato cometido pela categoria A para cada 9,3 cometidos pelas outras categorias.
b) um assassinato cometido pela categoria A para cada 8,3 cometidos pelas outras categorias.
c) um assassinato cometido pela categoria A para cada 7,5 cometidos pelas outras categorias.
d) um assassinato cometido pela categoria A para cada 6,6 cometidos pelas outras categorias.
e) um assassinato cometido pela categoria A para cada 5,3 cometidos pelas outras categorias.

12 - (UFGD MS/2012) O álcool hidratado carburante tem 96% de puro álcool e 4% de água; já o álcool anidro, que é usado como aditivo na gasolina a 22%, tem 99,5% de puro álcool e 0,5% de água. Sabendo que Pinduco abasteceu o carro com gasolina e álcool na proporção de 2:3, conclui-se que o percentual de água na mistura é de exatamente

a) 2,400%
b) 2,444%
c) 2,440%
d) 3,400%
e) 3,440%

13 - (Fac. Santa Marcelina SP/2012) O gráfico publicado na revista Scientific American Brasil de 2011 mostra os números, em porcentagem, da obesidade no Brasil.



Supondo que a taxa percentual de obesidade entre os homens e entre as mulheres aumente, respectivamente, 10% e 12% nos próximos 5 anos em relação ao período 2008-2009, e que a proporção seja mantida, então em cada 60 mil brasileiros (sendo 30 mil homens e 30 mil mulheres), o número aproximado de obesos será

a) 7 200.
b) 9 770.
c) 13 420.
d) 15 270.
e) 19 500.

14 - (UnirG TO/2012) A tabela a seguir apresenta as informações de 2009, divulgadas pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), referentes aos números de alunos matriculados e docentes nos níveis fundamental e médio do município tocantinense de Gurupi.

Gurupi/TO - Número de alunos matriculados e número de docentes das escolas de nível fundamental e médio - 2009

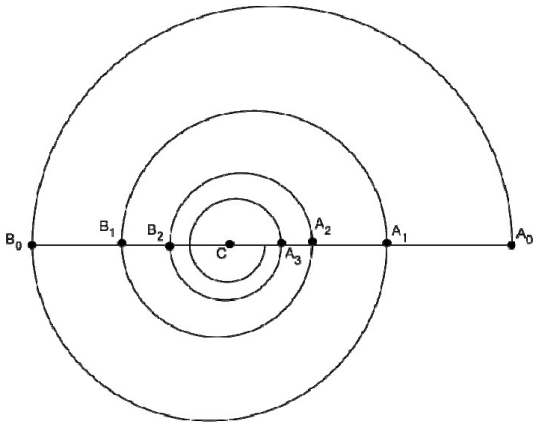
Nível	Número de alunos matriculados	Número de docentes
Ensino Fundamental	12.827	587
Ensino Médio	3.493	156
Total	16.320	743

Fonte: http://www.ibge.gov.br/cidadesat

Com base nas informações apresentadas anteriormente, levando-se em consideração que os docentes só atuam em um único nível, então a proporção de alunos por professores nos níveis fundamental e médio são, respectivamente:
(considere duas casas decimais)

a) 58,70 e 15,60
b) 22,39 e 21,85
c) 21, 85 e 22,39
d) 15,60 e 58,70

15 - (UFPA/2012) Um dos moluscos transmissores da esquistossomose é o *biomphalaria amazonica* paraense. Sua concha tem forma de uma espiral plana, como na figura:



A interseção do diâmetro A0B0 com a concha determina pontos A_0, B_0, A_1, B_1, A_2 ,B_2, etc. A cada meia volta da espiral, a largura do diâmetro do canal da concha reduz na proporção de $\frac{2}{3}$, isto é, $B_0B_1 = \frac{2}{3}A_0A_1$, $A_1A_2 = \frac{2}{3}B_0B_1$, $B_1B_2 = \frac{2}{3}A_1A_2$, $A_2A_3 = \frac{2}{3}B_1B_2$, e assim

sucessivamente. Seja o ponto C o limite da espiral, se A_0B_0 mede 6 mm, a medida de B_0C é, em mm, igual a

a) 6/5
b) 12/5
c) 3
d) 11/5
e) 7/2

16 - (FGV /2012) Acredita-se que na Copa do Mundo de Futebol em 2014, no Brasil, a proporção média de pagantes, nos jogos do Brasil, entre brasileiros e estrangeiros, será de 6 para 4, respectivamente. Nos jogos da Copa em que o Brasil não irá jogar, a proporção média entre brasileiros e estrangeiros esperada é de 7 para 5, respectivamente. Admita que o público médio nos jogos do Brasil seja de 60 mil pagantes, e nos demais jogos de 48 mil. Se ao final da Copa o Brasil tiver participado de 7 jogos, de um total de 64 jogos do torneio, a proporção média de pagantes brasileiros em relação aos estrangeiros no total de jogos da Copa será, respectivamente, de 154 para

a) 126.
b) 121.
c) 118.
d) 112.
e) 109.

17 - (ENEM MEC/2013) Luíza decidiu pintar seus cabelos e os de sua mãe usando as cores B e C em ambas as tinturas. A cor B é a que tinge os cabelos brancos e a cor C dá um tom mais claro durante a exposição à luz.
Luíza sabe que, em cabelos com muitos fios brancos, como os de sua mãe, a proporção entre as cores C e B é de 1 para 3. Para ela, que tem poucos fios brancos, a proporção a ser aplicada é de 3 partes da cor C para 1 parte da cor B. Além disso, como sua mãe tem cabelos curtos, basta a aplicação de 60 gramas de tintura; já para seus longos cabelos, serão necessários 120 gramas.

De acordo com a situação descrita, a quantidade, em gramas, da tintura da cor B que Luíza deve adquirir para pintar os seus cabelos e os de sua mãe é

a) 60.
b) 75.
c) 90.
d) 105.
e) 180.

18 - (ENEM MEC/2013) Para se construir um contrapiso, é comum, na constituição do concreto, se utilizar cimento, areia e brita, na seguinte proporção: 1 parte de cimento, 4 partes de areia e 2 partes de brita. Para construir o contrapiso de uma garagem, uma construtora encomendou um caminhão betoneira com 14 m3 de concreto.

Qual é o volume de cimento, em m3, na carga de concreto trazido pela betoneira?

a) 1,75
b) 2,00
c) 2,33
d) 4,00
e) 8,00

19 - (Udesc SC/2014) Atualmente grande parte dos monitores de TV e de computador são feitos no formato widescreen, onde a medida da largura da tela é maior do que sua altura. A proporção de tela mais usual é de 16 : 9 . Sabendo que a medida em polegadas de um monitor corresponde à medida da diagonal de sua tela, então um monitor de 20 polegadas na proporção 16 : 9 tem área, em polegadas quadradas, de aproximadamente:

a) 144
b) 171
c) 50
d) 400
e) 154

20 - (PUC SP/2014) Dois recipientes, R1 e R2, contêm a mesma quantidade de misturas de álcool e água, nas respectivas proporções: 3 : 5, em R1 e 2 : 3 em R2. Juntando-se em um terceiro recipiente os conteúdos de R1 e R2, a proporção de álcool e água nesta mistura será de:

a)
b)
c)
d)
e)

21 - (ENEM MEC/2016) O setor de recursos humanos de uma empresa pretende fazer contratações para adequar-se ao artigo 93 da Lei n° 8.213/91, que dispõe:

Art. 93. A empresa com 100 (cem) ou mais empregados está obrigada a preencher de 2% (dois por cento) a 5% (cinco por cento) dos seus cargos com beneficiários reabilitados ou pessoas com deficiência, habilitadas, na seguinte proporção:

I. até 200 empregados 2%;
II. de 201 a 500 empregados..... 3%;
III. de 501 a 1 000 empregados..... 4%;
IV. de 1 001 em diante..... 5%.

Disponível em: www.planalto.gov.br.
Acesso em: 3 fev. 2015.

Constatou-se que a empresa possui 1 200 funcionários, dos quais 10 são reabilitados ou com deficiência, habilitados.
Para adequar-se à referida lei, a empresa contratará apenas empregados que atendem ao perfil indicado no artigo 93.

O número mínimo de empregados reabilitados ou com deficiência, habilitados, que deverá ser contratado pela empresa é

a) 74.
b) 70.
c) 64.
d) 60.
e) 53.

22 - (Unioeste PR/2016) O tanque de combustível de um carro está cheio de uma mistura homogênea de etanol e gasolina na proporção de 20% de etanol e 80% de gasolina. O proprietário usa o carro até que a metade do conteúdo do tanque seja consumido. Assim, o conteúdo restante no tanque preserva a porcentagem de etanol a 20% da mistura. O proprietário completa o tanque então com etanol puro e ao fazer isto ele sabe que existem exatamente 27 litros de etanol no tanque. Qual a capacidade total do tanque em litros?

a) 40.
b) 42.
c) 45.
d) 50.
e) 54.

23 - (UFPR/2016) Na seguinte passagem do livro Alice no País das Maravilhas, a personagem Alice diminui de tamanho para entrar pela porta de uma casinha, no País das Maravilhas.

"..chegou de repente a um lugar aberto, com uma casinha de cerca de um metro e vinte centímetros de altura.. e não se aventurou a chegar perto da casa antes de conseguir se reduzir a vinte e dois centímetros de altura".

Carrol, L. Aventuras de Alice no País das Maravilhas.
Rio de Janeiro: Zahar, 2010.

Suponha que, no mundo real e no País das Maravilhas, a proporção entre as alturas de Alice e da casa sejam as mesmas. Sabendo que a altura real de Alice é de 1,30 m, qual seria a altura aproximada da casa no mundo real?

a) 3,5 m.
b) 4,0 m.
c) 5,5 m.
d) 7,0 m.
e) 8,5 m

24 - (UERJ/2017) Um anel contém 15 gramas de ouro 16 quilates. Isso significa que o anel contém 10 g de ouro puro e 5 g de uma liga metálica. Sabe-se que o ouro é considerado 18 quilates se há a proporção de 3 g de ouro puro para 1 g de liga metálica.

Para transformar esse anel de ouro 16 quilates em outro de 18 quilates, é preciso acrescentar a seguinte quantidade, em gramas, de ouro puro:

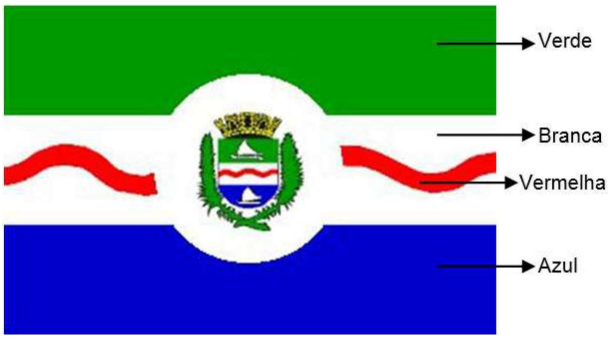
a) 6
b) 5
c) 4
d) 3

25 - (Uncisal AL/2017)

Bandeira de Maceió

A bandeira de Maceió é um dos símbolos oficiais do município de Maceió, capital do estado brasileiro de Alagoas. Foi sancionada em 29 de maio de 1962 pela Lei Municipal nº 868. Consiste em um retângulo de proporção largura-comprimento de 7:10. A bandeira é dividida em três faixas horizontais de igual largura na seguinte sequência, a partir de cima: verde, branco e azul. A faixa branca busca representar a restinga característica da orla de Maceió, com suas areias brancas. A divisa ondulada na cor vermelha simboliza o Riacho Salgadinho, que corta grande parte da cidade e possui um aspecto barrento resultante do transporte de aluviões de suas margens. As faixas nas cores verde e azul aludem ao Oceano Atlântico e à Lagoa Mundaú, respectivamente. No centro há um disco branco contendo o brasão de armas do município.

[..]



Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Bandeira_de_MaceióC3%B3>. Acesso em: 21 nov. 2016 (adaptado).

Considerando estritamente as informações que estão contidas no texto e que o disco branco é sobreposto às faixas, quantos metros quadrados de tecido serão utilizados para a confecção da faixa verde de uma bandeira de Maceió de 6 m de comprimento?

a) 1,40
b) 1,96
c) 4,20
d) 8,40
e) 25,20

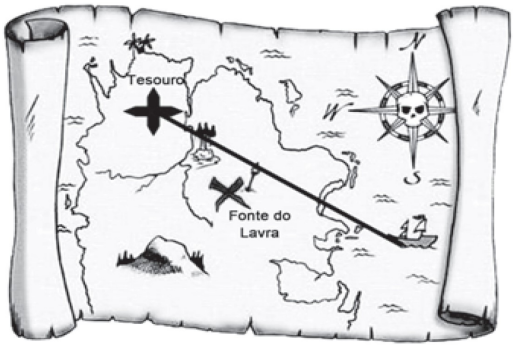
26 - (IFG GO/2018) Em uma fábrica de grande porte, para se produzir 2 toneladas de queijo distribuídas em peças do mesmo peso, utiliza-se 3 mil litros de leite. Considerando a proporção indicada, se cada peça tem 500 gramas, quantos litros de leite são necessários para a fabricação de 32 peças de queijo (considere 1 tonelada = 1000 quilogramas)?

a) 96
b) 64
c) 32

d) 24

27 - (ENEM MEC/2018) Um mapa é a representação reduzida e simplificada de uma localidade. Essa redução, que é feita com o uso de uma escala, mantém a proporção do espaço representado em relação ao espaço real.

Certo mapa tem escala 1 : 58 000 000.



Disponível em: http://oblogdedaynabrigth.blogspot.com.br.
Acesso em: 9 ago. 2012.

Considere que, nesse mapa, o segmento de reta que liga o navio à marca do tesouro meça 7,6 cm.

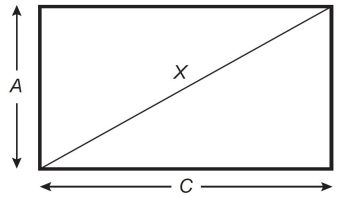
A medida real, em quilômetro, desse segmento de reta é

a) 4 408.
b) 7 632.
c) 44 080.
d) 76 316.
e) 440 800.

28 - (IFPR/2019) Uma empresa de manutenção recomenda que o produto algicida seja misturado na piscina na seguinte proporção: 5 ml de algicida para cada 1.000 litros de água da piscina. Uma piscina tem a forma de um paralelepípedo com as seguintes dimensões: 2,5 metros de largura, 5 metros de largura e 1,2 metros de profundidade. Considerando que essa piscina esteja completamente cheia d'água, a quantidade do produto algicida que deve ser misturado na piscina será de:

a) 50 ml.
b) 65 ml.
c) 75 ml.
d) 85 ml.

29 - (ENEM MEC/2019) A unidade de medida utilizada para anunciar o tamanho das telas de televisores no Brasil é a polegada, que corresponde a 2,54 cm. Diferentemente do que muitos imaginam, dizer que a tela de uma TV tem X polegadas significa que a diagonal do retângulo que representa sua tela mede X polegadas, conforme ilustração.



O administrador de um museu recebeu uma TV convencional de 20 polegadas, que tem como razão do comprimento (C) pela altura (A) a proporção 4 : 3, e precisa calcular o comprimento (C) dessa TV a fim de colocá-la em uma estante para exposição.

A tela dessa TV tem medida do comprimento C, em centímetro, igual a

a) 12,00.
b) 16,00.
c) 30,48.
d) 40,64.
e) 50,80.

30 - (Uncisal AL/2020) Semanalmente, uma loja vende, em média, 140 camisetas nas cores branca e preta. Quando as vendas começaram, para cada 2 camisetas brancas vendidas, vendiam-se 5 camisetas pretas. Para equilibrar os estoques, o gerente da loja propôs que os vendedores tentassem vender mais camisetas brancas e menos camisetas pretas, de modo que a proporção chegasse a 2 camisetas brancas vendidas para cada 3 camisetas pretas vendidas.

Para atingir a proporção proposta pelo gerente, em relação às quantidades inicialmente vendidas, os vendedores deverão vender

a) Mais 16 unidades de camisetas brancas e menos 16 unidades de camisetas pretas.
b) Mais 30 unidades de camisetas brancas e menos 30 unidades de camisetas pretas.
c) Mais 37 unidades de camisetas brancas e menos 37 unidades de camisetas pretas.
d) Mais 20 unidades de camisetas brancas e menos 28 unidades de camisetas pretas.
e) Mais 28 unidades de camisetas brancas e menos 20 unidades de camisetas pretas.

31 - (FPS PE/2020) Um técnico de laboratório compôs uma mistura de dois produtos químicos, X e Y. Inicialmente, ele obteve 6,0 kg da mistura, consistindo em 1/4 de X e o restante de Y. Ele percebeu que usou a proporção errada e, ao invés de desperdiçar os produtos químicos já usados, decidiu adicionar um pouco mais de X, para que a nova mistura consista em 40% de X e 60% de Y. Que massa de X ele deve adicionar à primeira mistura?

a) 3,0 kg
b) 1,5 kg
c) 2,0 kg
d) 1,0 kg

e) 2,5 kg

32 - (ENEM MEC/2021) Uma loja que vende tintas tem uma máquina que efetua misturas de variadas cores para obter diferentes tonalidades. Um cliente havia comprado 7 litros de tinta de uma tonalidade, proveniente da mistura das cores verde e branco, na proporção de 5 para 2, respectivamente. Tendo sido insuficiente a quantidade de tinta comprada, o cliente retorna à loja para comprar mais 3,5 litros da mesma mistura de tintas, com a mesma tonalidade que havia comprado anteriormente.

A quantidade de tinta verde, em litro, que o funcionário dessa loja deverá empregar na mistura com a tinta branca para conseguir a mesma tonalidade obtida na primeira compra é

a) 1,4.
b) 1,5.
c) 1,7.
d) 2,3.
e) 2,5.

33 - (Fac. Cesgranrio RJ/2021) Em uma fazenda do Mato Grosso são produzidas, em média, 2.200 toneladas de soja em uma área de 1.000 hectares.

Mantendo-se a mesma proporção, qual será a produção média de soja de outra fazenda, que dispõe de 800 hectares plantados?

a) 1.600
b) 1.660
c) 1.760
d) 1.800
e) 1.980

34 - (Famerp SP/2021) Para fazer uma receita culinária são utilizados apenas os ingredientes A e B. Cada 100 g do ingrediente A custa R$ 4,00 e cada 100 g do ingrediente B custa R$ 8,00. Usando a proporção correta dos ingredientes, um cozinheiro utilizou um total de 1 kg de ingredientes para fazer essa receita, ao custo de R$ 56,00. A porcentagem do ingrediente B nessa receita é de

a) 45%.
b) 32%.
c) 40%.
d) 50%.
e) 66%.

35 - (ENEM MEC/2022) O pacote básico de um jogo para smartphone, que é vendido a R$ 50,00, contém 2.000 gemas e 100 000 moedas de ouro, que são itens utilizáveis nesse jogo.
A empresa que comercializa esse jogo decidiu criar um pacote especial que será vendido a R$ 100,00 e que se diferenciará do pacote básico por apresentar maiores quantidades de gemas e moedas de ouro. Para estimular as vendas desse novo pacote,

a empresa decidiu inserir nele 6.000 gemas a mais, em relação ao que o cliente teria caso optasse por comprar, com a mesma quantia, dois pacotes básicos.

A quantidade de moedas de ouro que a empresa deverá inserir ao pacote especial, para que seja mantida a mesma proporção existente entre as quantidades de gemas e de moedas de ouro contidas no pacote básico, é

a) 50 000.
b) 100 000.
c) 200 000.
d) 300 000.
e) 400 000.

36 - (Uncisal AL/2020) A evasão escolar é um fenômeno que preocupa os gestores das políticas públicas de educação. No caso da educação superior, o problema é mundial. Em determinada turma de um curso, a razão entre a quantidade de estudantes ingressantes e a quantidade de estudantes concluintes é de 8 para 3, nessa ordem.

Considerando-se que, na referida turma, 90 estudantes tenham se formado, então a quantidade de estudantes ingressantes nessa turma foi igual a

a) 114.
b) 240.
c) 270.
d) 450.
e) 720.

Regra de Três Simples e Composta

Antes de iniciarmos o estudo das regras de três simples e composta é importante termos o conhecimento das grandezas diretamente e inversamente proporcionais.

Grandezas Diretamente e Inversamente Proporcionais

Grandezas Diretamente Proporcionais

Duas grandezas são consideradas diretamente proporcionais quando a razão entre uma medida, representada por y, e a medida correspondente da outra grandeza, representada por x (onde $x \neq 0$), for constante e diferente de zero. Matematicamente, isso é expresso como $\frac{y}{x} = k$, onde k é uma constante não nula.

Atenção!

A razão entre os valores de x e seus respectivos correspondentes y é constante e igual a $\frac{1}{k}$.

Exemplo 1: Uma loja de roupas vende camisas por $R\$\,60,00$ a unidade. Se considerarmos x como a quantidade de camisas vendidas por essa loja e y o valor recebido pela venda, observamos que:

Para $x = 1$, temos $y = 60$.
Para $x = 2$, temos $y = 120$.
Para $x = 3$, temos $y = 180$.
..
Para $x = n$, temos $y = 60n$.

Calculando a razão entre os valores de y e seu x correspondente, percebemos que o resultado será constante e diferente de zero:

$$\frac{y}{x} = \frac{60}{1} = 60$$
$$\frac{y}{x} = \frac{120}{2} = 60$$
$$\frac{y}{x} = \frac{180}{3} = 60$$
..
$$\frac{y}{x} = \frac{60}{n} = 60$$

Quando o valor de x duplica, y também duplica. Se o valor de x triplica, y triplica também. Isso quer dizer que, à medida que o valor de x aumenta, o valor de y também aumenta, na mesma proporção.

Logo, x e y representam grandezas diretamente proporcionais.

Exemplo 2: Dois amigos, João e Caio, resolveram abrir uma barbearia. João investiu 20.000 reais no negócio enquanto Caio investiu 80.000 reais. Sabendo que, após 1 ano, a barbearia deu um lucro de 50.000 reais e que esse lucro foi dividido entre os amigos de maneira diretamente proporcional ao valor investido por cada um, quais os valores recebidos por João e Caio?

Valor recebido por João $= J$
Valor recebido por Caio $= C$

$$J + C = 50000.$$

Como o lucro recebido por cada um dos amigos é diretamente proporcional ao valor investido, então:

$$\frac{J}{20000} = \frac{C}{80000} = k$$

Desse modo:

$$J = 20000k.$$
$$C = 80000k.$$

Se, $J + C = 50000$

$$20000k + 80000k = 50000$$
$$100000k = 50000$$
$$k = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

Portanto:

$$J = 20000 \cdot 0{,}5 = 10000.$$
$$C = 80000 \cdot 0{,}5 = 40000.$$

João recebeu 10.000 reais e Caio recebeu 40.000 reais.

Grandezas Inversamente Proporcionais

Duas grandezas são consideradas inversamente proporcionais quando o produto da medida de uma delas, representada por y, e a medida correspondente da outra grandeza, representada por x, é constante e diferente de zero. Em termos matemáticos, isso é expresso como $y \cdot x = k$, sendo k uma constante diferente de zero.

Atenção!

Para x e y inversamente proporcionais, y é diretamente proporcional ao inverso de x, isto é, $\frac{y}{\frac{1}{x}} = k$.

Exemplo 1: Sabendo que a distância entre as cidades de Imperatriz - MA e Açailândia - MA é de 68 km, o tempo (em horas) para que um carro percorra essa distância dependerá de sua velocidade (km/h). Considerando a velocidade como x e o tempo como y, observamos que:

Para $x = 10$, temos $y = 6{,}8$.
Para $x = 20$, temos $y = 3{,}4$.
Para $x = 40$, temos $y = 1{,}7$.
..
Para $x = v$, temos $y = \frac{68}{v}$.

Multiplicando os valores de y e seu x correspondente, percebemos que o resultado será constante e diferente de zero:

$$y \cdot x = 6{,}8 \cdot 10 = 68$$
$$y \cdot x = 3{,}4 \cdot 20 = 68$$
$$y \cdot x = 1{,}7 \cdot 40 = 68$$
$$\dots$$
$$y \cdot x = \frac{68}{v} \cdot v = 68$$

Quando o valor de x duplica, o valor de y reduz à metade. Se o valor de x quadruplica, y reduz à quarta parte. Isso quer dizer que, à medida que o valor de x aumenta, o valor de y diminui, na mesma proporção.

Logo, x e y representam grandezas inversamente proporcionais.

Exemplo 2: Caso trabalhe 6 horas por dia, um pedreiro levará 20 dias para concluir uma obra. Desejando terminar o quanto antes, ele resolve trabalhar por 8 horas todos os dias. Sabendo que o seu ritmo de trabalho permanecerá o mesmo, em quantos dias esse pedreiro conseguirá concluir a obra?

Se o pedreiro aumentar o número de horas trabalhadas por dia, ele precisará de menos dias para concluir a obra. Desse modo, percebemos que se trata de um caso de grandezas inversamente proporcionais. Assim, $y \,.\, x = k$

Considerando H para o número de horas trabalhadas por dia e D para o número de dias, temos:
Para $H = 6$, então $D = 20$
Para $H = 8$, então $D = d$

Então, $6 \cdot 20 = k$ e $8 \cdot d = k$

Logo $6 \cdot 20 = 8 \cdot d$
$d = 15.$

O pedreiro levará 15 dias para concluir a obra.

Regra de Três Simples

A regra de três simples é empregada para determinar valores desconhecidos em problemas que envolvem a relação entre grandezas diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais.

Exemplo 1: Fernanda foi ao mercado comprar amoras para decorar seu bolo de aniversário. Chegando lá, viu que o quilo da fruta custava $R\$\,100,00$. Disposta a gastar apenas $R\$\,27,00$ com a compra, quantos gramas de amora Fernanda conseguiu comprar?

Quantidade de amoras (g)	Preço a pagar ($R\$$)
1000	100
x	27

Quanto menos dinheiro Fernanda quiser gastar com a compra, menos amoras ela vai conseguir comprar. Portanto, percebemos que essas grandezas são diretamente proporcionais.

Assim, escrevemos a seguinte proporção:

$$\frac{1000}{x} = \frac{100}{27}$$

$$100x = 27000$$

$x = 270$ gramas de amora.

Portanto, Fernanda conseguiu comprar 270 gramas de amora.

Exemplo 2: Animado com o início de suas férias, Paulo decide viajar de moto de Imperatriz - MA a Pedreiras - MA para visitar seus pais. A uma velocidade média de $78\ km/h$, Paulo gastou 6 horas para chegar em Pedreiras. Quantas horas Paulo gastaria caso fizesse o percurso a uma velocidade média de 90 km/h?

Velocidade média (km/h)	Tempo (h)
78	6
90	x

Quanto maior for a velocidade de Paulo, mais rápido ele chegará a Pedreiras - MA. Logo, percebemos que essas grandezas são inversamente proporcionais.

Desse modo, escrevemos a seguinte proporção:

$$\frac{78}{90} = \frac{\frac{1}{6}}{x}$$

$$\frac{78}{90} = \frac{x}{6}$$

$$90x = 78 \,.\, 6$$

$x = 5{,}2$ horas.

Paulo gastaria $5{,}2$ horas para fazer o percurso com uma velocidade média de $90\ km/h$.

Regra de Três Composta

A regra de três composta é uma ferramenta utilizada para encontrar valores desconhecidos em situações que envolvem a relação entre três ou mais grandezas, sejam elas diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais.

Exemplo 1: Uma gráfica, com 6 impressoras, tem a capacidade de imprimir 12000 panfletos em 4 horas. Supondo que uma das impressoras pare de funcionar, de quantas horas essa gráfica precisará para imprimir 50000 panfletos?

Quantidade de impressoras	Número de panfletos	Tempo para impressão (h)
6	12000	4
5	50000	x

Para resolver esse problema, primeiro fixamos uma grandeza e analisamos a relação de proporcionalidade entre as outras duas.

Fixando a quantidade e analisando o número de panfletos e o tempo para a impressão, percebemos que quanto mais panfletos, mais tempo a gráfica precisará para imprimir

tudo. Desse modo, número de panfletos e tempo são grandezas diretamente proporcionais.

Em seguida, realizamos o processo novamente, porém fixando agora o número de panfletos. Assim, observamos que quanto maior for o número de impressoras funcionando, menor será o tempo necessário para concluir as impressões. Logo, quantidade de impressoras e tempo são grandezas inversamente proporcionais.

Concluímos, portanto, que o tempo é diretamente proporcional ao número de panfletos e inversamente proporcional à quantidade de impressoras.

Assim, escrevemos a seguinte proporção:

$$\frac{4}{x} = \frac{12000}{50000} \cdot \frac{1}{\frac{6}{5}}$$

$$\frac{4}{x} = \frac{12000}{50000} \cdot \frac{5}{6}$$

$$x = \frac{4 \,.\, 50000 \,.\, 6}{12000 \,.\, 5}$$

$x = 20$ horas.

Logo, para imprimir os panfletos, a gráfica precisará de 20 horas.

Exemplo 2: Um acampamento de férias realiza, todos os anos, atividades com crianças de 8 a 12 anos por um período de 10 dias. Sabendo que 20 crianças foram inscritas para a programação de férias do acampamento, o responsável pelo local comprou apenas a quantidade de comida necessária para alimentar as 20 crianças durante os 10 dias de permanência no acampamento. Após 4 dias do início das atividades, esse responsável foi surpreendido com a inscrição de mais 6 crianças. Considerando que nenhuma comida adicional foi comprada e que a quantidade de comida/criança não sofrerá alteração, por quantos dias este acampamento conseguirá alimentar todas as crianças?

Número de crianças	Quantidade de comida	Tempo (dias)
20	$20 \,.\, 10 \,.\, y$	10
26	$20 \,.\, 6 \,.\, y$	x

O exemplo não trouxe a quantidade de comida comprada pelo acampamento. No entanto, podemos calcular o valor em função de uma incógnita (y). Assim, a quantidade de comida do acampamento, no primeiro dia, é igual ao número de crianças vezes a quantidade de comida consumida por cada criança por dia vezes o número de dias. Ou seja, a quantidade de comida é igual a $20 \cdot y \cdot 10$.

Após o quarto dia, terá sido consumida a comida destinada a 4 dias, logo a quantidade de comida existente no acampamento à chegada das 6 crianças é igual a $20 \cdot y \cdot 6$.

A seguir, agora que já temos todos os dados necessários, repetimos o processo explicado no exemplo anterior.

Fixando o número de crianças, observamos que quanto maior a quantidade de comida, mais tempo ela durará. Portanto, quantidade de comida e tempo são grandezas diretamente proporcionais.

Fixando a quantidade de comida, percebemos que, para uma mesma quantidade de comida, quanto mais crianças existirem, menos dias essa comida durará. Logo, número de crianças e tempo são grandezas inversamente proporcionais.

Desse modo, escrevemos a seguinte proporção:

$$\frac{10}{x} = \frac{20 .y .10}{20 .y .6} \cdot \frac{1}{\frac{20}{26}}$$

$$\frac{10}{x} = \frac{20 .y .10}{20 .y .6} \cdot \frac{26}{20}$$

$$260x = 1200$$

$$x = 4{,}61 \text{ dias.}$$

Logo, o acampamento conseguirá alimentar todas as crianças por mais 4 dias.

Exercícios

01 - (UFMT/2008) Denomina-se carro flex aquele que pode ser abastecido com mais de um tipo de combustível diferente ou ainda com uma mistura de combustíveis. Suponha que um desses carros, abastecido com uma mistura de álcool e gasolina, na proporção de 1 para 3, faça, na estrada, 12 km/L. Se a proporção for de 1 para 4 e levando-se em conta que o rendimento é inversamente proporcional à quantidade de álcool na mistura, o rendimento desse mesmo carro, na estrada, será:

a) 15 km/L
b) 14 km/L
c) 9,6 km/L
d) 10,8 km/L
e) 11 km/L

02 - (IFMT/2019) Dois irmãos, Marcos e Mauro, resolvem viajar de carro para se reunirem com a família em Diamantino-MT. Marcos partiu de Alta Floresta, percorrendo 689 quilômetros com um carro que tem consumo médio de 13 quilômetros por litro. Enquanto que Mauro partiu de Barra do Garças, percorrendo 694 quilômetros com um carro que tem consumo médio de 13,5 quilômetros por litro. Sabendo que ambos os carros têm capacidade para 55 litros de combustível no tanque, a quantidade de litros de combustível que restaram nos tanques dos carros de Marcos e Mauro, respectivamente, foi aproximadamente de?

a) 2 litros e 3,6 litros
b) 2 litros e 4 litros
c) 2 litros e 3 litros
d) 2,5 litros e 2,75 litros
e) 2 litros e 2,6 litros

03 - (ENEM MEC/2019) Um pintor cobra R$ 240,00 por dia de trabalho, que equivale a 8 horas de trabalho num dia. Quando é chamado para um serviço, esse pintor trabalha 8 horas por dia com exceção, talvez, do seu último dia nesse serviço. Nesse último dia, caso trabalhe até 4 horas, ele cobra metade do valor de um dia de trabalho. Caso trabalhe mais de 4 horas, cobra o valor correspondente a um dia de trabalho. Esse

pintor gasta 8 horas para pintar uma vez uma área de 40 m2. Um cliente deseja pintar as paredes de sua casa, com uma área total de 260 m2. Ele quer que essa área seja pintada o maior número possível de vezes para que a qualidade da pintura seja a melhor possível. O orçamento desse cliente para a pintura é de R$ 4 600,00.

Quantas vezes, no máximo, as paredes da casa poderão ser pintadas com o orçamento do cliente?

a) 1
b) 2
c) 3
d) 5
e) 6

04 - (IFBA/2018) A empresa de bebidas "Beba Mais" possui uma máquina de refrigerantes que, quando opera por 4 horas diárias, consegue engarrafar 9600 litros, num período de 6 dias. Determine em quantas horas diárias esta mesma máquina engarrafará 24000 litros, num período de 20 dias, considerando que a máquina tem um mesmo ritmo padrão durante estes serviços.

a) 3
b) 4
c) 6
d) 2
e) 5

05 - (ENEM MEC/2019) Três sócios resolveram fundar uma fábrica. O investimento inicial foi de R$ 1 000 000,00. E, independentemente do valor que cada um investiu nesse primeiro momento, resolveram considerar que cada um deles contribuiu com um terço do investimento inicial.
Algum tempo depois, um quarto sócio entrou para a sociedade, e os quatro, juntos, investiram mais R$ 800 000,00 na fábrica. Cada um deles contribuiu com um quarto desse valor. Quando venderam a fábrica, nenhum outro investimento havia sido feito. Os sócios decidiram então dividir o montante de R$ 1 800 000,00 obtido com a venda, de modo proporcional à quantia total investida por cada sócio.

Quais os valores mais próximos, em porcentagens, correspondentes às parcelas financeiras que cada um dos três sócios iniciais e o quarto sócio, respectivamente, receberam?

a) 29,60 e 11,11.
b) 28,70 e 13,89.
c) 25,00 e 25,00.
d) 18,52 e 11,11.
e) 12,96 e 13,89.

06 - (UFT TO/2019) Uma secretária acadêmica tem a função de digitar documentos. Em média, com 6 horas de trabalho, ela consegue digitar 18 folhas de 50 linhas por página. Se ela mudar o regime de trabalho para 8 horas por dia e mantiver o mesmo ritmo de

trabalho, quantas folhas ela conseguirá digitar, considerando-se cada página com 40 linhas?

a) 15
b) 19
c) 26
d) 30

07 - (IFSC/2019) **Uma máquina consegue fabricar 5.625 kg de gelo, trabalhando 9 horas por dia, durante 5 dias. Considerando um ritmo de produção constante, quantas horas essa máquina deverá trabalhar por dia para fabricar 5.000 kg de gelo, em 4 dias?**

a) 12 horas por dia
b) 8 horas por dia
c) 10 horas por dia
d) 7 horas por dia
e) 13 horas por dia

08 - (IFAL/2019) **Para produzir 200 peças em 4 dias são necessárias 8 máquinas trabalhando 15 horas por dia. Tendo-se uma encomenda de 2300 peças para serem entregues em um mês, o serviço inicia com 12 máquinas trabalhando 20 horas por dia; porém, depois de 16 dias de trabalho, 2 máquinas quebram. Quantas horas por dia as máquinas que sobraram devem trabalhar para cumprir a encomenda no prazo previsto?**

a) 12
b) 14
c) 16
d) 18
e) 20

09 - (IFSC/2019) **Quatro pedreiros, trabalhando 8 horas por dia, constroem 15m de muro em 5 dias. Sabendo-se que todos os pedreiros trabalham no mesmo ritmo e que dois pedreiros adoeceram e se ausentaram do trabalho, quantos dias serão necessários para construir 18m de muro, trabalhando-se 6 horas por dia:**
a) 16 dias
b) 15 dias
c) 14 dias
d) 13 dias
e) 12 dias

10 - (IFSC/2019) **Em uma lanchonete, atualmente, 2 trabalhadores preparam 10 sanduíches em 5 minutos. Os responsáveis pela empresa perceberam que em certos horários é necessário preparar 12 sanduíches em 3 minutos. Considerando que os responsáveis busquem contratar trabalhadores que exerçam o trabalho no mesmo ritmo que os demais, para suprir a demanda nesses horários, é necessário contratar mais:**

Assinale a alternativa CORRETA.

a) 1 trabalhador
b) 6 trabalhadores
c) 2 trabalhadores
d) 4 trabalhadores
e) 5 trabalhadores

11 - (Fatec SP/2019) Um grupo de alunos do curso de Jogos Digitais da FATEC inicia a produção de um jogo. Após 6 horas de trabalho, verificam que conseguiram finalizar apenas 24% do jogo. Para poder concluir o restante dele, esse grupo de estudantes pede ajuda a alguns amigos, conseguindo duplicar o tamanho da equipe.

Assinale a alternativa que apresenta o tempo total de produção do jogo.

a) 9 h 30 min
b) 9 h 50 min
c) 12 h 30 min
d) 15 h 30 min
e) 15 h 50 min

12 - (IFPI/2020) Uma mãe resolveu distribuir R$ 8400,00 entre seus filhos, André, Bruno e Conceição, cujas idades são 12 anos, 14 anos e 16 anos, respectivamente. Sabe-se que essa divisão será diretamente proporcionalmente às idades de cada um. Quantos reais recebeu Bruno?

a) R$ 2400,00
b) R$ 2800,00
c) R$ 3200,00
d) R$ 3600,00
e) R$ 3800,00

13 - (IFSP/2020) Uma escola lançou uma campanha para seus alunos arrecadarem, durante 30 dias, alimentos não perecíveis para doar a uma comunidade carente da região. Trinta alunos aceitaram a tarefa e nos primeiros 10 dias trabalharam 4 horas diárias, arrecadando 150 kg de alimentos por dia. Animados com os resultados, 20 novos alunos somaram-se ao grupo, e passaram a trabalhar, todos, 5 horas por dia nos dias seguintes até o término da campanha. Admitindo-se que o ritmo de coleta tenha se mantido constante, qual seria a quantidade de alimentos arrecadados ao final do prazo estipulado?

a) 5750
b) 6250
c) 7750
d) 8250
e) 10000

14 - (IFPI/2020) Trabalhando 6 horas por dia, os 200 operários de uma indústria de bicicletas, com a mesma capacidade de trabalho, produzem 500 bicicletas em 20 dias. Quantos dias serão necessários para que 120 desses operários produzam 300 bicicletas, trabalhando 8 horas por dia?

a) 12 dias
b) 15 dias
c) 22 dias
d) 26 dias
e) 30 dias

15 - (IFPI/2020) Para a gincana de uma escola, uma equipe de 12 alunos fez certo número de cartazes em 9 horas. Em quantas horas uma equipe de 18 alunos, trabalhando no mesmo ritmo, faria a mesma quantidade de cartazes?

a) 12 horas
b) 10 horas
c) 8 horas
d) 7 horas
e) 6 horas

16 - (IFPI/2020) Um campo de futebol de 5000 m2 teve sua grama podada por 5 homens que trabalharam 8 horas por dia durante 4 dias. Quantos homens com a mesma capacidade de trabalho seriam necessários para podar a grama de um campo de 6000 m2, trabalhando 6 horas por dia em 2 dias?

a) 3 homens
b) 6 homens
c) 10 homens
d) 16 homens
e) 18 homens

17 - (Cefet MG/2020) Paula produziu 3000 bombons, trabalhando de segunda a sábado durante 6 horas em cada um desses dias. Dias depois, ela recebeu uma nova encomenda urgente de 4000 bombons gourmet, dos mesmos produzidos anteriormente, para entregá-los em, no máximo, três dias de trabalho. Diante dessa nova encomenda, Paula chamou duas ajudantes doceiras com o seu mesmo rendimento nesse trabalho de produzir seus bombons. As três se dispuseram a trabalhar oito horas por dia para entregar a encomenda.

Nessas condições, calculando o número de dias gastos para concluir a encomenda, pode-se afirmar, corretamente, que as três

a) Produzirão os 4000 bombons com dois dias de trabalho.
b) Produzirão os 4000 bombons com três dias de trabalho.
c) Não entregarão a encomenda, pois necessitam de quatro dias de trabalho para a produção dos 4000 bombons.
d) Não entregarão a encomenda, pois necessitam de cinco dias de trabalho para a produção dos 4000 bombons.

18 - (ENEM MEC/2020) Um banho propicia ao indivíduo um momento de conforto e reenergização. Porém, o desperdício de água gera prejuízo para todos.

Considere que cada uma das cinco pessoas de uma família toma dois banhos por dia, de 15 minutos cada. Sabe-se que a cada hora de banho são gastos aproximadamente 540 litros de água. Considerando que um mês tem 30 dias, podemos perceber que o consumo de água é bem significativo.

A quantidade total de litros de água consumida, nos banhos dessa família, durante um mês, é mais próxima de

a) 1 350.
b) 2 700.
c) 20 250.
d) 20 520.
e) 40 500.

19 - (ENEM MEC/2020) Um agricultor sabe que a colheita da safra de soja será concluída em 120 dias caso utilize, durante 10 horas por dia, 20 máquinas de um modelo antigo, que colhem 2 hectares por hora. Com o objetivo de diminuir o tempo de colheita, esse agricultor optou por utilizar máquinas de um novo modelo, que operam 12 horas por dia e colhem 4 hectares por hora.

Quantas máquinas do novo modelo ele necessita adquirir para que consiga efetuar a colheita da safra em 100 dias?

a) 7
b) 10
c) 15
d) 40
e) 58

20 - (ENEM MEC/2020) Um motociclista planeja realizar uma viagem cujo destino fica a 500 km de sua casa. Sua moto consome 5 litros de gasolina para cada 100 km rodados, e o tanque da moto tem capacidade para 22 litros. Pelo mapa, observou que no trajeto da viagem o último posto disponível para reabastecimento, chamado Estrela, fica a 80 km do seu destino. Ele pretende partir com o tanque da moto cheio e planeja fazer somente duas paradas para reabastecimento, uma na ida e outra na volta, ambas no posto Estrela. No reabastecimento para a viagem de ida, deve considerar também combustível suficiente para se deslocar por 200 km no seu destino.

A quantidade mínima de combustível, em litro, que esse motociclista deve reabastecer no posto Estrela na viagem de ida, que seja suficiente para fazer o segundo reabastecimento, é

a) 13.
b) 14.
c) 17.
d) 18.
e) 21.

21 - (Uncisal AL/2020) Uma mãe recebeu de um médico a orientação de que seu filho deve ingerir 750 mg de paracetamol a cada 8 horas. Em uma farmácia, ela comprou o

medicamento em comprimidos, em cuja embalagem constavam as seguintes especificações:

I. Cada comprimido contém 750 mg;
II. Cada grama desse medicamento contém 250 mg de paracetamol.

Para cumprir a orientação médica, quantos comprimidos a mãe deverá administrar, a cada 8 horas, ao filho?

a) 1
b) 3
c) 4
d) 5
e) 8

22 - (Uncisal AL/2020) Após percorrer uma distância de 400 km em seu automóvel, João constatou que, nesse percurso, o consumo de gasolina foi de 25 L. Considerando isso, João planejou realizar uma nova viagem no mesmo automóvel, na qual percorrerá 640 km de um trecho em que o combustível é vendido ao preço fixo de R$ 3,50.

Para realizar a viagem planejada, João gastará, em combustível,

a) Menos de R$ 86,00.
b) Mais de R$ 86,00 e menos de R$ 113,00.
c) Mais de R$ 113,00 e menos de R$ 139,00.
d) Mais de R$ 139,00 e menos de R$ 180,00.
e) Mais de R$ 180,00.

23 - (IFSC/2020) Na secretaria acadêmica de um campus do IFSC, no dia da matrícula dos alunos, 3 (três) colaboradores atenderam 80 (oitenta) alunos em 4 (quatro) horas. Se houvessem 4 (quatro) colaboradores atendendo os alunos no mesmo ritmo, quantas horas eles levariam para atender 160 (cento e sessenta) alunos?

Assinale a alternativa CORRETA.

a) 3 (três) horas
b) 5 (cinco) horas
c) 6 (seis) horas
d) 8 (oito) horas
e) 9 (nove) horas

24 - (IFPR/2020) Um determinado veículo, locomovendo-se 4 horas diariamente, percorre 2880 km, em 6 dias. A quantidade de horas que esse mesmo veículo deverá se locomover por dia, para percorrer 8400 km em 10 dias, é igual a:

a) 6
b) 7
c) 8
d) 9

25 - (IFPR/2020) Em uma empreiteira, a equipe de 10 pessoas leva 16 dias para executar uma determinada tarefa, trabalhando 8 h por dia. Devido a uma situação

temporária, houve um corte de 20% no quadro pessoal. Nessas condições, a mesma tarefa será executada em:

a) 7,5 dias
b) 20 dias
c) 30 dias
d) 75 dias

26 - (FPS PE/2020) Um médico receitou um gotejamento de lidocaína para um paciente. O paciente deve receber 2 mg de lidocaína por minuto, por via intravenosa. Estão disponíveis 2 gramas de lidocaína que deve ser diluída em 500 ml de soro fisiológico. A mistura deve ser administrada por um aparelho de microgotejamento, que divide cada ml de solução em 60 gotas. O aparelho deve ser ajustado para administrar quantas gotas por minuto ao paciente? Admita que a diluição da lidocaína em soro fisiológico não altera o volume de soro.

a) 28
b) 30
c) 29
d) 27
e) 31

27 - (Unioeste PR/2020) Quatro países vizinhos possuem cada um sua moeda oficial. Estas quatro moedas são o real, o peso, a coroa e a libra. Os habitantes destes quatro países usam livremente as quatro moedas de acordo com a seguinte taxa de conversão: 2 reais equivalem a 5 pesos; 3 pesos equivalem a 4 coroas; 5 coroas equivalem a 6 libras. Quantas libras equivalem a 2 reais?

a) 24 libras.
b) 12 libras.
c) 10 libras.
d) 8 libras.
e) 4 libras.

28 - (UFPR/2020) No ano de 2018, a densidade populacional da cidade de Curitiba foi estimada em 4.406,96 habitantes por quilômetro quadrado. Supondo que a área territorial da cidade seja de 435 km2, o número que mais se aproxima da população estimada de Curitiba em 2018 é:

a) 1.916.610.
b) 1.916.760.
c) 1.917.027.
d) 1.917.045.
e) 1.917.230.

29 - (ENEM MEC/2021) Para um evento que acontecerá no centro de uma cidade, há a opção de três estacionamentos, que cobram da seguinte maneira:

Estacionamento X	Estacionamento Y	Estacionamento Z
R$ 4,00 pela 1ª hora ou fração de hora	R$ 3,70 por hora ou fração de hora	R$ 5,00 pela 1ª hora ou fração de hora
R$ 2,50 por cada hora subsequente ou fração de hora		R$ 2,00 por cada hora subsequente ou fração de hora

Duas pessoas que participarão do evento precisam estacionar seus carros, uma delas pelo período de 1 hora e 50 minutos e a outra pelo período de 4 horas, pretendendo cada uma pagar o menor preço total pelo uso do estacionamento.

Essas pessoas deverão optar, respectivamente, pelos estacionamentos

a) X e Z.
b) Y e Y.
c) Y e Z.
d) Z e X.
e) Z e Z.

30 - (ENEM MEC/2021) No rótulo de uma lata com 350 mL de um refrigerante, é possível descobrir que o valor energético é de 85 kcal (quilocalorias) a cada 200 mL de refrigerante. Por recomendação de um nutricionista, um paciente que consumia em sua dieta 2 800 kcal por dia mudou o hábito de consumir o conteúdo de 2 latas desse refrigerante por dia para consumir 2 latas de suco, cujo rótulo indicava um valor energético de 25 kcal por lata.

Em relação à sua dieta original, o consumo energético diário do paciente diminuiu, em porcentagem, o valor mais próximo de

a) 2,1
b) 4,2
c) 4,4
d) 8,8
e) 10,6

31 - (ENEM MEC/2021) Um nutricionista verificou, na dieta diária do seu cliente, a falta de 800 mg do mineral A, de 1 000 mg do mineral 8 e de 1 200 mg do mineral C. Por isso, recomendou a compra de suplementos alimentares que forneçam os minerais faltantes e informou que não haveria problema se consumisse mais desses minerais do que o recomendado.
O cliente encontrou cinco suplementos, vendidos em sachês unitários, cujos preços e as quantidades dos minerais estão apresentados a seguir:

• Suplemento I: contém 50 mg do mineral A, 100 mg do mineral B e 200 mg do mineral C e custa R$ 2,00;
• Suplemento II: contém 800 mg do mineral A, 250 mg do mineral B e 200 mg do mineral C e custa R$ 3,00;
• Suplemento III: contém 250 mg do mineral A, 1 000 mg do mineral B e 300 mg do mineral C e custa R$ 5,00;

• Suplemento IV: contém 600 mg do mineral A, 500 mg do mineral B e 1 000 mg do mineral C e custa R$ 6,00;
• Suplemento V: contém 400 mg do mineral A, 800 mg do mineral B e 1 200 mg do mineral C e custa R$ 8,00.

O cliente decidiu comprar sachês de um único suplemento no qual gastasse menos dinheiro e ainda suprisse a falta de minerais indicada pelo nutricionista, mesmo que consumisse alguns deles além de sua necessidade.

Nessas condições, o cliente deverá comprar sachês do suplemento

a) I
b) II
c) III
d) IV
e) V

32 - (UEG GO/2016) Com a alta da inflação e para não repassar aos clientes o aumento dos gastos na produção de suco de laranja, um empresário decidiu que no próximo mês 10% do volume desse suco será composto por água, volume que atualmente é de apenas 4%. Se hoje são consumidos 10.000 litros de água no volume de suco de laranja produzido, mantendo-se a mesma quantidade produzida, no próximo mês a quantidade de água consumida no volume desse suco será de

a) 10.000 litros
b) 12.500 litros
c) 16.000 litros
d) 25.000 litros

33 - (ENEM MEC/2020) A fim de reforçar o orçamento familiar, uma dona de casa começou a produzir doces para revender. Cada receita é composta de $\frac{4}{5}$ de quilograma de amendoim e $\frac{1}{5}$ de quilograma de açúcar.
O quilograma de amendoim custa R$ 10,00 e o do açúcar, R$ 2,00. Porém, o açúcar teve um aumento e o quilograma passou a custar R$ 2,20. Para manter o mesmo custo com a produção de uma receita, essa dona de casa terá que negociar um desconto com o fornecedor de amendoim.

Nas condições estabelecidas, o novo valor do quilograma de amendoim deverá ser igual a

a) R$ 9,20.
b) R$ 9,75.
c) R$ 9,80.
d) R$ 9,84.
e) R$ 9,95.

34 - (IFBA/2019) Um grupo de 80 motoqueiros viaja por 60 dias e suas motos totalizaram um consumo de 10000 Se este mesmo grupo tivesse sido composto com 20 motoqueiros a menos, em quantos dias neste grupo, suas motos totalizariam um consumo de 8000, supondo todas as motos com mesmo rendimento de consumo?

a) 68
b) 74
c) 78
d) 64
e) 58

35 - (ENEM MEC/2021) Um automóvel apresenta um desempenho médio de 16 km/L. Um engenheiro desenvolveu um novo motor a combustão que economiza, em relação ao consumo do motor anterior, 0,1 L de combustível a cada 20 km percorridos.
O valor do desempenho médio do automóvel com o novo motor, em quilômetro por litro, expresso com uma casa decimal, é

a) 15,9.
b) 16,1.
c) 16,4.
d) 17,4.
e) 18,0.

36 - (ENEM MEC/2021) Os diretores de uma escola precisam construir um laboratório para uso dos alunos. Há duas possibilidades:

(i) um laboratório do tipo A, com capacidade para 100 usuários, a um custo de 180 mil reais e gastos de 60 mil reais por ano para manutenção;

(ii) um laboratório do tipo B, com capacidade para 80 usuários, a um custo de 120 mil reais e gastos com manutenção de 16 mil reais por ano.

Considera-se que, em qualquer caso, o laboratório implantado será utilizado na totalidade de sua capacidade.

A economia da escola, na utilização de um laboratório tipo B, em vez de um laboratório tipo A, num período de 4 anos, por usuário, será de

a) 1,31 mil reais.
b) 1,90 mil reais.
c) 2,30 mil reais.
d) 2,36 mil reais.
e) 2,95 mil reais.

37 - (ENEM MEC/2021) Uma unidade de medida comum usada para expressar áreas de terrenos de grandes dimensões é o hectare, que equivale a 10000 m2. Um fazendeiro decide fazer um loteamento utilizando 3 hectares de sua fazenda, dos quais 0,9 hectare será usado para a construção de ruas e calçadas e o restante será dividido em terrenos com área de 300 m2 cada um. Os 20 primeiros terrenos vendidos terão preços promocionais de R$ 20 000,00 cada, e os demais, R$ 30000,00 cada.

Nas condições estabelecidas, o valor total, em real, obtido pelo fazendeiro com a venda de todos os terrenos será igual a

a) 700 000.

b) 1 600 000.
c) 1 900 000.
d) 2 200 000.
e) 2 800 000.

38 - (Santa Casa SP/2021) Um anestesista prescreve 1 litro de solução salina para diminuir os efeitos colaterais indesejáveis da anestesia em um paciente. Se a solução salina prescrita deve ser administrada ao longo de 8 horas, ao final de 6 horas e 15 minutos o paciente terá recebido, dessa solução,

a) 762,75 mL.
b) 775,25 mL.
c) 765,25 mL.
d) 768,75 mL.
e) 781,25 mL.

39 - (PUC RS/2021) Um hospital tem reserva de analgésicos para tratar seus 18 pacientes durante 45 dias. Passados 5 dias, o hospital recebeu mais 2 pacientes e manteve o padrão inicial do tratamento para todos. Supondo que, a partir desse momento, o número de pacientes atendidos não se altere, quantos dias o hospital conseguirá manter o tratamento desses pacientes?

a) 40
b) 38
c) 36
d) 34

40 - (Fac. Cesgranrio RJ/2021) Certa empresa publica anúncios em uma rede social, oferecendo seus produtos. O gerente de marketing apresentou, em uma reunião, os seguintes dados:

1. O anúncio é visto, em média, por 4 mil pessoas por dia.
2. Duas em cada 5 pessoas que veem o anúncio "clicam" sobre o mesmo e acessam o site da empresa.
3. Uma em cada 4 pessoas que acessam o site da empresa efetivam a compra de algum produto.

De acordo com as informações apresentadas pelo gerente de marketing, quantas pessoas, em média, acessam o site diariamente e não realizam qualquer compra?

a) 320
b) 400
c) 500
d) 1.200
e) 1.280

41 - (Fac. Cesgranrio RJ/2021) Em uma fazenda do Mato Grosso são produzidas, em média, 2.200 toneladas de soja em uma área de 1.000 hectares.

Mantendo-se a mesma proporção, qual será a produção média de soja de outra fazenda, que dispõe de 800 hectares plantados?

a) 1.600
b) 1.660
c) 1.760
d) 1.800
e) 1.980

42 - (Unesp SP/2021) Procurando economizar energia, Sr. Artur substituiu seu televisor de LCD de 100 W por um de LED de 60 W, pelo qual pagou R$ 1.200,00. Considere que o Sr. Artur utilizará seu novo televisor, em média, durante cinco horas por dia e que 1 kWh de energia elétrica custe R$ 0,50. O valor pago pelo novo televisor corresponderá à energia elétrica economizada devido à troca dos televisores em, aproximadamente,

a) 450 meses.
b) 400 meses.
c) 600 meses.
d) 550 meses.
e) 500 meses.

43 - (Fac. Medicina de Petrópolis RJ/2021) Um recém-nascido com peso de 3600 g foi internado com quadro de infecção. O médico prescreveu um antibiótico na dose de 50 mg para cada quilograma de peso do paciente, a cada 12 horas, por via endovenosa.

A diluição da medicação é de 1 grama para cada 25 mL de água destilada.

A dose que deve ser prescrita por dia, é de, em mL,

a) 4,5
b) 6,0
c) 9,0
d) 5,0
e) 7,2

44 - (ENEM MEC/2022) Os países anglófonos, como a Inglaterra, o Canadá, a Austrália e outros, são países que utilizam dois sistemas de unidades para a identificação de distâncias: o Sistema Internacional, com o quilômetro (km), e o CGS, com a milha (mi). Nas rodovias canadenses, por exemplo, as placas de sinalização de distâncias apresentam dois valores, um em km e outro em mi, com esta última equivalente a aproximadamente 1 610 metros.
Um turista brasileiro, habituado ao Sistema Internacional, em viagem por uma dessas rodovias, verifica em dado momento uma placa indicando a distância até a cidade a que ele se destina, onde está escrito 50 mi e XX km, com o valor da distância em quilômetro ilegível.

Qual o valor, desprezando as casas decimais, que deveria estar escrito na placa, para identificar a distância XX, em quilômetro, até a cidade destino?

a) 8

b) 31
c) 80
d) 310
e) 805

45 - (ENEM MEC/2022) Um jovem, no trajeto que usa para ir para a escola, sempre passa por um grande relógio digital que há no centro da sua cidade e compara a hora nele mostrada com a hora que marca o seu relógio de pulso. Ao longo de 30 dias de observação, constata que o seu relógio atrasa 2 minutos, a cada 15 dias, em relação ao do centro da cidade.
Após 90 dias, sem nenhum dos dois relógios receberem ajustes e mantida a mesma parcela de atraso diário, ao ler as marcações de horário dos dois relógios, verificou que o do centro da cidade marcava exatamente 7 horas.

Qual horário marcava seu relógio de pulso nesse instante?

a) 6 h e 48 min
b) 6 h e 54 min
c) 6 h e 58 min
d) 7 h e 06 min
e) 7 h e 12 min

46 - (ENEM MEC/2022) Toda a iluminação de um escritório é feita utilizando-se 40 lâmpadas incandescentes que produzem 600 lúmens (lúmen = unidade de energia luminosa) cada. O gerente planeja reestruturar o sistema de iluminação desse escritório, utilizando somente lâmpadas fluorescentes que produzem 1 600 lúmens, para aumentar a quantidade de energia luminosa em 50%.

Para alcançar seu objetivo, a quantidade mínima de lâmpadas fluorescentes que o gerente desse escritório deverá instalar é

a) 10.
b) 14.
c) 15.
d) 16.
e) 23.

47 - (ENEM MEC/2022) Um clube está sendo reformado e deve ter algumas paredes e partes do teto repintadas. São, no total, 560 m2 de parede e 260 m2 de teto. Segundo orientações técnicas, um entre três tipos diferentes de tinta deve ser usado para pintar as paredes (tipos I, II e III), e um entre outros dois tipos pode ser utilizado na pintura do teto (tipos X e Y). As características dos diferentes produtos são apresentadas a seguir:

• tipo I: vendido em embalagem com 10 L, por R$ 180,00 cada. O conteúdo permite pintar uma área de 220 m2;
• tipo II: vendido em embalagem com 20 L, por R$ 350,00 cada. O conteúdo permite pintar uma área de 450 m2;
• tipo III: vendido em embalagem com 25 L, por R$ 650,00 cada. O conteúdo permite pintar uma área de 550 m2;

• tipo X: vendido em embalagem com 4 L, por R$ 70,00 cada. O conteúdo permite pintar uma área de 80 m2;
• tipo Y: vendido em embalagem com 5 L, por R$ 85,00 cada. O conteúdo permite pintar uma área de 90 m2.

Pretende-se gastar a menor quantia possível, em real, com essa pintura.

As tintas que devem ser escolhidas para uso nas paredes e teto do clube, respectivamente, são as de tipos

a) I e X.
b) I e Y.
c) II e X.
d) II e Y.
e) III e Y.

48 - (ENEM MEC/2022) Com o intuito de fazer bombons para vender, uma doceira comprou uma barra de 2 kg de chocolate e 1 L de creme de leite. De acordo com a receita, cada bombom deverá ter exatamente 34 g de chocolate e 12 mL de creme de leite.

Respeitando os critérios estabelecidos, quantos bombons a doceira poderá fazer utilizando o máximo que puder os ingredientes comprados?

a) 5
b) 8
c) 58
d) 71
e) 83

49 - (UFGD MS/2022) Como em outras atividades de criação de animais, a piscicultura objetiva a manutenção de certa população (ou quantidade) de organismos, no caso, peixes, em uma determinada área por um período de tempo também determinado.

ITUASSU, Daniel Rabello. Cálculo de povoamento de viveiros e tanques-rede. Embrapa Agrossilvipastoril-Circular Técnica (INFOTECA-E), 2015.



Disponível em: https://www.agrofy.com.br/tanque-rede-para-piscicultura-vinitanq-sansuy.html.
Acesso em: 25 jan. 2022.

Considerando que certo piscicultor deseja produzir, no mínimo, 1 tonelada por ciclo de produção do peixe tilápia em tanques-rede de 6 m3 com capacidade de estocar 50 peixes/m3 de peso médio de 750 g, desprezando-se a taxa de mortalidade dos peixes,

e tendo como referência o ciclo de produção diretamente relacionado à quantidade de peixes colocados no tanque, qual a quantidade mínima de tanques-redes para a produção almejada?

a) 4 tanques-rede.
b) 5 tanques-rede.
c) 8 tanques-rede.
d) 12 tanques-rede.
e) 25 tanques-rede.

50 - (UFGD MS/2022) No ano de 2011, a população de um determinado município atingiu o número de 23.700 habitantes. De 2011 a 2021, a dinâmica de crescimento populacional atingiu, em 2021, a quantidade de 26.400 habitantes. Fixando a mesma taxa de crescimento desses 10 anos, estima-se que o último ano em que a população desse município seja inferior a 30.000 habitantes é

a) 2025.
b) 2027.
c) 2031.
d) 2034.
e) 2035.

51 - (ENEM MEC/2022) Uma família decidiu comprar um aparelho condicionador de ar usando como critério de escolha seu consumo mensal de energia. Suponha que o valor de 1 kWh da conta de energia elétrica dessa família custe R$ 0,58 (impostos incluídos) e que há bandeira tarifária vermelha correspondendo a R$ 0,045 para cada 1 kWh consumido.
O uso desse aparelho deve representar um acréscimo mensal na conta de energia elétrica da família de R$ 150,00.

O consumo de energia elétrica mensal mais próximo, em quilowatt-hora, que o aparelho deve ter é igual a

a) 286.
b) 280.
c) 259.
d) 240.
e) 146.

52 - (Fac. Cesgranrio RJ/2022) Certo dia, a cotação do dólar estava a R$ 4,20. No mesmo dia, 1 euro equivalia a R$ 4,64. Nesse dia, João tinha em mãos a quantia exata para comprar 1.200 dólares.

Com metade da quantia que João tinha em mãos, ele poderia comprar

a) menos de 500 euros
b) entre 500 e 800 euros
c) entre 800 e 1100 euros
d) entre 1100 e 1400 euros
e) mais de 1400 euros

53 - (ENEM MEC/2022) Um casal está reformando a cozinha de casa e decidiu comprar um refrigerador novo. Observando a planta da nova cozinha, desenhada na escala de 1 : 50, notaram que o espaço destinado ao refrigerador tinha 3,8 cm de altura e 1,6 cm de largura. Eles sabem que os fabricantes de refrigeradores indicam que, para um bom funcionamento e fácil manejo na limpeza, esses eletrodomésticos devem ser colocados em espaços que permitam uma distância de, pelo menos, 10 cm de outros móveis ou paredes, tanto na parte superior quanto nas laterais. O casal comprou um refrigerador que caberia no local a ele destinado na nova cozinha, seguindo as instruções do fabricante.

Esse refrigerador tem altura e largura máximas, em metro, respectivamente, iguais a

a) 1,80 e 0,60.
b) 1,80 e 0,70.
c) 1,90 e 0,80.
d) 2,00 e 0,90.
e) 2,00 e 1,00.

54 - (ENEM MEC/2022) Definem-se o dia e o ano de um planeta de um sistema solar como sendo, respectivamente, o tempo que o planeta leva para dar 1 volta completa em torno de seu próprio eixo de rotação e o tempo para dar 1 volta completa em torno de seu Sol.
Suponha que exista um planeta Z, em algum sistema solar, onde um dia corresponda a 73 dias terrestres e que 2 de seus anos correspondam a 1 ano terrestre. Considere que 1 ano terrestre tem 365 de seus dias.

No planeta Z, seu ano corresponderia a quantos de seus dias?

a) 2,5
b) 10,0
c) 730,0
d) 13 322,5
e) 53 290,0

55 - (ENEM MEC/2022) Um borrifador de atuação automática libera, a cada acionamento, uma mesma quantidade de inseticida. O recipiente desse produto, quando cheio, contém 360 mL de inseticida, que duram 60 dias se o borrifador permanecer ligado ininterruptamente e for acionado a cada 48 minutos.

A quantidade de inseticida que é liberada a cada acionamento do borrifador, em mililitro, é

a) 0,125.
b) 0,200.
c) 4,800.
d) 6,000.
e) 12,000.

56 - (PUC Campinas SP/2022)

Crise Hídrica

A seca pela qual o Brasil passa nas últimas semanas vai continuar apertando o bolso do consumidor. [...] Em novo balanço atualizado no domingo, o Operador Nacional do Sistema Elétrico (ONS) apresentou números críticos dos níveis de armazenamento de água dos reservatórios das principais usinas hidrelétricas em Minas Gerais. Entre as oito maiores usinas, todas operando com volume inferior a 50% da capacidade de armazenamento de água que faz girar as turbinas, três trabalham com acumulação em barragens abaixo de 20%: Emborcação e Nova Ponte, no Triângulo Mineiro, com 11,72% e 11,95%, respectivamente; e Furnas, 17,47%. O lago de Três Marias tem a situação menos grave, com 49,51%, de acordo com novo levantamento feito pelo ONS.
Os dados foram atualizados em dia no qual era esperado, mas não foi anunciado, novo aumento do sistema tarifário aplicado às contas de energia pela Agência Nacional de Energia Elétrica (Aneel). Em agosto vigorou bandeira tarifária vermelha, de patamar 2, ao custo de R$ 9,49 a cada 100 quilowatt-hora (kWh) consumidos.

(Disponível em: www.em.com.br)

A tarifa média de energia no Estado de São Paulo é de 0,621 reais por kWh consumido. Quando há dificuldades na geração de energia, o governo aplica o sistema de bandeiras, que é um acréscimo ao preço do kWh. A bandeira vermelha ainda tem dois patamares, P1 e P2, como indicado na tabela.

Bandeira	Acréscimo por kWh (reais)
Verde	–
Amarela	0,01874
Vermelha P1	0,03971
Vermelha P2	0,09492

Uma família residente no estado de São Paulo que consome em um mês 200 kWh, na bandeira vermelha e patamar 2, pagará pela energia consumida, sem os impostos, o valor médio de:

a) R$ 127,95.
b) R$ 124,20.
c) R$ 143,18.
d) R$ 132,14.
e) R$ 185,14.

57 - (Unicamp SP/2022) Certo modelo de carro é vendido em duas versões: uma a gasolina e outra híbrida. Essa última versão conta com um motor elétrico para funcionar em baixas velocidades, reduzindo, assim, o consumo de combustível e também os índices de poluição.

A versão a gasolina custa R$ 150.000,00 e a versão híbrida custa R$ 180.000,00. A tabela a seguir indica o consumo de combustível de cada uma das versões:

	Uso na cidade	Uso na estrada
Versão a gasolina	12 km/l	14 km/l
Versão híbrida	18 km/l	16 km/l

Note que a versão híbrida é mais econômica, porém custa mais caro.

Um motorista faz diariamente um percurso de 36 km na cidade e de 56 km na estrada. Considerando que cada litro de gasolina custa R$ 5,00 e que, ao longo do tempo, esse preço será constante e o percurso não se alterará, quantos anos de uso serão necessários para que a economia no abastecimento compense o preço mais alto pago inicialmente pelo carro híbrido?

a) Mais que 8 e menos que 10 anos.
b) Mais que 10 e menos que 12 anos.
c) Mais que 12 e menos que 14 anos.
d) Mais que 14 e menos que 16 anos.

Produtos Notáveis e Fatoração

Produtos Notáveis

São produtos (multiplicações) importantes e que aparecem com muita frequência nos cálculos algébricos.

Exemplos:
a) Quadrado da soma de dois termos: $(x + y) \cdot (x + y)$ ou $(x + y)^2$.
b) Produto da soma pela diferença de dois termos: $(x + y) \cdot (x - y)$.

Quadrado da Soma de Dois Termos

O quadrado da soma de dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo, acrescido do dobro do produto do primeiro termo pelo segundo, mais o quadrado do segundo termo.

Isto é:

$$(x + y)^2 = (x + y) \cdot (x + y)$$
$$(x + y)^2 = x^2 + xy + xy + y^2$$
$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2.$$

Exemplos:
a) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
b) $(2x + 5)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 5 + 5^2 = 4x^2 + 20x + 25$.
c) $(3x + 4y)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 4y + (4y)^2 = 9x^2 + 24xy + 16y^2$.

Quadrado da Diferença de Dois Termos

O quadrado da diferença de dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo, menos o dobro do produto do primeiro termo pelo segundo, acrescido do quadrado do segundo termo.

Isto é:

$$(x - y)^2 = (x - y) \cdot (x - y)$$
$$(x - y)^2 = x^2 - xy - xy + y^2$$
$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2.$$

Exemplos:
a) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
b) $(2 - 4y)^2 = 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 4y + (4y)^2 = 4 - 16y + 16y^2$.
c) $(5x - 7y)^2 = (5x)^2 - 2 \cdot 5x \cdot 7y + (7y)^2 = 25x^2 - 70xy + 49y^2$.

Produto da Soma pela Diferença de Dois Termos

O produto da soma pela diferença de dois termos é igual à diferença entre o quadrado do primeiro termo e o quadrado do segundo termo.

Isto é:

$$(x + y) \cdot (x - y) = x^2 - xy + xy - y^2$$
$$(x + y) \cdot (x - y) = x^2 - y^2.$$

Exemplos:
a) $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$.

b) $(4x + 5) \cdot (4x - 5) = (4x)^2 - 5^2 = 16x^2 - 25$.
c) $(x + 3y) \cdot (x - 3y) = x^2 - (3y)^2 = x^2 - 9y^2$.

Cubo da Soma de Dois Termos

O cubo da soma de dois termos é igual ao cubo do primeiro termo, mais três vezes o produto do quadrado do primeiro termo pelo segundo termo, mais três vezes o produto do primeiro termo pelo quadrado do segundo termo, mais o cubo do segundo termo.

Isto é:

$$(x + y)^3 = (x + y).\cdot (x + y)^2$$
$$(x + y)^3 = (x + y) \cdot (x^2 + 2xy + y^2)$$
$$(x + y)^3 = x^3 + 2x^2y + xy^2 + x^2y + 2xy^2 + y^3$$
$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3.$$

Exemplos:
a) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
b) $(3 + 2y)^3 = 3^3 + 3 \cdot 3^2 \cdot 2y + 3 \cdot 3 \cdot (2y)^2 + (2y)^3 = 27 + 54y + 36y^2 + 8y^3$.
c) $(x + 4y)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 4y + 3 \cdot x \cdot (4y)^2 + (4y)^3 = x^3 + 12x^2y + 48xy^2 + 64y^3$.

Cubo da Diferença de Dois Termos

O cubo da diferença de dois termos é igual ao cubo do primeiro termo, menos três vezes o produto do quadrado do primeiro termo pelo segundo termo, mais três vezes o produto do primeiro termo pelo quadrado do segundo termo, menos o cubo do segundo termo.

Isto é:

$$(x - y)^3 = (x - y) \cdot (x - y)^2$$
$$(x - y)^3 = (x - y) \cdot (x^2 - 2xy + y^2)$$
$$(x - y)^3 = x^3 - 2x^2y + xy^2 - x^2y + 2xy^2 - y^3$$
$$(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3.$$

Exemplos:
a) $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.
b) $(2x - 1)^3 = (2x)^3 - 3 \cdot (2x)^2 \cdot 1 + 3 \cdot 2x \cdot 1^2 - 1^3 = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$.
c) $(2x - 3y)^3 = (2x)^3 - 3 \cdot (2x)^2 \cdot 3y + 3 \cdot 2x \cdot (3y)^2 - (3y)^3 = 8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3$.

Fatoração

A fatoração é a representação de um número/polinômio como a multiplicação de dois ou mais fatores.

Exemplos:
a) $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$.
b) $81 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$.
c) $ab + ac = a \cdot (b + c)$.
d) $10x - 2xy = 2x \cdot (5 + y)$.
e) $x^2 - y^2 = (x + y) \cdot (x - y)$.
f) $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b) \cdot (a + b)$.

Fatoração de Polinômios

- **Fator Comum em Evidência**

Quando todos os termos de um polinômio possuem um fator comum, podemos colocar esse fator em evidência.

A forma fatorada é a multiplicação do fator comum pelo polinômio e, este, poderá ser obtido a partir da divisão de cada termo do polinômio dado pelo fator comum a todos os termos.

Exemplo 1: $\boldsymbol{ad + ac}$**.**
Termo comum $= \boldsymbol{a}$**.**
Termos do polinômio $= \frac{ad}{a}$ e $\frac{ac}{a}$.
Logo, os termos do polinômio são $\boldsymbol{d}$ e $\boldsymbol{c}$.

Desse modo, a forma fatorada do polinômio dado é: $a \cdot (d + c)$.

Exemplo 2: $\boldsymbol{3x^4 + 18x^3y - 6x^2}$**.**

Termo comum $= \boldsymbol{3x^2}$**.**
Termos do polinômio $= \frac{3x^4}{3x^2}$, $\frac{18x^3y}{3x^2}$ e $\frac{6x^2}{3x^2}$.
Logo, os termos do polinômio são $\boldsymbol{x^2}$, $\boldsymbol{6xy}$ e $\boldsymbol{2}$.

Portanto, a forma fatorada do polinômio dado é: $3x^2 \cdot (x^2 + 6xy - 2)$.

- **Fatoração por Agrupamento**

Na fatoração por agrupamento, primeiramente, agrupamos os termos do polinômio que possuem fator em comum. A seguir, colocamos - em cada grupo - o fator comum em evidência e finalizamos colocando novamente o fator comum em evidência.

Exemplo 1: $\boldsymbol{bx + cx + by + cy}$**.**
Agrupando os termos com fator em comum, temos: $bx + cx + by + cy$.
Depois, colocamos o termo em comum de cada grupo em evidência: $x \cdot (b + c) + y \cdot (b + c)$.
Por último, colocamos o novo termo em comum em evidência: $(b + c) \cdot (x + y)$.

Portanto, a forma fatorada do polinômio dado é: $(b + c) \cdot (x + y)$.

Exemplo 2: $\boldsymbol{5x - ax + 5y - ay}$**.**
Seguindo os mesmos passos do exemplo anterior, temos:
$5x - ax + 5y - ay = 5x - ax + 5y - ay$
$5x - ax + 5y - ay = x \cdot (5 - a) + y \cdot (5 - a)$
$5x - ax + 5y - ay = (5 - a) \cdot (x + y)$.

Portanto, a forma fatorada do polinômio dado é: $(5 - a) \cdot (x + y)$.

Exemplo 3: $\boldsymbol{4bx + c^2 + 2c^2x + 2b}$**.**
$4bx + c^2 + 2c^2x + 2b = 4bx + 2b + 2c^2x + c^2$
$4bx + c^2 + 2c^2x + 2b = 2b \cdot (2x + 1) + c^2 \cdot (2x + 1)$
$4bx + c^2 + 2c^2x + 2b = (2x + 1) \cdot (2b + c^2)$.

Portanto, a forma fatorada do polinômio dado é: $(2x + 1) \cdot (2b + c^2)$.

Atenção!

Observamos que, da mesma maneira que a forma fatorada de um polinômio, quando desenvolvida, resulta no polinômio, o inverso também pode ser feito, isto é, um polinômio pode ser representado na sua forma fatorada.

Desse modo, ao nos depararmos com um polinômio, faz-se necessário observar se ele se trata de um produto notável. Assim, teremos mais agilidade na hora de responder a determinados problemas.

Portanto, lembre-se:

$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y) \cdot (x + y) = (x + y)^2.$
$x^2 - 2xy + y^2 = (x - y) \cdot (x - y) = (x - y)^2.$
$x^2 - y^2 = (x + y) \cdot (x - y).$
$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = (x + y)^3.$
$x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = (x - y)^3.$

Exemplo 1: $\boldsymbol{x^2 + 16x + 64.}$

$x^2 + 4x + 4 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 8 + 8^2$
$x^2 + 4x + 4 = (x + 8) \cdot (x + 8)$
$x^2 + 4x + 4 = (x + 8)^2.$

Exemplo 2: $\boldsymbol{x^4 - 2x^2m + m^2.}$

$x^4 - 2x^2m + m^2 = (x^2)^2 - 2 \cdot x^2 \cdot m + m^2$
$x^4 - 2x^2m + m^2 = (x^2 - m) \cdot (x^2 - m)$
$x^4 - 2x^2m + m^2 = (x^2 - m)^2.$

Exemplo 3: $\boldsymbol{x^2 - 81.}$

$x^2 - 81 = x^2 - 9^2$
$x^2 - 81 = (x + 9) \cdot (x - 9).$

Exercícios

01 - (IFSC/2017) Após analisar as afirmações a seguir sobre produtos notáveis e fatoração, marque com (V) o que for verdadeiro e, com (F), o que for falso.

( ) $(3a^2 - 2b)^2 = 9a^4 - 12a^2b + 4b^2$
( ) $(a - b)^3 = a^3 - b^3$
( ) $64a^2 - 49b^2 = (8a - 7b)(8a + 7b)$
( ) $4a^2 - 16b^2 = (2a - 4b)^2$
( ) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

Assinale a alternativa que contém a ordem CORRETA de preenchimento dos parênteses, de cima para baixo.

a) V,F,V,F,V
b) V,V,F,F,F
c) V,F,V,V,F
d) F,F,V,V,V
e) F,V,F,V,V

02 - (UTF PR/2017) Um fazendeiro possui dois terrenos quadrados de lados a e b, sendo a > b. Represente na forma de um produto notável a diferença das áreas destes quadrados.

a) (a + b).(a + b)
b) (a + b).(a – b)
c) (a – b).(a – b)
d) $(a + b)^2$
e) $(a – b)^2$

03 - (Unifap AP/2015) Marta leva a seguinte questão que estava na lista de exercícios de produtos notáveis para Ezequiel.

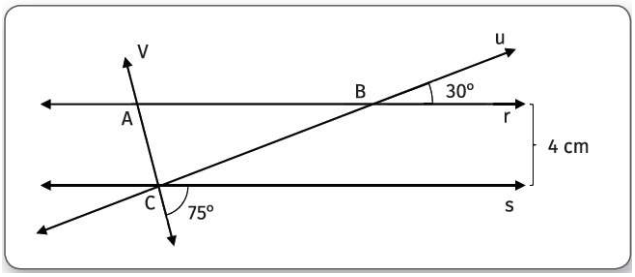
Qual é o valor de $98765^2 – 98764^2$.

Qual deve ser a resposta que Ezequiel deve marcar como correta:

a) 1
b) 197529
c) 197764
d) 197765
e) 198765

04 - (ETEC SP/2020) Carlos foi a uma hamburgueria que oferece wi-fi grátis, mas é necessário resolver alguns enigmas para utilizá-lo. Acompanhando o cardápio, Carlos e seus amigos receberam um QRcode que levava a uma página com um enigma para o login e outro para a senha.

O enigma do login tinha a imagem, em que r e s são retas paralelas, e a pista a seguir:



"*Uma classificação do* $\triangle ABC$
Seguido do comprimento de BC
Dará o acesso a você"

Em seguida, o grupo de amigos precisava descobrir a senha numérica resolvendo $59381^2 – 59379^2$.

A senha correta é:

a) 237520
b) 118760
c) 118762
d) 237522

e) 237526

05 - (ESPM SP/2020) O valor da expressão numérica $2.10^{-5} + \frac{99998^2}{99999^2 - 1}$ é igual a:

a) 0
b) 2
c) 1
d) $\frac{1}{2}$
e) $\frac{1}{4}$

06 - (IFPR/2020) A área de um terreno pode ser representada pela expressão algébrica $x^2 + 16x + 64$. Sabendo que esse terreno tem a forma de um quadrado, assinale a alternativa que indica a expressão algébrica que representa a medida do lado desse terreno.

a) x + 5
b) x + 6
c) x + 7
d) x + 8

07 - (Cefet MG/2020) Se x + y = 4, então $P = x^3 + x^2y + x^2 - y^2$ é equivalente à expressão algébrica
a) 3x − 16
b) $x^3 + 8x$
c) $3x^2 + 2x - 1$
d) $4x^2 + 8x - 16$

08 - (IFPI/2020) Se os valores reais de x e y são tais que xy = 18 e $x^2 + y^2 = 39$, então o valor de $\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2\right) \div \left[\frac{4}{(x+y)^2-(x-y)^2}\right]$ é igual a:

a) 3
b) 4
c) 6
d) 8
e) 12

09 - (ESPM SP/2019) O número que se deve somar a $456\,788^2$ para se obter $456\,789^2$ é:

a) 456 789
b) 1
c) 456 788
d) 913 579
e) 913 577

10 - (IFPI/2020) Se $\frac{y}{x} + \frac{x}{y} = 8$ e $x^2 + y^2 = \frac{16}{5}$, qual é o valor de x . y?

a) $\frac{1}{2}$
b) $\frac{1}{5}$
c) $\frac{2}{3}$
d) $\frac{1}{6}$
e) $\frac{2}{5}$

11 - (ETEC SP/2019) Um grupo de amigos decidiu participar de um jogo de escapada conhecido como "Escape room". Nesse jogo, os participantes são trancados dentro de uma sala e devem resolver uma série de enigmas para "escapar" (sair) da sala.

Abrindo o baú, eles encontraram um pergaminho com o texto abaixo.

$$a + b = 5$$

$$a - b = 2$$

$$\frac{(a - b) \cdot (a^2 + 2ab + b^2)}{a^2 - b^2} = x$$

A chave de número x abre o armário.

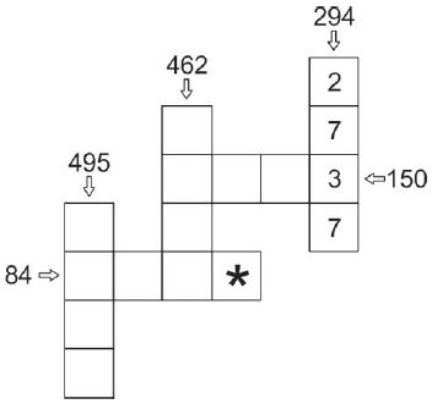
Próximo ao baú, havia um armário e, ao lado, 5 chaves penduradas com os números de 1 a 5. Sabendo que eles conseguiram abrir o armário, a chave escolhida foi a de número

a) 1.
b) 2.
c) 3.
d) 4.
e) 5.

12 - (IFAL/2019) Determine o valor do produto $(x - 2y).(2x + 3y)$, sabendo que $2x^2 - 6y^2 = 10$ e $xy = 4$.

a) 2
b) 4
c) 6
d) 10
e) 14

13 - (OBMEP/2019) As casas da figura abaixo devem ser preenchidas com números primos. Em cada linha ou coluna, o produto dos números deve ser igual ao número indicado pela seta. A coluna indicada por 294 já está preenchida. Qual é o número que deve ser escrito na casa marcada com * ?



a) 2
b) 3
c) 5
d) 7
e) 11

14 - (IME RJ/2018) Se X e Y são números naturais tais que $X^2 - Y^2 = 2017$, o valor de $X^2 + Y^2$ é:

a) 2008010
b) 2012061
c) 2034145
d) 2044145
e) 2052061

15 - (UTF PR/2018) Dados A = x + y, B = x – y e C = x . y, para $x \neq y$, $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Simplificando a expressão algébrica $\frac{A^2 - B^2}{C}$, obtém-se:

a) 0.
b) $\frac{2y}{x}$.
c) 4.
d) $-\frac{2x}{y}$.
e) $\frac{4}{xy}$.

16 - (OBMEP/2018) Sabendo-se que $\frac{x^2+y^2}{(x+y)^2} = \frac{7}{12}$, qual é o valor de $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$?

a) 2,0
b) 2,2
c) 2,4
d) 2,6
e) 2,8

17 - (IFMT/2018) Sejam $x = 2a^3b^2$, $y = 6a^2b^3$ e $z = 8a^2b^2$ com $a.b \in R$. A simplificação da expressão $\frac{x - z}{x + y}$, com $x + y \neq 0$, será igual a:

a) $\frac{a-4}{a+3b}$
b) $\frac{a+4}{a-3b}$
c) $\frac{a-4}{b+3a}$
d) $\frac{3}{4a^4b^5}$
e) $a^3b^2 - \frac{4}{3}a^2b$

18 - (IFPE/2017) Efetuando-se $(2341)^2 - (2340)^2$, obtém-se:

a) 6489
b) 1
c) 4681
d) 2681
e) 8689

19 - (IFAL/2017) Determine o valor do produto $(3x + 2y)^2$, sabendo que $9x^2 + 4y^2 = 25$ e $xy = 2$.

a) 27.
b) 31.
c) 38.
d) 49.
e) 54.

20 - (FGV /2015) Se $x^2 - x - 1$ é um dos fatores da fatoração de $mx^3 + nx^2 + 1$, com m e n inteiros, então, n+m é igual a

a) −2.
b) −1.
c) 0.
d) 1.
e) 2.

21 - (ESPM SP/2015) O valor numérico da expressão $\frac{x^2-10x+25}{x^2-9} : \frac{x^2-5x}{x^2-3x}$ para x = 97 é:

a) 0,89
b) 0,90
c) 0,91
d) 0,92
e) 0,93

22 - (IFG GO/2016) Após simplificar a fração algébrica $\frac{4x+xy}{4y+y^2} \div \frac{4x^2}{(x+y)^2-(x-y)^2}$, obtém-se:

a) 4.
b) 4x.
c) xy.
d) 1.
e) y.

23 - (Uniube MG/2016) É comum, na matemática, escrever um número em função de outro. Esse tipo de relação permite, muitas vezes, simplificar a escrita matemática, facilitando, assim, as operações algébricas. Vamos ver se você domina esse artifício matemático?
Sendo a = - x, b = $\frac{x}{2}$ e c = 2x, a expressão $a^2b + abc + ab^2$ tem como resultado:

a) $-\frac{5}{4}x^3$
b) $-\frac{3}{4}x^3$
c) $\frac{1}{3}x^3$
d) $\frac{1}{2}x^3$
e) $-\frac{1}{4}x^3$

24 - (UFRGS RS/2016) Se x + y = 13 e x . y = 1, então $x^2 + y^2$ é

a) 166.
b) 167.
c) 168.
d) 169.
e) 170.

25 - (ESPM SP/2016) O valor da expressão $2x^3 - 20x^2 + 50x$, para x = 105, é igual a:

a) $1{,}05 \times 10^7$
b) $2{,}1 \times 10^7$
c) $2{,}1 \times 10^6$
d) $1{,}05 \times 10^6$
e) $2{,}05 \times 10^7$

26 - (UNITAU SP/2017) O valor de A, dado que $A = \frac{-x^4 + y^4}{x^3 - x^2y + xy^2 - y^3}$, quando x e y assumem os valores 1.110 e 1.120, respectivamente, é

a) 2.150
b) –2.230
c) 1
d) –1
e) 150

27 - (IFG GO/2015) A forma simplificada da expressão matemática $\frac{a^2 - b^2}{a^2 - ab} + \frac{a^2 - 2ab + b^2}{a^2 - ab}$, onde $a \neq 0$ e $a \neq b$, é igual a

a) 2a – b
b) 2
c) a + b
d) –2
e) 2b

28 - (Unievangélica GO/2014) A soma de 1 (um) ao produto de quatro números inteiros e consecutivos resultará sempre em um quadrado perfeito.

Qual expressão representa esse quadrado perfeito?

a) $(n^2 + 3n + 1)^2$
b) $(n^2 + 2n + 1)^2$
c) $(n^2 + 3n + 3)^2$
d) $(n^2 + 2n + 2)^2$

29 - (ESPM SP/2014) Para $x \neq \pm 1$, a expressão $\frac{x^2 - x}{x^2 - 1} - \frac{x - 1}{x^2 - 2x + 1} + \frac{2}{x^2 - 1}$ equivale a:

a) $\frac{x + 1}{x - 1}$
b) $\frac{x - 1}{x + 1}$
c) $\frac{1}{x - 1}$
d) $\frac{1}{x + 1}$
e) $x - 1$

30 - (IBMEC SP Insper/2014) Sendo x e y dois números reais não nulos, a expressão $(x^{-2} + y^{-2})^{-1}$ é equivalente a

a) $\frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$
b) $\left(\frac{xy}{x + y}\right)^2$
c) $\frac{x^2 + y^2}{2}$
d) $(x + y)^2$
e) $x^2 + y^2$

31 - (IBMEC SP Insper/2011) Considere o número inteiro $N = \left(\frac{2014 \cdot 2016}{4}\right)^3$. O maior fator que aparece na decomposição de N em fatores primos é

a) 37.
b) 41.
c) 47.
d) 53.
e) 59.

32 - (ESPM SP/2013) O par ordenado $(x,y) \in N \times N$ é solução da equação $x^3 + x^2y - 8x - 8y = 7$. O valor de $x - y$ é:

a) 1
b) 2
c) –1
d) 0
e) –2

33 - (IFG GO/2014) Simplificando a expressão $\frac{x^2 + 2x + y^2 - 1}{x + y - 1}$ obtém-se:

a) $x + y$
b) $x^2 + y^2 + 1$
c) $2xy - 1$
d) $2xy$
e) $x + y + 1$

34 - (IFG GO/2014) O valor numérico da expressão $1538^2 - 1536^2$ é igual a:

a) 2^2
b) 3074^2
c) 3074
d) 6148^2
e) 6148

35 - (UECE/2009) O número 8645 pode ser fatorado como o produto de dois números inteiros positivos menores do que 100. A soma destes dois números é

a) 94.
b) 186.
c) 144.
d) 135.

36 - (UFMG/2005) Sejam a, b e c números reais e positivos tais que $\frac{ab}{b+c} = \frac{b^2 - bc}{a}$. Então, é CORRETO afirmar que:

a) $a^2 = b^2 + c^2$
b) $b = a + c$
c) $b^2 = a^2 + c^2$
d) $a = b + c$

37 - (Mackenzie SP/2002) O valor de $\frac{x^4 - y^4}{x^3 - x^2y + xy^2 - y^3}$ para x = 111 e y = 112 é:

a) 215
b) 223
c) 1
d) –1
e) 214

38 - (Mackenzie SP/2002) Se $(x - y)^2 - (x + y)^2 = -20$, então x . y é igual a:

a) – 1
b) 0
c) 10
d) 5
e) $\frac{1}{5}$

39 - (UFC CE/2004) Se a expressão $\frac{2x+5}{4x^2-1} = \frac{a}{2x+1} + \frac{b}{2x-1}$, onde a e b são constantes, é verdadeira para todo número real $x \neq \pm 1/2$, então o valor de a + b é:

a) –2
b) –1
c) 1
d) 2
e) 3

40 - (UEPB/2005) Os sinais das operações aritméticas são hoje de fácil identificação e aplicação graças ao grande mestre alemão Michael Stifel (1487-1567) que no início do século XVI começou a empregar os símbolos + e - como sinais das operações usadas atualmente. A fração $\frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2}$, quando a = 193 e b = 192, é igual a:

a) 0
b) $193^2 - 192^2$
c) 1
d) 101
e) 385

41 - (PUC MG/2000) Se $x^2 + y^2 = 17$ e $xy = 16$, o valor de $(x + y)^2$ é:

a) 32
b) 41
c) 49
d) 53
e) 54

Matrizes e Determinantes

Matrizes

Matrizes são tabelas retangulares formadas por números reais dispostos em linhas e colunas. Desse modo, uma matriz $m \times n$ (m por n) possui $m \cdot n$ números reais dispostos em m linhas e n colunas.

Exemplo 1: A tabela abaixo detalha as quantidades e os tipos de peças de roupas vendidas por uma loja entre os meses de janeiro e março.

Peças/Mês	Janeiro	Fevereiro	Março
Blusas	1	18	74
Vestidos	9	25	20
Shorts	12	45	31

Podemos representar os valores desta tabela em forma de matriz da seguinte maneira:

$$M_{(3\times3)}\begin{pmatrix} 1 & 18 & 74 \\ 9 & 25 & 20 \\ 12 & 45 & 31 \end{pmatrix}.$$

Essa matriz é da ordem (3×3), isto é, possui 3 linhas e 3 colunas, em que as linhas representam os tipos de roupas vendidas, enquanto as colunas representam os meses em que as vendas foram feitas.

Portanto, se quisermos saber quantas peças de roupas foram vendidas no mês de fevereiro, por exemplo, basta somarmos os elementos pertencentes à segunda coluna da matriz, ou seja, $18 + 25 + 45 = 88$ peças de roupas.

Do mesmo modo, se quisermos saber, por exemplo, a quantidade de blusas vendidas entre os meses de janeiro a março, devemos somar os termos representados na primeira linha da matriz, isto é, $1 + 18 + 74 = 93$ blusas.

Exemplo 2: São exemplos de matrizes.

Matriz do tipo 2×2: $\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$.

Matriz linha do tipo 1×3: $\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Matriz coluna do tipo 3×1: $\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Atenção!

Em uma matriz do tipo $m \times n$, m representa o número de linhas da matriz, enquanto n representa o número de colunas. Portanto, uma matriz do tipo 3×2 é formada por 3 linhas e 2 colunas.

Aos números que aparecem nas matrizes, damos o nome de **elementos** ou **termos** da matriz.

Esses elementos/termos são representados por uma letra com dois índices subscritos (i e j), em que i indica em qual linha o elemento está localizado e j indica em qual coluna.

Logo, uma matriz genérica A do tipo $m \times n$ é representada da seguinte maneira:

$$A_{(m\times n)} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{21} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Matrizes Especiais

- **Matriz Quadrada**

A matriz quadrada é aquela do tipo $m \times n$ em que $m = n$, ou seja, o número de linhas é igual ao número de colunas.

Uma matriz quadrada pode ser representada como sendo do tipo $n \times n$ ou de ordem n.

Exemplo 1: $A_2 = \begin{pmatrix} 11 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exemplo 2: $A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 7 \\ 1 & \sqrt{5} & 45 \\ -8 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Atenção!

A diagonal principal de uma matriz quadrada é formada pelos elementos a_{ij} com *i = j*.

Exemplo 1: $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$.

Exemplo 2: $\begin{pmatrix} 0 & 5 & -5 \\ 10 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Já a diagonal secundária de uma matriz quadrada de ordem n é formada pelos elementos em que a soma dos índices é igual a $n + 1$, isto é, $i + j = n + 1$.

Exemplo 1: $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$.

Exemplo 2: $\begin{pmatrix} 0 & 5 & -5 \\ 10 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- **Matriz Identidade**

A matriz identidade é uma matriz quadrada de ordem n na qual todos os termos da diagonal principal são iguais a 1 e os demais termos iguais a 0.

Uma matriz identidade de ordem n é representada por I_n.

Exemplo 1: $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exemplo 2: $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- **Matriz Nula**

A matriz nula é aquela em que todos os seus elementos são iguais a zero.

Uma matriz nula de ordem n é representada por O_n.

Exemplo 1: $\boldsymbol{O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$.

Exemplo 2: $\boldsymbol{O_{2\,x\,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$.

Igualdade de Matrizes

Duas matrizes são consideradas iguais quando possuem o mesmo tipo e seus elementos correspondentes são iguais.

Atenção!

Os elementos correspondentes são aqueles que ocupam a mesma posição em matrizes do mesmo tipo.

Exemplo: Observe as duas matrizes.

$A_{2\times3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ e $B_{2\times3} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$.

As matrizes A e B possuem o mesmo tipo, portanto, os elementos correspondentes dessas matrizes são:

a_{11} e b_{11}. a_{12} e b_{12}. a_{13} e b_{13}.
a_{21} e b_{21}. a_{22} e b_{22}. a_{23} e b_{23}.

Exemplo 1: $\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}}$ e $\boldsymbol{B = \begin{pmatrix} 6-6 & 14/2 \\ 5 & 2\cdot 1 \end{pmatrix}}$.

Observando as matrizes percebemos que elas têm o mesmo tipo. Logo, para saber se elas são iguais, o próximo passo é analisarmos se elas possuem elementos correspondentes.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 6-6 & 14/2 \\ 5 & 2\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Portanto, as matrizes A e B são iguais.

Exemplo 2: $\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}}$ e $\boldsymbol{B = (2 \quad 4 \quad 5)}$.

A matrizes A e B não possuem o mesmo tipo. A matriz A é do tipo 3×1 enquanto a matriz B é do tipo 1×3.

Portanto, as matrizes A e B são diferentes.

Exemplo 3: $\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} \sqrt{4} & 9 \\ 1 & 4\cdot 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}$ e $\boldsymbol{B = \begin{pmatrix} 2 & 3\cdot 3 \\ 5-4 & 24 \\ 1\cdot 0 & 6/2 \end{pmatrix}}$.

As matrizes A e B são do tipo 3×2. A seguir, ao analisando os elementos das matrizes, temos:

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{4} & 9 \\ 1 & 4 \cdot 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 24 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \cdot 3 \\ 5 - 4 & 24 \\ 1 \cdot 0 & 6/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 24 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Portanto, as matrizes A e B são iguais.

Adição e Subtração de Matrizes

- **Adição de Matrizes**

Dadas duas matrizes, A e B, a adição das matrizes A e B (representada pela matriz C) é obtida somando-se os elementos correspondentes de A e B.

Observação: A adição de matrizes é feita quando elas possuem o mesmo tipo, $m \times n$. Além disso, a matriz resultante também será do tipo das matrizes que foram somadas.

Exemplo 1: Adição das matrizes $\boldsymbol{A = (2 \quad 5 \quad -7)}$ e $\boldsymbol{B = (4 \quad -2 \quad 10)}$.

$$C = A + B$$
$$C = (2 \quad 5 \quad -7) + (4 \quad -2 \quad 10)$$
$$C = (2 + 4 \quad 5 + (-2) \quad (-7) + 10)$$
$$C = (6 \quad 3 \quad 3).$$

Exemplo 2: Adição das matrizes $\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{5} & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}}$ e $\boldsymbol{B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 1 & 9 & 0 \end{pmatrix}}$.

$$C = A + B$$
$$C = \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{5} & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 1 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} (-1) + 0 & \sqrt{5} + (-2) & 3 + 4 \\ 1 + 1 & 0 + 9 & 4 + 0 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{5} - 2 & 7 \\ 2 & 9 & 4 \end{pmatrix}.$$

Atenção!

Matriz Oposta de uma Matriz A

A matriz oposta de A é aquela que quando somada a A se obtém uma matriz nula.

A matriz oposta de A é representada por $-A$.

Exemplo: $\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}}$ **e** $\boldsymbol{-A = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix}}$.

$$A + (-A) = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- **Subtração de Matrizes**

Dadas duas matrizes, A e B, a subtração da matriz A pela B é obtida somando-se a matriz A à matriz oposta de B, ou seja, $A - B = A + (-B)$.

Observação: A diferença de matrizes é feita quando elas possuem o mesmo tipo, $m \times n$. Além disso, a matriz resultante também será do tipo das matrizes que foram subtraídas.

Exemplo 1: Subtração das matrizes $\boldsymbol{A = (2 \quad 5 \quad -7)}$ e $\boldsymbol{B = (4 \quad -2 \quad 10)}$.

$$A - B = A + (-B)$$
$$A - B = (2 \quad 5 \quad -7) + (-4 \quad 2 \quad -10)$$
$$A - B = (2 + (-4) \quad 5 + 2 \quad (-7) + (-10))$$
$$A - B = (-2 \quad 7 \quad -17).$$

Exemplo 2: **Subtração das matrizes $A = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{\sqrt{5}} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{1} & \mathbf{9} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$.**

$$A - B = A + (-B)$$
$$A - B = \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{5} & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -9 & 0 \end{pmatrix}$$
$$A - B = \begin{pmatrix} (-1) + 0 & \sqrt{5} + 2 & 3 + (-4) \\ 1 + (-1) & 0 + (-9) & 4 + 0 \end{pmatrix}$$
$$A - B = \begin{pmatrix} -1 & 2 + \sqrt{5} & -1 \\ 0 & -9 & 4 \end{pmatrix}.$$

Multiplicação de Número Real por Matriz

O produto de um número real por uma matriz é feito multiplicando esse número real por todos os elementos da matriz.

Exemplo 1: **Sendo $A = \begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{-8} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$, $3A$ é igual a:**

$$3A = 3\begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$3A = \begin{pmatrix} 3 \cdot 5 & 3 \cdot (-8) \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot 1 & 3 \cdot 1 \end{pmatrix}$$
$$3A = \begin{pmatrix} 15 & -24 \\ 6 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 2: **Sendo $A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{9/3} \\ \mathbf{\sqrt{2}} & \mathbf{-3} \end{pmatrix}$, $-2A$ é igual a:**

$$-2A = -2\begin{pmatrix} 1 & 9/3 \\ \sqrt{2} & -3 \end{pmatrix}$$
$$-2A = \begin{pmatrix} -2 \cdot 1 & -2 \cdot 9/3 \\ -2 \cdot \sqrt{2} & -2 \cdot (-3) \end{pmatrix}$$
$$-2A = -2\begin{pmatrix} -2 & -6 \\ -2\sqrt{2} & 6 \end{pmatrix}.$$

Matriz Transposta

A matriz transposta é aquela em que suas linhas são, ordenadamente, as colunas de outra matriz.

Uma matriz transposta é representada pela letra T sobrescrita à letra que representa uma matriz. Por exemplo, a matriz transposta de A é representada por A^T.

Exemplo 1: **Matriz transposta de $A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{5} \end{pmatrix}$.**

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 2: Matriz transposta de $\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 5 & 9 \\ 0 & -8 & 7 \end{pmatrix}}$.

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & 5 & -8 \\ 2 & 9 & 7 \end{pmatrix}.$$

Observação: Ao analisar o exemplo 1, percebemos uma característica da matriz transposta: Se a matriz A é do tipo $m \times n$, sua matriz transposta A^T é do tipo $n \times m$.

Multiplicação de Matrizes

Dadas as matrizes A e B, sendo A do tipo $m \times n$ e B do tipo $n \times p$, o produto entre elas resultará em uma matriz C do tipo $m \times p$.

Atenção!

Duas matrizes, A e B, só podem ser multiplicadas quando o número de colunas da matriz A for igual ao número de linhas da B.

Além disso, a matriz C possuirá a mesma quantidade de linhas da A e de colunas de B.

Exemplo: Matrizes $\boldsymbol{A_{3\times2}}$ **e** $\boldsymbol{B_{2\times2}}$.

Observando essas duas matrizes percebemos que A possui a quantidade de colunas igual à quantidade de linhas em B. Desse modo, essas matrizes podem ser multiplicadas.

Sabendo que a matriz resultante C terá a mesma quantidade de linhas de A (3 linhas) e de colunas de B (2 colunas), C será uma matriz do tipo 3×2.

Cada elemento da matriz C é calculado por meio da multiplicação ordenada dos elementos da linha i - da matriz A - pelos elementos da coluna j da matriz B.

Exemplo 1: Multiplicação da matriz $\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}}$ **pela** $\boldsymbol{B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 8 & -4 & 7 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$.

Se A é do tipo 2×3 e B é do tipo 3×3, a matriz resultante será do tipo 2×3.

Logo, $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix}$.

Para encontrarmos os elementos de C, multiplicamos, ordenadamente, os elementos da linha i de A pelos elementos da coluna j de B. Isto acontece da seguinte maneira:

$\boldsymbol{c_{11}}$:elementos da $\mathbf{1}°$ **linha** em A x elementos da $\mathbf{1}°$ **coluna** em B.

$$c_{11} = (-2) \cdot 0 + 0 \cdot 8 + 1 \cdot (-1)$$
$$c_{11} = -1.$$

$\boldsymbol{c_{12}}$:elementos da $\mathbf{1}°$ **linha** em A x elementos da $\mathbf{2}°$ **coluna** em B.

$$c_{12} = (-2) \cdot 0 + 0 \cdot (-4) + 1 \cdot 1$$
$$c_{12} = 1.$$

$\boldsymbol{c_{13}}$:elementos da $\mathbf{1}°$ **linha** em A x elementos da $\mathbf{3}°$ **coluna** em B.

$$c_{13} = (-2) \cdot 5 + 0 \cdot 7 + 1 \cdot 1$$

$$c_{13} = -9.$$

$\boldsymbol{c_{21}}$:elementos da $\mathbf{2}°$ **linha** em A x elementos da $\mathbf{1}°$ **coluna** em B.

$$c_{21} = 1 \cdot 0 + 4 \cdot 8 + 8 \cdot (-1)$$
$$c_{21} = 24.$$

$\boldsymbol{c_{22}}$:elementos da $\mathbf{2}°$ **linha** em A x elementos da $\mathbf{2}°$ **coluna** em B.

$$c_{22} = 1 \cdot 0 + 4 \cdot (-4) + 8 \cdot 1$$
$$c_{22} = -8.$$

$\boldsymbol{c_{23}}$:elementos da $\mathbf{2}°$ **linha** em A x elementos da $\mathbf{3}°$ **coluna** em B.

$$c_{23} = 1 \cdot 5 + 4 \cdot 7 + 8 \cdot 1$$
$$c_{23} = 41.$$

Portanto, $A \cdot B = C$.

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -9 \\ 24 & -8 & 41 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 2: Multiplicação da matriz $\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & -2 \end{pmatrix}}$ **pela** $\boldsymbol{B = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}}$.

Se A é do tipo 3×3 e B é do tipo 3×1, a matriz resultante será do tipo 3×1.

Logo, $C = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \end{pmatrix}$.

A seguir, de acordo com o exemplo anterior, iremos calcular os elementos da matriz C:

$\boldsymbol{c_{11}}$:elementos da $\mathbf{1}°$ **linha** em A x elementos da $\mathbf{1}°$ **coluna** em B.

$$c_{11} = 4 \cdot 5 + 4 \cdot 9 + 3 \cdot 1$$
$$c_{11} = 59.$$

$\boldsymbol{c_{21}}$:elementos da $\mathbf{2}°$ **linha** em A x elementos da $\mathbf{1}°$ **coluna** em B.

$$c_{21} = 0 \cdot 5 + 1 \cdot 9 + 0 \cdot 1$$
$$c_{21} = 9.$$

$\boldsymbol{c_{31}}$:elementos da $\mathbf{3}°$ **linha** em A x elementos da $\mathbf{1}°$ **coluna** em B.

$$c_{31} = 1 \cdot 5 + 7 \cdot 9 + (-2) \cdot 1$$
$$c_{31} = 66.$$

Portanto, $A \,.\, B = C$.

$$C = \begin{pmatrix} 59 \\ 9 \\ 66 \end{pmatrix}.$$

Determinante

O determinante é um valor numérico associado a matrizes quadradas.

Observação: Toda matriz quadrada possui determinante.

A ordem de um determinante é igual à ordem de sua matriz. Logo, para uma matriz de ordem n, ou seja, do tipo $n \times n$, o determinante também possui ordem n.

- **Determinante de Ordem 2**

Para o cálculo do determinante de ordem 2, devemos subtrair o produto dos elementos da diagonal principal pelo produto dos elementos da diagonal secundária.

Exemplo 1: Determinante da matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = 2 \cdot 3 - 8 \cdot 4$$

$$\det(A) = -26.$$

Exemplo 2: Determinante da matriz $A = \begin{pmatrix} 10 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 10 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = 10 \cdot 2 - (-3) \cdot 1$$

$$\det(A) = 23.$$

- **Determinante de Ordem 3**

Para calcular o determinante de ordem 3, utilizamos a chamada regra de Sarrus.

A regra de Sarrus é feita da seguinte maneira:

Exemplo 1: Determinante da matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 7 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Passo 1: Repetimos as duas primeiras colunas da matriz à sua direita.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

Passo 2: Multiplicamos os elementos da matriz no sentido da diagonal principal, conservando os sinais obtidos.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} + & + & + & & \\ 2 & -1 & 4 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

14 0 60

Passo 3: Multiplicamos os elementos da matriz no sentido da diagonal secundária e mudamos os sinais obtidos.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} & - & - & - & \\ 2 & -1 & 4 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

0 -10 3

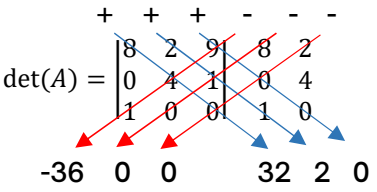
Passo 4: Somamos os valores obtidos.

$$\det(A) = 14 + 0 + 60 + 0 + (-10) + 3$$

$$\det(A) = 67.$$

Exemplo 2: Determinante da matriz $A = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 9 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 9 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 8 & 2 \\ 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{matrix}$$



$$\det(A) = 32 + 2 + 0 + (-36) + 0 + 0$$

$$\det(A) = -2.$$

- **Teorema de Binet**

Quando duas matrizes quadradas, A e B, possuem a mesma ordem e C como matriz produto, o $\det(C) = \det(A) \cdot det\,(B)$

Exemplo 1: Matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ **e** $B = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 3 = 3.$$

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 63 - 8 = 55.$$

Multiplicando as matrizes A e B, temos:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}.$$

$$c_{11} = 2 \cdot 7 + 3 \cdot 2 = 20.$$

$$c_{12} = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 9 = 35.$$

$$c_{21} = (-1) \cdot 7 + 0 \cdot 2 = -7.$$

$$c_{22} = (-1) \cdot 4 + 0 \cdot 9 = -4.$$

Desse modo, $C = \begin{pmatrix} 20 & 35 \\ -7 & -4 \end{pmatrix}$.

$$\det(C) = \begin{vmatrix} 20 & 35 \\ -7 & -4 \end{vmatrix} = -80 + 245 = 165.$$

Portanto: $\det C = \det A \cdot det\, B$, uma vez que $165 = 3 \cdot 55$.

Exemplo2: Matrizes $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -8 \\ 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ **e** $B = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$.

$$detA = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -8 \\ 4 & 6 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 \\ 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{matrix} = 0 + (-32) + 12 - 20 - 0 - 6 = -46.$$

$$detB = \begin{vmatrix} -1 & 5 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & 7 \end{vmatrix} \begin{matrix} -1 & 5 \\ 1 & -4 \\ 0 & 3 \end{matrix} = 28 + 0 + 3 - 0 - (-6) - 35 = 2.$$

Multiplicando as matrizes A e B, temos:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

$$c_{11} = 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 1.$$

$$c_{12} = 0 \cdot 5 + 1 \cdot (-4) + 1 \cdot 3 = -1.$$

$$c_{13} = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 7 = 9.$$

$$c_{21} = 2 \cdot (-1) + 5 \cdot 1 + (-8) \cdot 0 = 3.$$

$$c_{22} = 2 \cdot 5 + 5 \cdot (-4) + (-8) \cdot 3 = -34.$$

$$c_{23} = 2 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + (-8) \cdot 7 = -44.$$

$$c_{31} = 4 \cdot (-1) + 6 \cdot 1 + 3 \cdot 0 = 2.$$

$$c_{32} = 4 \cdot 5 + 6 \cdot (-4) + 3 \cdot 3 = 5.$$

$$c_{33} = 4 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 3 \cdot 7 = 37.$$

Desse modo, $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 9 \\ 3 & -34 & -44 \\ 2 & 5 & 37 \end{pmatrix}$.

$$\det(C) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 9 \\ 3 & -34 & -44 \\ 2 & 5 & 37 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -1 \\ 3 & -34 \\ 2 & 5 \end{matrix} = -1258 + 88 + 135 - (-612) - (-220) - (-111)$$

$$\det(C) = -92.$$

Portanto: $\det(C) = \det A \cdot det\ B$**, já que** $-92 = -46 \cdot 2$.

Exercícios

01 - (ENEM MEC/2018) A Transferência Eletrônica Disponível (TED) é uma transação financeira de valores entre diferentes bancos. Um economista decide analisar os valores enviados por meio de TEDs entre cinco bancos (1, 2, 3, 4 e 5) durante um mês. Para isso, ele dispõe esses valores em uma matriz A = [a_{ij}], em que 1 ≤ i ≤ 5 e 1 ≤ j ≤ 5, e o elemento a_{ij} corresponde ao total proveniente das operações feitas via TED, em milhão de real, transferidos do banco i para o banco j durante o mês. Observe que os elementos a_{ii} = 0, uma vez que TED é uma transferência entre bancos distintos. Esta é a matriz obtida para essa análise:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Com base nessas informações, o banco que transferiu a maior quantia via TED é o banco

a) 1.
b) 2.
c) 3.
d) 4.
e) 5.

02 - (IFPR/2019) A Tabela 1 informa, em reais, o custo de três produtos que uma artesã usa para produzir suas peças. A Tabela 2 indica a quantidade de cada produto utilizado para a produção de três tipos de peças.

Tabela 1

Produto	*1 litro de cola*	*1 metro de tecido*	*1 placa A3 de papelão*
Custo (R$)	3	8	5

Tabela 2

	Caixa	*Porta moedas*	*Capa de Agenda*
Cola (litros)	0,2	0,1	0,2
Tecido (metros)	0,5	0,4	0,6
Papelão (placas A3)	1	0,5	1

Dessa forma, a matriz que fornece, em reais, o custo de produção das peças: caixa, porta moedas e capa de agenda é:

a) $\begin{bmatrix} 5{,}10 \\ 8{,}00 \\ 9{,}00 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 9{,}60 \\ 6{,}00 \\ 10{,}40 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 8{,}00 \\ 5{,}50 \\ 9{,}60 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 6{,}50 \\ 10{,}40 \\ 9{,}00 \end{bmatrix}$

03 - (UFMS/2019) Uma indústria farmacêutica produz 3 tipos de suplementos alimentares: X, Y e Z. Os suplementos são compostos de Vitamina B, Vitamina D e Vitamina E em miligramas por cápsula, com concentrações diferentes. A matriz M representa a quantidade de vitaminas em miligrama por cápsula de cada suplemento; a matriz P, a produção diária de cápsulas dos suplementos:

$$P = \begin{bmatrix} 200 \\ 500 \\ 300 \end{bmatrix} \begin{matrix} X \\ Y \\ Z \end{matrix} \qquad M = \begin{matrix} \\ \text{Vitamina B} \\ \text{Vitamina D} \\ \text{Vitamina E} \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} X & Y & Z \end{matrix}$$

Qual matriz a seguir representa a quantidade, em gramas, de vitamina B, vitamina D e vitamina E utilizada na produção diária de cápsulas dos suplementos X, Y e Z pela indústria farmacêutica?

a) $\begin{bmatrix} 1{,}3 \\ 2{,}4 \\ 5{,}1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 16 \\ 45 \\ 27 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 29 \\ 32 \\ 27 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 13 \\ 24 \\ 51 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 2,9 \\ 3,2 \\ 2,7 \end{bmatrix}$

04 - (PUC GO/2019) A utilização de matrizes pode ser útil na Criptografia, ciência que estuda maneiras eficientes para troca de mensagens de modo mais seguro. Uma das formas de se criptografar uma mensagem de texto é estabelecer uma relação biunívoca entre as letras do alfabeto e os números naturais. Por exemplo, a = 1, b = 2 e, assim, sucessivamente. Em seguida, a mensagem é colocada numa matriz quadrada X e multiplicada por uma matriz invertível C, chamada matriz Chave, resultando em X.C = Y, em que a matriz Y é a mensagem criptografada. Ao receber a mensagem criptografada Y, multiplica-se pela inversa de C: $(X.C).C^{-1} = X.(C.C^{-1}) = X$, obtendo-se a mensagem original.

Supondo que tenha sido enviada a seguinte mensagem criptografada com base na relação biunívoca entre as letras do alfabeto e os números naturais, tal como no exemplo mencionado e que essa mensagem criptografada tenha sido enviada na forma da matriz $Y = \begin{pmatrix} 12 & 8 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ e sabendo que a matriz de Chave é a matriz $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, assinale a alternativa correta que apresenta a mensagem transmitida, armazenada em forma de matriz, linha a linha:

a) fato.
b) dado.
c) casa.
d) faca.

05 - (EsPCEx SP/2019) Duas cidades A e B têm suas áreas urbanas divididas em regiões Comercial, Residencial e Industrial. A tabela 1 fornece as áreas dessas regiões em hectares para as duas cidades.

A tabela 2, por sua vez, fornece os valores anuais médios de arrecadação, em milhões de reais por hectare, referentes ao Imposto Predial e Territorial Urbano (IPTU), ao fornecimento de energia elétrica e ao fornecimento de água.

Tabela 1

	Área Comercial	Área Residencial	Distrito Industrial
Cidade A	10	25	42
Cidade B	8	12	18

Tabela 2

	Área Comercial	Área Residencial	Distrito Industrial
IPTU	12	6	5
Energia Elétrica	25	12	60
Água	15	10	50

Considere as matrizes T_1 e T_2, associadas respectivamente às tabelas 1 e 2.

$$T_1 = \begin{bmatrix} 10 & 25 & 42 \\ 8 & 12 & 18 \end{bmatrix} \quad T_2 = \begin{bmatrix} 12 & 6 & 5 \\ 25 & 12 & 60 \\ 15 & 10 & 50 \end{bmatrix}$$

Seja a_{ij} os elementos da matriz resultante do produto $T_1 \cdot T_2^t$. Nessas condições, a informação contida no termo de ordem a_{22} desse produto de matrizes é o valor total arrecadado com

a) fornecimento de energia elétrica nas áreas residenciais.
b) fornecimento da água da cidade A.
c) fornecimento da água nas áreas residenciais.
d) IPTU nos distritos industriais.
e) fornecimento de energia elétrica na cidade B.

06 - (ENEM MEC/2019) Um professor aplica, durante os cinco dias úteis de uma semana, testes com quatro questões de múltipla escolha a cinco alunos. Os resultados foram representados na matriz.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Nessa matriz os elementos das linhas de 1 a 5 representam as quantidades de questões acertadas pelos alunos Ana, Bruno, Carlos, Denis e Érica, respectivamente, enquanto que as colunas de 1 a 5 indicam os dias da semana, de segunda-feira a sexta-feira, respectivamente, em que os testes foram aplicados.

O teste que apresentou maior quantidade de acertos foi o aplicado na

a) segunda-feira.
b) terça-feira.
c) quarta-feira.
d) quinta-feira.
e) sexta-feira.

07 - (ESPM RS/2019) Na matriz abaixo, o elemento que está na linha i e coluna j é a quantidade de gols que o time i marcou no time j, quando jogaram entre si num torneio.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Sabendo-se que os times se enfrentaram uma única vez e que a vitória vale 3 pontos, o empate dá 1 ponto para cada e a derrota não pontua, podemos concluir que:

a) o time 1 venceu o torneio.
b) o time 2 foi o segundo colocado.
c) o time 3 marcou 3 gols no torneio.
d) o time 1 ficou com 4 pontos.

e) o time 2 venceu o torneio.

08 - (IFMT/2018) Uma imagem digital é o emprego mais comum de uma matriz em um computador, onde cada elemento da matriz em uma imagem é denominado pixel e cada pixel descreve, de alguma forma apropriada, uma cor para aquele ponto da imagem. Um exemplo simples de uma imagem digital é a paleta de cores em formato de 1-bit, com apenas duas cores, preto ou branco, em que a cor de cada pixel será preto se o elemento da matriz for 0, e será branco se o elemento da matriz for 1. Considerando a paleta abaixo com 9 cores, qual a matriz que representa esta figura:



a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

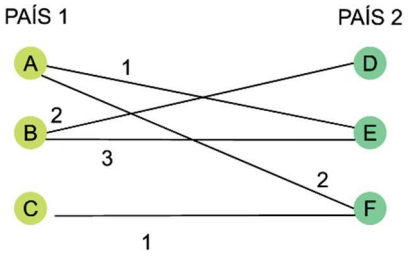
b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

09 - (IBMEC SP Insper/2018) O diagrama a seguir indica seis aeroportos, sendo A, B e C do país 1 e D, E e F do país 2. As linhas do diagrama indicam o número de empresas aéreas que fazem voos conectando os aeroportos dos dois países.



Das matrizes indicadas a seguir, a única que **não** traduz corretamente as informações do diagrama é

a) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

10 - (UEG GO/2019) Em um torneio de vôlei, as equipes A, B, C e D obtiveram os resultados registrados na tabela a seguir.

Equipe	Vitórias por 3x0	Vitórias por 3x2 ou 3x1	Derrotas por 3x2 ou 3x1	Derrotas por 3x0
A	7	4	2	0
B	3	5	3	2
C	1	2	6	4
D	0	4	4	5

Sabendo-se que cada resultado, pelo regulamento do torneio, tem a pontuação correspondente segundo a tabela a seguir, a matriz que corresponde à pontuação total no torneio de cada equipe é

Resultado	Número de pontos
Vitórias por 3x0	3
Vitórias por 3x2 ou 3x1	2
Derrotas por 3x2 ou 3x1	1
Derrotas por 3x0	0

a) $\begin{pmatrix} 31 \\ 22 \\ 13 \\ 17 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 31 \\ 19 \\ 13 \\ 17 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 31 \\ 22 \\ 13 \\ 12 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 31 \\ 19 \\ 13 \\ 12 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 31 \\ 22 \\ 20 \\ 17 \end{pmatrix}$

11 - (PUC SP/2019) Considere o seguinte sistema para criptografar mensagens. Associe a cada uma das 26 letras do alfabeto a sua posição usual, ou seja, A = 1, B = 2 e assim sucessivamente até Z = 26. Considere também que o símbolo * represente um espaço, que será associado ao número 27. A mensagem a ser criptografada é convertida em uma matriz M de 2 linhas, onde as entradas de cada coluna correspondem a duas letras da mensagem. Por exemplo seja a mensagem "DIA*CALMO".

D	I	A	*	C	A	L	M	O	*
4	9	1	27	3	1	12	13	15	27

A matriz que conterá essa mensagem é

$$M = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 & 12 & 15 \\ 9 & 27 & 1 & 13 & 27 \end{bmatrix}$$

Observe que um espaço (*) deve ser inserido no fim da mensagem, se essa tiver um número ímpar de caracteres.

O último passo da criptografia é multiplicar uma matriz de codificação K de ordem 2 pela matriz mensagem M, obtendo, dessa maneira, a matriz com a mensagem codificada C = KM. Para decodificar a mensagem, seguimos os passos na ordem inversa.

Seja $K = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -7 \end{bmatrix}$ a matriz de codificação e seja $C = \begin{bmatrix} 39 & -43 & -99 \\ 59 & -57 & -135 \end{bmatrix}$ a matriz com a mensagem codificada.

Decodificando a matriz C, obtemos a palavra:

a) MELHOR.
b) POLAR.
c) TEORIA.
d) VAPOR.

12 - (ENEM MEC/2020) Uma empresa avaliou os cinco aparelhos de celulares (T_1, T_2, T_3, T_4 e T_5) mais vendidos no último ano, nos itens: câmera, custo-benefício, design, desempenho da bateria e tela, representados por I_1, I_2, I_3, I_4 e I_5, respectivamente. A empresa atribuiu notas de 0 a 10 para cada item avaliado e organizou essas notas em uma matriz *A*, em que cada elemento a_{ij} significa a nota dada pela empresa ao aparelho T_i no item I_j. A empresa considera que o melhor aparelho de celular é aquele que obtém a maior soma das notas obtidas nos cinco itens avaliados.

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 9 & 9 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 8 & 10 \\ 7 & 10 & 10 & 7 & 10 \\ 8 & 8 & 10 & 10 & 9 \\ 8 & 8 & 8 & 9 & 9 \end{bmatrix}$$

Com base nessas informações, o aparelho de celular que a empresa avaliou como sendo o melhor é o

a) T_1.
b) T_2.
c) T_3.
d) T_4.
e) T_5.

13 - (ENEM MEC/2021) Uma construtora, pretendendo investir na construção de imóveis em uma metrópole com cinco grandes regiões, fez uma pesquisa sobre a quantidade de famílias que mudaram de uma região para outra, de modo a determinar qual região foi o destino do maior fluxo de famílias, sem levar em consideração o número de famílias que deixaram a região. Os valores da pesquisa estão dispostos em uma matriz

$A = [a_{ij}]$, $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, em que o elemento a_{ij} corresponde ao total de famílias (em dezena) que se mudaram da região i para a região j durante um certo período, e o elemento a_{ij} é considerado nulo, uma vez que somente são consideradas mudanças entre regiões distintas. A seguir, está apresentada a matriz com os dados da pesquisa.

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Qual região foi selecionada para o investimento da construtora?

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

14 - (Famema SP/2021) Dois jogadores, A e B, disputaram a final de um torneio de xadrez em dois jogos. Em cada partida, se ocorresse empate, cada jogador ganharia 1 ponto, caso contrário, o vencedor ganharia 2 pontos e o perdedor perderia 1 ponto. As matrizes que indicaram a pontuação obtida por cada jogador tinham, ambas, a seguinte estrutura:

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1^{\text{o}}\text{ jogo} \\ 2^{\text{o}}\text{ jogo} & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

No caso do jogador A, sua matriz de pontuação foi:

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Se a matriz de pontuação do jogador B era igual a matriz resultante da multiplicação matricial $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$, então x + y + z + w é igual a

a) 0.
b) 2.
c) 1.
d) 3.
e) −1.

15 - (ENEM MEC/2022) Uma faculdade oferece dois cursos diferentes na área de Humanas. Para um aluno ingressar nesses cursos, o vestibular contém questões objetivas e uma redação, e a nota final do candidato é a soma dessas notas, utilizando o seguinte critério de pesos:
• questões objetivas: peso 1 para o curso I e peso 1 para o curso II;
• redação: peso 2 para o curso I e peso 3 para o curso II.

Um candidato que concorre aos dois cursos obteve nota *X* nas questões objetivas e nota *Y* na redação. Para analisar sua nota para o curso I e para o curso II, o candidato representa sua nota com um produto de matrizes A . B, em que a matriz A representa os pesos, e a matriz B contém as notas obtidas pelo candidato. A matriz resultante A . B é uma matriz coluna, em que, na primeira linha, tem sua nota final para o curso I e, na segunda linha, tem sua nota final para o curso II.

Nessas condições, qual representação algébrica gera o resultado final desse candidato nos dois cursos?

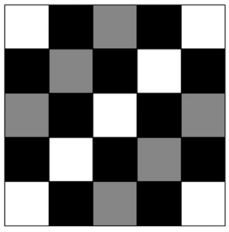
a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$
b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$
c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$
d) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Y \\ X \end{pmatrix}$
e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Y \\ X \end{pmatrix}$

16 - (Fatec SP/2017) Uma tela de computador pode ser representada por uma matriz de cores, de forma que cada elemento da matriz corresponda a um *pixel** na tela.

Numa tela em escala de cinza, por exemplo, podemos atribuir 256 cores diferentes para cada *pixel*, do preto absoluto (código da cor: 0) passando pelo cinza intermediário (código da cor: 127) ao branco absoluto (código da cor: 255).

*Menor elemento em uma tela ao qual é possível atribuir-se uma cor.

Suponha que na figura estejam representados 25 *pixels* de uma tela.



A matriz numérica correspondente às cores da figura apresentada é dada por

$$\begin{bmatrix} 255 & 0 & 127 & 0 & 255 \\ 0 & 127 & 0 & 255 & 0 \\ 127 & 0 & 255 & 0 & 127 \\ 0 & 255 & 0 & 127 & 0 \\ 255 & 0 & 127 & 0 & 255 \end{bmatrix}$$

Uma matriz M = (a_{ij}), quadrada de ordem 5, em que i representa o número da linha e j representa o número da coluna, é definida da seguinte forma:

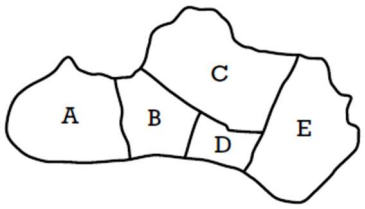
$$a_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ se } i = j \\ 127, \text{ se } i > j \\ 255, \text{ se } i < j \end{cases}$$

A matriz M corresponde a uma matriz de cores em escala de cinza, descrita pelo texto, em uma tela.

Sobre essa matriz de cores, pode-se afirmar que ela

a) terá o mesmo número de *pixels* brancos e cinzas.
b) terá o mesmo número de *pixels* brancos e pretos.
c) terá o mesmo número de *pixels* pretos e cinzas.
d) terá uma diagonal com cinco *pixels* brancos.
e) terá uma diagonal com cinco *pixels* cinzas.

17 - (ESPM SP/2020) Certo país é dividido em 5 regiões cujas áreas (em km^2) e respectivas densidades demográficas (hab/km^2) são representadas pelas matrizes M e N, nessa ordem:



$$\begin{matrix} & A & B & C & D & E \\ M = [& 300 & 240 & 450 & 180 & 400] \\ N = [& 60 & 40 & 30 & 20 & 25] \end{matrix}$$

Uma operação matricial que permite o cálculo da população total desse país é:

a) $M \cdot N$
b) $M + N$
c) $M^t \cdot N$

d) $M \cdot N^t$
e) $N^t \cdot M$

18 - (UnirG TO/2020) Em uma cidade há moradores na região central e há moradores nos subúrbios. Anualmente 18% dos moradores da região central migram para o subúrbio enquanto 6% dos moradores do subúrbio migram para a região central desta cidade. Considere que no momento há uma quantidade C_0 de moradores na região central e S_0 nos subúrbios. Nessas condições, a equação matricial que possibilita encontrar a quantidade de moradores na região central C_1 e dos moradores do subúrbio S_1 ao final de um ano é:

a) $\begin{pmatrix} C_1 \\ S_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}82 & 0{,}08 \\ 0{,}18 & 0{,}92 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_0 \\ S_0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} C_1 \\ S_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}82 & 0{,}06 \\ 0{,}18 & 0{,}94 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_0 \\ S_0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} C_1 \\ S_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}80 & 0{,}04 \\ 1{,}06 & 0{,}94 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_0 \\ S_0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} C_1 \\ S_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}80 & 0{,}08 \\ 1{,}06 & 0{,}92 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_0 \\ S_0 \end{pmatrix}$

19 - (Univag MT/2020) Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & x \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -4 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & 6 \end{bmatrix}$, com x uma constante real. Definindo M = AB + C, sabe-se que det(M) = 47. Nessas condições, o valor da constante real x é

a) 6.
b) 7.
c) 5.
d) 8.
e) 9.

20 - (Unicamp SP/2019) Sabendo que a e b são números reais, considere a matriz quadrada de ordem 3,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ b & 1 & a \\ 2 & b & 2 \end{pmatrix}.$$

Se a soma dos elementos em cada linha da matriz A tem sempre o mesmo valor, então o determinante de A é igual a

a) 0.
b) 2.
c) 5.
d) 10.

21 - (FMABC SP/2021) Considere as matrizes $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 2\\ 4 & 5 & -1\end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 0 & 1\\ 0 & x\end{bmatrix}$, sendo x um número real. Sabendo que a soma dos elementos da matriz AB é igual a 20, o determinante da matriz AB é igual a

a) 20.
b) 80.
c) –80.
d) –40.
e) 40.

22 - (UEA AM/2017) Considere as matrizes $A = (a_{ij})_{2 \times 3}$, com $a_{ij} = i^j$, $B=\begin{pmatrix}5\\ 2\end{pmatrix}$ e $C=\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}$, com a, b e c números reais.

Sabendo que $A \cdot C = B$ e que $b + c = 0$, o valor de $a \cdot b \cdot c$ é igual a

a) – 40.
b) – 20.
c) – 10.
d) 0.
e) 5.

23 - (FMABC SP/2022) Dadas as matrizes $A=\begin{pmatrix}x & z\\ 1 & -4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2x & x+y\\ 3 & 1\end{pmatrix}$ e $C=\begin{pmatrix}x+z & 2\\ y & 3\end{pmatrix}$, sendo det A = –8, det B = 1 e det C = 8.

O valor de x – y + z é igual a

a) 0.
b) 3.
c) 2.
d) 1.
e) –1.

24 - (FGV /2020) A matriz X tal que $A \cdot X = B$, em que $A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 5 & 2\end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix}0\\ 6\end{bmatrix}$, tem como soma de seus elementos o valor:

a) 12
b) 27
c) 16
d) 18
e) 14

25 - (UNITAU SP/2017) Considere a matriz $M=\begin{bmatrix}a & b\\ b & a\end{bmatrix}$. O valor do seu determinante é

a) $a^2 + b^2$
b) $(a + b) \cdot (a – b)$

c) $(a - b) \cdot (a - b)$
d) $a^2 + 2ab + b^2$
e) $a^2 - 2ab + b^2$

26 - (Unifenas MG/2019) Dado o determinante abaixo, obtenha o seu valor.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 6 & 3 \\ 5 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

a) –2.
b) –1.
c) 0.
d) 1.
e) 2.

27 - (Unifenas MG/2019) Dada a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 8 & 27 & 64 & 125 \end{bmatrix}$, encontre o valor do seu determinante.

a) 12.
b) 18.
c) 22.
d) 24.
e) 30.

28 - (Famerp SP/2019) A matriz quadrada $M = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ representa uma mensagem codificada. A mensagem decodificada é a matriz quadrada $M^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$, tal que M^{-1} é a inversa da matriz M. Sendo assim, o valor de $x + y + z + w$ é

a) –1
b) 0
c) 1
d) $\frac{1}{2}$
e) $-\frac{1}{2}$

29 - (IFMT/2019) Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & a & a \\ 0 & a & -a & a \\ 0 & a & a & -a \end{bmatrix}$, então Det(A) é igual a:

a) $-4a^4$
b) $4a^4$
c) –a
d) a
e) 0

30 - (Universidade Iguaçu RJ/2019) Considerando-se $A=\begin{pmatrix} x-2 & 1 \\ y & z \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2z & x \end{pmatrix}$ e $A+B=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, pode-se concluir que $\frac{x+y}{z}$ é igual a

01) 6
02) 4
03) 2
04) –3
05) –4

31 - (ESPM SP/2018) Seja A uma matriz quadrada de ordem 3, tal que cada elemento a_{ij} seja igual ao número binomial $\binom{i+j}{i}$. O valor do determinante dessa matriz é:

a) 0
b) 6
c) 5
d) 4
e) 10

32 - (UNEB BA/2018) Considerando-se $M=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & x & 4 \\ 1 & 1 & y \end{pmatrix}$, tal que o traço de M é 4 e o det(M) = –19, tem-se que o produto xy é igual a

01. –8
02. –4
03. –3
04. 1
05. 15

33 - (UEA AM/2017) Considere as matrizes $A=\begin{pmatrix} x & 3 \\ y & 4 \end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ y & 1 & 1 \\ x & 0 & 5 \end{pmatrix}$, com x e y números reais. Sabendo que det A = det B e que x + y = 5, o valor de x^y é igual a

a) 1.
b) 2.
c) 6.
d) 8.
e) 9.

34 - (IFRS/2017) Seja $A=[a_{ij}]$ uma matriz com três linhas e três colunas, cujos elementos são dados por

$$a_{ij}=\begin{cases} i+j, & \text{se } i=j \\ i-j, & \text{se } i\neq j \end{cases}$$

Então, $\det(A^{-1})$ é igual a

a) $\frac{1}{84}$

b) $\frac{1}{72}$

c) 18

d) 36

e) 42

35 - (UECE/2017) Uma matriz quadrada X = (a_{ij}) é simétrica quando $a_{ij} = a_{ji}$. Se o determinante da matriz simétrica $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & 1 & y \\ z & w & 1 \end{pmatrix}$ é igual a 8, então, o valor da soma x + y + z + w pode ser

a) 9 ou 11.

b) 9 ou 25.

c) 11 ou 25.

d) 9 ou 13.

36 - (UFRR/2017) Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 23 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 23 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Qual o valor de $det(A) + det(B)$?

a) 2;

b) 1;

c) 23;

d) 3;

e) 0.

37 - (UERJ/2017) Observe a matriz:

$$\begin{bmatrix} 3+t & -4 \\ 3 & t-4 \end{bmatrix}$$

Para que o determinante dessa matriz seja nulo, o maior valor real de t deve ser igual a:

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

38 - (Unicamp SP/2017) Sendo *a* um número real, considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Então, A^{2017} é igual a

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

d) $\begin{pmatrix} 1 & a^{2017} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

39 - (UEM PR/2017) Considere as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

A partir delas, é correto afirmar que:

01. A matriz A é uma matriz invertível.
02. A primeira e a última linhas de $A \cdot B$ são iguais.
04. É possível calcular o determinante da matriz B.
08. O determinante da inversa de A é $-1/10$.
16. $A \cdot B = B \cdot A$.

40 - (UEFS BA/2017) Se M = (a_{ij}), i = 1, 2, e j = 1, 2, é a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, então o elemento da matriz oposta ou simétrica da adjunta de M, associado ao a_{21} é

01. –3
02. –2
03. –1
04. 2
05. 3

41 - (FGV /2018) Se A, B e C forem matrizes quadradas de ordem 2, que possuem inversa, e se O for a matriz nula quadrada de ordem 2, podemos afirmar que:

a) Os produtos AB e BA sempre existem mas nunca AB = BA.
b) Se BC = O, então B = 0 ou C = O.
c) $A^2 - C^2 = (A + C)(A - C)$
d) Se CA = CB, então A = B.
e) $(A + B)^2 = A^2 + 2\,AB + B^2$

42 - (FGV /2018) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, quantas matrizes X satisfazem a equação matricial $A \cdot X = B$?

a) duas
b) uma
c) nenhuma
d) três
e) infinitas

43 - (UniCesumar PR/2018) Sobre matrizes e determinantes, assinale a alternativa correta.

a) É possível efetuar a soma de uma matriz de ordem nxm com outra matriz de ordem mxn.
b) Ao se efetuar o produto de uma matriz de ordem 2x3 por sua transposta, obtém-se outra matriz de ordem 3x3.
c) Dada uma matriz quadrada de ordem 3, se multiplicarmos por 5 uma linha dessa matriz, então obtemos uma nova matriz tal que seu determinante será igual ao determinante da matriz anterior multiplicada por 125.
d) Dada uma matriz A e sabendo que existe a sua inversa A^{-1}, se multiplicarmos a matriz A pela sua inversa A^{-1}, obtemos uma matriz identidade de mesma ordem da matriz A.
e) Pode ser calculado o determinante de matrizes que não sejam quadradas.

44 - (IFRS/2018) Sabendo que $\det(A)=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 7 \\ -1 & 2 & -5 \\ 3 & 5 & a \end{vmatrix}=24$, o det(2A) é

a) 24
b) 48
c) 106
d) 192
e) 212

45 - (ESPM SP/2018) Seja A uma matriz quadrada de ordem 3, tal que cada elemento a_{ij} seja igual ao número binomial $\binom{i+j}{i}$. O valor do determinante dessa matriz é:

a) 0
b) 6
c) 5
d) 4
e) 10

46 - (Famema SP/2018) Considere as matrizes $A=(a_{ij})_{2\times 3}$, com $a_{ij}=2i-j$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ m^2-1 & 2 \end{pmatrix}$ e $C=\begin{pmatrix} -m & 0 \\ 3m & 6 \end{pmatrix}$, sendo m um número real. Sabendo que C = A · B, então det C é igual a

a) 0.
b) –12.
c) –8.
d) 6.
e) –4.

47 - (UEA AM/2020) Dada a matriz $A=\begin{pmatrix} x & 3x & x \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ e sendo det A = 6, a soma dos elementos da primeira linha com a soma dos elementos da primeira coluna da matriz A é igual a

a) 21.
b) 17.
c) 23.
d) 15.
e) 13.

48 - (EsPCEx SP/2020) Sejam as matrizes $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & -3\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}$ e $C=\begin{bmatrix}0\\ -12\\ -4\end{bmatrix}$. Se $AB = C$ então $x + y + z$ é igual a

a) -2.
b) -1.
c) 0.
d) 1.
e) 2.

49 - (Udesc SC/2020) Dadas as matrizes $A=\begin{bmatrix}2x-1 & 5y+2\\ 3x-2 & 4y+3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}4\\ -2\end{bmatrix}$ e $C=\begin{bmatrix}2y-12\\ 6x+2\end{bmatrix}$ e sabendo que $A \cdot B = C$, então o valor de x + y é igual a:

a) $\frac{1}{10}$
b) 33
c) 47
d) $\frac{1}{20}$
e) 11

50 - (UESB BA/2020) O determinante de uma matriz quadrada depende, dentre outras coisas, dos índices dos elementos dessa matriz. Para matrizes de ordens 2 e 3 se conhecem as regras práticas para obtenção do número real resultante dessa dependência. Além dos procedimentos de cálculos, os determinantes possuem propriedades interessantes que permitem avançar etapas de cálculo para a obtenção do determinante de uma matriz gerada a partir de outra.

Sendo assim, considere a matriz dada por $\mathrm{A}=\begin{vmatrix}\mathrm{a} & \mathrm{b} & \mathrm{c}\\ \mathrm{d} & \mathrm{e} & \mathrm{f}\\ \mathrm{g} & \mathrm{h} & \mathrm{i}\end{vmatrix}$ cujo determinante é igual a −10.

De acordo com as propriedades dos determinantes, pode-se afirmar que o determinante da matriz $\mathrm{B}=\begin{vmatrix}\mathrm{a} & 4\mathrm{c} & \mathrm{b}\\ 2\mathrm{d} & 8\mathrm{f} & 2\mathrm{e}\\ -3\mathrm{g} & -12\mathrm{i} & -3\mathrm{h}\end{vmatrix}$ é igual a

01. 120
02. −120
03. 240
04. −240
05. 0

51 - (Unicamp SP/2018) Sejam a e b números reais tais que a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ satisfaz a equação $A^2 = aA + bI$, em que I é a matriz identidade de ordem 2. Logo, o produto ab é igual a

a) –2.
b) –1.
c) 1.
d) 2.

52 - (FGV /2018) Seja $A = (a_{ij})_{22}$ uma matriz tal que $a_{ij} = \begin{cases} -j^i, & \text{se } i = j \\ (-i)^j, & \text{se } i \neq j \end{cases}$.

A inversa da matriz A, denotada por A^{-1}, é a matriz

a) $\begin{bmatrix} -2 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} -2 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$

53 - (USCS SP/2019) Considere as matrizes X, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = (b_{ij})_{2x2}$, com $b_{ij} = i \cdot j$. Sabendo que $X \cdot A = B$, o valor do determinante da matriz X é

a) 16.
b) 0.
c) –8.
d) 8.
e) –16.

54 - (UFU MG/2019) O produto de uma matriz quadrada A por ela mesma é denotado por $A^2 = A \cdot A$, o produto de 3 dessas matrizes quadradas é denotado por $A^3 = A \cdot A \cdot A$ e o produto de n dessas matrizes quadradas é denotado por $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n \text{ termos}}$.

Para a matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, o produto A^{2019} é igual a

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

55 - (PUC RS/2019) O polinômio P(x) é definido através do determinante de uma matriz pela expressão:

$$P(x) = \det\begin{pmatrix} -x & 0 & -2 \\ 1 & 2-x & 1 \\ 1 & 0 & 3-x \end{pmatrix}$$

O mesmo polinômio pode ser também representado por

a) $P(x) = (x + 2)(x - 2)(1 - x)$
b) $P(x) = -(x + 3)(x - 2)^2$
c) $P(x) = -(x - 2)(x - 1)^2$
d) $P(x) = (1 - x)(x - 2)^2$

Sistemas Lineares

Equações Lineares

Uma equação linear é aquela que pode ser escrita na forma $a_1x_1 + a_2x_2 + \ \dots \ + a_nx_a = b$, em que $a_1, a_2, \dots, a_3$ são números reais (coeficientes), $x_1, x_2, \dots, x_3$ são incógnitas e b é o termo independente.

São exemplos de equações lineares:

Exemplo 1: **A equação $2x + y = 45$.**
Os coeficientes são 2 e 1, respectivamente, as incógnitas são x e y, e o termo independente é igual a 45.

Exemplo 2: **A equação $-w + 3x + 5y + z = 12$.**
Os coeficientes são -1, 3, 5 e 1, respectivamente, as incógnitas são w, x, y e z. e o termo independente é igual a 12.

Não são exemplos de equações lineares:

Exemplo 1: **A equação $2xy = 6$.**

Exemplo 2: **A equação $x^2 + z = 18$.**

Sistemas de Equações Lineares

O conjunto de m equações lineares com n incógnitas é chamado de sistema linear $m \times n$ (m por n).

Exemplo 1: $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x + 5y = 17 \end{cases}$.

Sistema linear 2×2:

2 equações: $2x + y = 7$ e $x + 5y = 17$.
2 incógnitas: x e y.

Exemplo 2: $\begin{cases} -x + 2y = 1 - 2y \\ 5x + 3y = 11 + 7y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + 4y = 1 \\ 5x - 4y = 11 \end{cases}$.

Sistema linear 2×2:

2 equações: $-x + 2y = 1 - 2y$ e $5x + 3y = 11 + 7y$.
2 incógnitas: x e y.

Exemplo 3: $\begin{cases} 5x + 3y + z = 7 \\ x - y + 2z = -9 \\ -3x + y - 2z = 7 \end{cases}$.

Sistema linear 3×3:

3 equações: $5x + 3y + z = 7, x - y + 2z = -9$ e $-3x + y - 2z = 7$.
3 incógnitas: x, y e z.

Exemplo 4: $\begin{cases} -6x + y + 2z = 10 \\ x - 4y + z = 4 \end{cases}$.

Sistema linear 2×3:

2 equações: $-6x + y + 2z = 10$ e $x - 4y + z = 4$.

3 incógnitas: x, y e z.

Solução do Sistema Linear

A solução de um sistema linear é aquela que satisfaz simultaneamente todas as equações do sistema.

Exemplo 1: $(1, 2)$ **é solução do sistema** $\begin{cases} 2x + 4y = 10 \\ 5x - y = 3 \end{cases}$ **?**

Isso acontece porque quando substituímos x e y pelos valores do conjunto solução $(1, 2)$, respectivamente, a igualdade encontrada é verdadeira:

Ou seja, $2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 10$ e $5 \cdot 1 - 2 = 3$.

Exemplo 2: $(1, -2, -4)$ **é solução do sistema** $\begin{cases} x - y - z = 7 \\ -2x + 3y + 2z = -16 \\ 5x + y + z = -1 \end{cases}$ **?**

Ao substituirmos os valores do conjunto solução nas equações do sistema, temos:

$$1 - (-2) - (-4) = 1 + 2 + 4 = 7.$$
$$-2 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) + 2 \cdot (-4) = -2 - 6 - 8 = -16.$$
$$5 \cdot 1 + (-2) + (-4) = 5 - 2 - 4 = -1.$$

Portanto, $(1, -2, -4)$ é conjunto solução do sistema de equações.

Exemplo 3: $(0, 2)$ **é solução do sistema** $\begin{cases} x + y = 2 \\ 5x - 3y = -4 \end{cases}$ **?**

Ao substituirmos os valores do conjunto solução nas equações do sistema, temos:

$$0 + 2 = 2.$$
$$5 \cdot 0 - 3 \cdot 2 = -6 \rightarrow 5 \cdot 0 - 3 \cdot 2 \neq -4.$$

Portanto, $(0, 2)$ **não** é conjunto solução do sistema de equações.

Classificação dos Sistemas Lineares

Os sistemas lineares são classificados em sistema possível e determinado, sistema impossível e sistema possível e indeterminado.

- **Sistema Possível e Determinado**

É aquele que possui uma única solução.

Exemplo 1: $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ -2x + 4y = 10 \end{cases}$.

Multiplicando a primeira equação por 2, temos:

$$\begin{cases} x + 2y = 7 \quad \cdot (2) \\ -2x + 4y = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 4y = 14 \\ -2x + 4y = 10 \end{cases}.$$

A seguir, pelo método da adição conseguimos encontrar o valor de y.

$$\begin{cases} 2x + 4y = 14 \\ -2x + 4y = 10 \end{cases}$$
$$8y = 24$$

$$y = \frac{24}{8}$$
$$y = 3.$$

Substituindo o valor de y em uma das equações, encontramos o valor de x.

$$x + 2y = 7$$
$$x + 2 \cdot 3 = 7$$
$$x = 7 - 6$$
$$x = 1.$$

Desse modo, percebemos que o sistema de equações admite apenas um valor para x e y, sendo, portanto, $(1, 3)$ a solução do sistema.

$$S = \{(1,3)\}.$$

Exemplo 2: $\begin{cases} \boldsymbol{3x + 2y = 12}, \\ \boldsymbol{2x + 3y = 18}. \end{cases}$

Multiplicando a primeira equação por -2 e a segunda por 3, temos:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 12 & \cdot(-2) \\ 2x + 3y = 18 & \cdot(3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6x - 4y = -24 \\ 6x + 9y = 54 \end{cases}.$$

A seguir, pelo método da adição conseguimos encontrar o valor de y.

$$\begin{cases} -6x - 4y = -24 \\ 6x + 9y = 54 \end{cases}$$
$$5y = 30$$
$$y = \frac{30}{5}$$
$$y = 6.$$

Substituindo o valor de y em uma das equações, encontramos o valor de x.

$$3x + 2y = 12$$
$$3x + 2 \cdot 6 = 12$$
$$3x = 0$$
$$x = 0.$$

Desse modo, percebemos que o sistema de equações admite apenas um valor para x e y, sendo, portanto, $(0, 6)$ a solução do sistema.

$$S = \{(0,6)\}.$$

- **Sistema Impossível**

É aquele que não possui solução.

Exemplo 1: $\begin{cases} \boldsymbol{4x + 6y = 36}, \\ \boldsymbol{2x + 3y = -15}. \end{cases}$

Multiplicando a segunda equação por -2, temos:

$$\begin{cases} 4x + 6y = 36 \\ 2x + 3y = -15 & \cdot(-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 6y = 36 \\ -4x - 6y = 30 \end{cases}.$$

A seguir, pelo método da adição, encontramos:

$$\begin{cases} 4x + 6y = 36 \\ -4x - 6y = 30 \end{cases}$$
$$0y = 66.$$

Desse modo, percebemos que não existe valor real para y que satisfaça à equação $0y = 66$, não havendo, portanto, solução para o sistema.

$$S = \emptyset.$$

Exemplo 2: $\begin{cases} \boldsymbol{x + y = 5}, \\ \boldsymbol{3x + 9y = 12}. \end{cases}$

Multiplicando a primeira equação por -3, temos:

$$\begin{cases} x + y = 5 \quad \cdot(-3) \\ 3x + 3y = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x - 3y = -15 \\ 3x + 3y = 12 \end{cases}.$$

A seguir, pelo método da adição, encontramos:

$$\begin{cases} -3x - 3y = -15 \\ \underline{3x + 3y = 12} \end{cases}$$

$$0y = -3.$$

Desse modo, percebemos que não existe valor real para y que satisfaça à equação $0y = -3$, não havendo, portanto, solução para o sistema.

$$S = \emptyset.$$

- **Sistema Possível e Indeterminado**

É aquele que possui infinitas soluções.

Exemplo 1: $\begin{cases} \boldsymbol{3x + 6y = 30}, \\ \boldsymbol{2x + 4y = 20}. \end{cases}$

Multiplicando a primeira equação por 2 e a segunda por -3, temos:

$$\begin{cases} 3x + 6y = 30 \quad \cdot(2) \\ 2x + 4y = 20 \quad \cdot(-3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x + 12y = 60 \\ -6x - 12y = -60 \end{cases}$$

A seguir, pelo método da adição, encontramos:

$$\begin{cases} 6x + 12y = 60 \\ \underline{-6x - 12y = -60} \end{cases}$$

$$0y = 0.$$

Assim, percebemos que existem infinitos valores reais para y que satisfaça à equação $0y = 0$, havendo, portanto, infinitas soluções para o sistema.

Exemplo 2: $\begin{cases} \boldsymbol{-x + 2y = -5}, \\ \boldsymbol{5x - 10y = 10}. \end{cases}$

Multiplicando a primeira equação por 5, temos:

$$\begin{cases} -x + 2y = -5 \quad \cdot(5) \\ 5x - 10y = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5x + 10y = -25 \\ 5x - 10y = 25 \end{cases}.$$

A seguir, pelo método da adição, encontramos:

$$\begin{cases} -5x + 10y = -25 \\ \underline{5x - 10y = 25} \end{cases}$$

$$0y = 0.$$

Assim, percebemos que existem infinitos valores reais para y que satisfaça à equação $0y = 0$, havendo, portanto, infinitas soluções para o sistema.

Matrizes, Sistemas Lineares e Determinantes

Todo sistema linear $n \times n$, ou seja, com o número de equações igual ao de incógnitas, pode ser escrito como um produto de matrizes.

Exemplo 1: $\begin{cases} 2x + 5y = 21, \\ x + 2y = 9. \end{cases}$

Para escrever um sistema na forma de produto de matrizes montamos uma matriz com os coeficientes das equações e outra com as incógnitas das equações. Em seguida, multiplicamos uma matriz pela outra. O resultado desse produto será a matriz formada pelos termos independentes do sistema.

Assim, $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Exemplo 2: $\begin{cases} 3x + y + z = 25 \\ x + 4y + 2z = 12 \\ 2x + 5y + 3z = 20 \end{cases}$.

Seguindo os mesmos passos do exemplo anterior, temos: $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 12 \\ 20 \end{pmatrix}$.

Atenção!

Quando o determinante D da matriz dos coeficientes de um sistema for diferente de zero, dizemos que o sistema é possível e determinado. Quando o determinante D for igual a zero, o sistema pode ser impossível ou possível indeterminado.

Logo:
$D \neq 0 \rightarrow$ Sistema possível e determinado.
$D = 0 \rightarrow$ Sistema impossível ou sistema possível e indeterminado.

Sistemas Lineares Equivalentes

Sistemas lineares equivalentes são aqueles que possuem o mesmo conjunto solução.

Exemplo 1: $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ x + y = 6 \end{cases}$ **e** $\begin{cases} 5x + 2y = 18 \\ -3x - y = -10 \end{cases}$.

Ao resolvermos esses dois sistemas percebemos que ambos apresentam o mesmo conjunto solução $S = \{(2, 4)\}$.

Exemplo 2: $\begin{cases} 6x + 3y - z = 13 \\ x + y + z = 1 \\ -2x - 5y + z = -5 \end{cases}$ **e** $\begin{cases} 4x + 7y - 5z = 13 \\ x - y - 3z = 5 \\ 2x - 4y - 5z = 9 \end{cases}$.

Ao resolvermos os sistemas percebemos que ambos apresentam o mesmo conjunto solução $S = \{(2, 0, -1)\}$.

Escalonamento de Sistemas Lineares

O escalonamento de sistemas lineares pode ser feito por meio de algumas operações, são elas:

- Trocar a posição das equações;

- Multiplicar todos os termos de uma equação pelo mesmo número real (diferente de zero);
- Aplicar o método da adição nas equações do sistema.

Exemplo 1: **Escalonar o sistema** $\begin{cases} \boldsymbol{x + 2y = 10} \\ \boldsymbol{3x + 4y = 22} \end{cases}$.

$$\begin{cases} x + 2y = 10 \quad \cdot(-3) \\ 3x + 4y = 22 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x - 6y = -30 \\ 3x + 4y = 22 \end{cases}$$
$$-2y = -8.$$

Logo, o sistema $\begin{cases} x + 2y = 10 \\ 3x + 4y = 22 \end{cases}$ escalonado é $\begin{cases} x + 2y = 10 \\ -2y = -8 \end{cases}$.

Para calcular o sistema escalonado, basta resolvermos as equações de baixo para cima. Portanto, resolvendo o sistema escalonado, temos:

$$-2y = -8$$
$$y = 4.$$

$$x + 2y = 10$$
$$x + 2 \,.\, 4 = 10$$
$$x = 2.$$

Logo, o conjunto solução do sistema é $S = \{(2, 4)\}$.

Exemplo 2: **Escalonar o sistema** $\begin{cases} \boldsymbol{2x - y + z = 11} \\ \boldsymbol{x + y + 5z = 13.} \\ \boldsymbol{3x + 2y - z = 8} \end{cases}$

Mudando de posição a primeira e a segunda equação, temos:

$$\begin{cases} x + y + 5z = 13 \\ 2x - y + z = 11. \\ 3x + 2y - z = 8 \end{cases}$$

Em seguida, podemos multiplicar a primeira equação por -2, para anular a incógnita x na segunda equação (pelo método da adição), e por -3 para anular x na terceira equação.

$$\begin{cases} x + y + 5z = 13 \quad .(-2) \quad .(-3) \\ 2x - y + z = 11 \\ 3x + 2y - z = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + 5z = 13 \\ -3y - 9z = -15 \\ -y - 16z = -31 \end{cases}$$

Depois, podemos trocar de posição a segunda e a terceira equação.

$$\begin{cases} x + y + 5z = 13 \\ -y - 16z = -31 \\ -3y - 9z = -15 \end{cases}$$

Para finalizar o escalonamento, podemos multiplicar a segunda equação por -3 e somá-la à terceira equação para anular o y desta.

$$\begin{cases} x + y + 5z = 13 \\ -y - 16z = -31 \quad \cdot(-3) \\ -3y - 9z = -15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + 5z = 13 \\ -y - 16z = -31 \\ 39z = 78 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema escalonado, temos:

$$39z = 78$$

$$z = 2.$$

$$-y - 16 \,.\, 2 = -31$$
$$y = -1.$$

$$x + y + 5z = 13$$
$$x + (-1) + 5.2 = 13$$
$$x = 4.$$

Logo, o conjunto solução do sistema é $S = \{(4, -1, 2)\}$.

Problemas Envolvendo Sistemas Lineares

Exemplo 1: Para fazer brigadeiros, Joyce precisa de leite condensado, cacau em pó e manteiga. Após receber um pedido de 300 brigadeiros, ela percebe que só possui material suficiente para 100 unidades. Comprando apenas o necessário para a encomenda recebida, Joyce compra 10 latas de leite condensado e 400 gramas de cacau em pó. O valor pago por essa compra foi de $150,88$ reais. Sabendo que 1 lata de condensado mais 1 caixa de cacau em pó (200 g) custa $37,88$ reais, quanto Joyce pagou por 200 g de cacau em pó?

Preço da lata de leite condensado = x.
Preço da caixa de cacau em pó = y.

Se 1 caixa de cacau em pó tem 200 g e Joyce comprou 400 g, então foram compradas 2 caixas de cacau em pó.

Montando o sistema, temos:

$$\begin{cases} 10x + 2y = 150{,}88 \\ x + y = 37{,}88 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10x + 2y = 150{,}88 \\ x + y = 37{,}88 \quad .(-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10x + 2y = 150{,}88 \\ -2x - 2y = -75{,}76 \end{cases}$$

Em seguida, resolvemos o sistema:

$$\begin{cases} 10x + 2y = 150{,}88 \\ -2x - 2y = -75{,}76 \end{cases}$$
$$8x = 75{,}12$$
$$x = 9{,}39.$$

Para encontrarmos o valor de y substituímos o valor de x em qualquer uma das equações do sistema. Substituindo na equação $x + y = 37,88$, temos:

$$x + y = 37{,}88$$
$$9{,}39 + y = 37{,}88$$
$$y = 28{,}49.$$

Portanto, Joyce pagou em 200 g (1 caixa) de cacau em pó $28{,}49$ reais.

Exemplo 2: Com as festas de fim de ano se aproximando, Igor e Cleber decidem comprar roupas e sapatos. Ao chegarem na loja, Igor comprou 3 camisas, 2 calças e 1 sapato. Já Cleber, comprou 7 camisas, 5 calças e 3 sapatos. Sabendo que Igor e Cleber pagaram, respectivamente, $520,00$ reais e $1360,00$ reais pelos itens, e que os itens da mesma categoria possuem o mesmo preço, quanto Igor e Cleber pagariam se tivessem comprado apenas 1 camisa, 1 calça e 1 sapato?

Preço da camisa = x.
Preço da calça = y.
Preço do sapato = z.

Montando o sistema, temos:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 520 \\ 7x + 5y + 3z = 1360 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 520 \quad \cdot(-2) \\ 7x + 5y + 3z = 1360 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6x - 4y - 2z = -1040 \\ 7x + 5y + 3z = 1360 \end{cases}$$

Em seguida, somamos as equações para encontrar o valor de $x + y + z$:

$$\begin{cases} -6x - 4y - 2z = -1040 \\ \underline{7x + 5y + 3z = 1360} \end{cases}$$
$$x + y + z = 320.$$

Portanto, seria pago o valor de $320{,}00$ **reais pela compra de** 1 **camisa,** 1 **calça e** 1 **sapato.**

Exercícios

01 - (Unemat MT/2018) Uma dona de casa foi ao supermercado duas vezes em uma mesma semana para comprar arroz e feijão. Na primeira vez ela comprou três pacotes de feijão e dois pacotes de arroz, e na segunda vez, ela comprou um pacote de arroz e dois de feijão.
Sabendo que os preços dos produtos não se alteraram entre uma compra e outra, e que a primeira compra lhe custou R$ 31,00 e a segunda R$ 17,60, assinale a alternativa que corresponde ao preço unitário do pacote de arroz.

a) R$ 2,00
b) R$ 4,20
c) R$ 8,00
d) R$ 9,20
e) R$ 9,50

02 - (IFSC/2018) Os amigos Ian, Flávio, Saulo e Cauã se encontraram na saída do supermercado e, ao constatarem que haviam adquirido os mesmos produtos, das mesmas marcas, perguntaram entre si a quantidade que cada um tinha comprado e qual o valor gasto na compra. As respostas foram as seguintes:

- Ian comprou 1kg de arroz e 1kg de feijão e gastou R$ 8,00;
- Flávio comprou 1kg de arroz e 1 dúzia de ovos e gastou R$ 10,00;
- Saulo comprou 1kg de feijão e 1 dúzia de ovos e gastou R$ 12,00;
- Cauã comprou 1kg de arroz, 1kg de feijão e 1 dúzia de ovos e gastou X reais.

Considerando as respostas dadas pelos quatro amigos, calcule o valor X gasto por Cauã.

Assinale a alternativa CORRETA.

a) R$ 15,00
b) R$ 16,00

c) R$ 17,00
d) R$ 14,00
e) R$ 18,00

03 - (Unifor CE/2018) Em uma grande liquidação, Maria gastou um total de R$ 229,00 na compra de 5 bermudas, todas com preços iguais, e 7 camisetas, sendo todas também com preços iguais.

Se cada bermuda custou R$ 17,00 a mais que cada camiseta, então cada bermuda custou

a) R$ 12,00.
b) R$ 22,00.
c) R$ 27,00.
d) R$ 29,00.
e) R$ 39,00.

04 - (Unicamp SP/2018) Sabendo que k é um número real, considere o sistema linear nas variáveis reais x e y, $\begin{cases} x + ky = 1, \\ x + y = k. \end{cases}$

É correto afirmar que esse sistema

a) tem solução para todo k.
b) não tem solução única para nenhum k.
c) não tem solução se k = 1.
d) tem infinitas soluções se $k \neq 1$.

05 - (Fac. Israelita de C. da Saúde Albert Einstein SP/2018) Um parque tem 3 pistas para caminhada, X, Y e Z. Ana deu 2 voltas na pista X, 3 voltas na pista Y e 1 volta na pista Z, tendo caminhado um total de 8420 metros. João deu 1 volta na pista X, 2 voltas na pista Y e 2 voltas na pista Z, num total de 7940 metros. Marcela deu 4 voltas na pista X e 3 voltas na pista Y, num total de 8110 metros. O comprimento da maior dessas pistas, excede o comprimento da menor pista em

a) 1130 metros.
b) 1350 metros.
c) 1570 metros.
d) 1790 metros.

06 - (Fac. Direito de São Bernardo do Campo SP/2018) Em uma família todos os homens são professores e todas as mulheres são médicas, sendo que o número de mulheres excede o número de homens em 3. No dia dos professores todas as mulheres dessa família compraram presentes para todos os homens, num total de 108 presentes. O total de pessoas nessa família é

a) 15
b) 18
c) 20
d) 21

07 - (Encceja/2019) Durante uma viagem, Pedro, João e Carlos gastaram juntos R$ 450,00. João gastou R$ 30,00 a mais que Pedro e Carlos gastou R$ 60,00 a mais que João.

Nessa viagem, quanto João gastou?

a) R$ 120,00
b) R$ 140,00
c) R$ 150,00
d) R$ 180,00

08 - (OBMEP/2019) Em uma lanchonete, um pão de queijo, dois cachorros-quentes e um suco de laranja custam juntos R$ 31,00; já três pães de queijo, três cachorros-quentes e dois sucos de laranja custam juntos R$ 59,00. Qual é a diferença entre os preços de um cachorro-quente e de um pão de queijo?



a) R$ 1,00
b) R$ 1,50
c) R$ 2,00
d) R$ 2,50
e) R$ 3,00

09 - (IFPR/2019) Um fábrica de chocolate produz dois tipos de chocolates, o basic e o power. A embalagem de 80 g do power é vendida a R$ 17,00 e um quilo do basic é vendido a R$ 140,00. Um amante de chocolate comprou os dois tipos de chocolates gastando R$ 123,60. Sabendo que ele comprou 2 embalagens de 80 g do chocolate power, assinale a alternativa que apresenta a quantidade, em gramas, do chocolate basic comprada por ele.

a) 520.
b) 640.
c) 450.
d) 700.

10 - (FGV /2019) Um sistema linear com duas equações e três incógnitas

a) é sempre indeterminado.
b) pode ter solução única.
c) admite sempre a solução trivial.
d) pode ser impossível.
e) pode apresentar determinante da matriz completa igual a 0.

11 - (UFMS/2019) Para atrair clientes no fim de semana, uma padaria da cidade reduziu o preço das sobremesas. Bia, Nina e Duda decidiram aproveitar a promoção, mas quando chegaram só havia um bolo, um pudim e uma torta, todos vendidos por pedaços de mesmo peso. Bia comprou 3 pedaços de bolo, 2 pedaços de pudim e 2 pedaços de torta; no total a compra saiu por R$ 29,00. Nina comprou 1 pedaço de cada uma das sobremesas, e o valor da compra foi R$ 13,00. Duda comprou 2 pedaços de bolo, 4 pedaços de pudim e 2 pedaços de torta. Sua compra totalizou R$ 35,00. Qual o valor do pedaço do bolo, do pudim e da torta, respectivamente?

a) R$ 5,00; R$ 5,00; R$ 2,00.
b) R$ 3,00; R$ 4,50; R$ 5,50.
c) R$ 2,00; R$ 5,00; R$ 6,50.
d) R$ 3,00; R$ 5,00; R$ 5,00.
e) R$ 1,00; R$ 6,00; R$ 2,00.

12 - (ESPM SP/2019) Em relação ao sistema linear

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \\ x + 3y - 2z = 1 \end{cases}$$

, pode-se afirmar que:

a) Ele é possível e determinado e sua solução é (2, 3, 5).
b) Ele é possível e determinado e sua solução é (0, –3, –5).
c) Ele é impossível.
d) Ele é possível e indeterminado e sua solução é (k + 1, 3k, 5k), com k real.
e) Ele é possível e indeterminado e sua solução é (k, 2k, 1 + 3k), com k real.

13 - (ESPM SP/2019) Quando eu nasci, meu pai tinha 32 anos. Hoje, o produto das nossas idades é igual a 900. A soma das nossas idades atuais é igual a:

a) 72
b) 68
c) 64
d) 83
e) 75

14 - (Mackenzie SP/2019) Numa pesquisa, em três supermercados, uma dona de casa constatou que os três supermercados S, P e W tinham preços diferentes por produtos de mesmo tipo, marca e quilo, conforme tabela abaixo.

	arroz	açúcar	café
S	R$ 40,00	R$ 50,00	R$ 30,00
P	R$ 50,00	R$ 40,00	R$ 40,00
W	R$ 50,00	R$ 40,00	R$ 30,00

Comprando x quilos de arroz, y quilos de açúcar e z quilos de café, tanto no supermercado S quanto P, a dona de casa gastaria a mesma quantia de R$ 260,00; comprando as mesmas quantidades no supermercado W, ela economizaria R$ 10,00. O valor de x + y + z é

a) 6
b) 5
c) 4
d) 3
e) 2

15 - (IFSC/2019) Em um belo dia de sol, Isabelle, Fabiana, Sofia e Clara foram juntas à praia. Lá chegando, resolveram brincar de fazer montes de areia. Após o término da brincadeira, observaram que a quantidade de montes de areia feitos por:

- Isabelle, Fabiana e Sofia, juntas, totalizam 27 montes;
- Fabiana, Sofia e Clara, juntas, totalizam 32 montes;
- Sofia, Clara e Isabelle, juntas, totalizam 28 montes;
- Clara, Isabelle e Fabiana, juntas, totalizam 33 montes.

Quantos montes de areia foram feitos pelas 4 (quatro) meninas juntas?

a) 80 montes
b) 120 montes
c) 40 montes
d) 60 montes
e) 100 montes

16 - (IFAL/2019) Pretendendo comprar um novo brinquedo, um garoto consegue juntar, entre moedas de R$ 0,25 e R$ 0,50, um total de 500 moedas, perfazendo uma quantia de R$ 180,00. Podemos dizer que o garoto juntou quantas moedas de R$ 0,25 e de R$ 0,50, respectivamente:

a) 360 e 180
b) 320 e 200
c) 280 e 220
d) 240 e 240
e) 260 e 200

17 - (ETEC SP/2019) A Mata Atlântica é uma série de ecossistemas de florestas tropicais da América do Sul que abriga uma diversidade de espécies endêmicas. Estudos estimam que haja um total de 8 732 espécies entre plantas e vertebrados endêmicos nesse bioma, e que a diferença entre a quantidade daquelas plantas e a quantidade destes vertebrados, nessa ordem, seja de 7 268 espécies.

Nessas condições, a quantidade de plantas endêmicas nesse bioma é

a) 732.
b) 1 464.
c) 5 813.
d) 8 000.
e) 16 000.

18 - (ETEC SP/2019) Um grupo de amigos decidiu participar de um jogo de escapada conhecido como "*Escape room*". Nesse jogo, os participantes são trancados dentro de uma sala e devem resolver uma série de enigmas para "escapar" (sair) da sala.

Ao entrarem na sala, eles encontraram dois blocos de madeira de massas x e y, em gramas, apoiados numa bancada. Ao lado, havia um papel com os seguintes dizeres: "O quádruplo de x mais o dobro de y resulta em 1 400. O dobro de x mais o quádruplo de y resulta em 1 000. A senha do cadeado é igual ao valor obtido numa balança digital quando os dois blocos são colocados simultaneamente." Abaixo, eles viram um baú com um cadeado de combinação com 3 dígitos e decidiram abri-lo. Sabendo que eles conseguiram abrir o cadeado resolvendo esse enigma, o código utilizado foi

a) 250.
b) 300.
c) 350.
d) 400.
e) 450.

19 - (UFT TO/2019) Um produtor de ovos de galinha e de codorna vende seus produtos na feira da cidade. O cliente A comprou meia dúzia de ovos de galinha e duas dúzias de ovos de codorna, pagando R$ 10,00. O cliente B comprou uma dúzia de ovos de galinha e uma dúzia de ovos de codorna, pagando R$ 11,00. Sabendo-se que não houve alteração nos preços dos ovos, é CORRETO afirmar que o valor de meia dúzia de ovos de codorna é:

a) R$ 1,50
b) R$ 3,00
c) R$ 4,00
d) R$ 4,50

20 - (Unioeste PR/2019) José precisa pesar três peças de metal A, B e C. Mas, a balança que ele dispõe não é precisa para pesos menores do que 1kg. José decide então pesar as peças de duas em duas. A e B juntas pesam 1600g, B e C juntas pesam 1400g e A e C juntas pesam 1700g. Nestas condições, qual o peso da peça mais leve?

a) 550g.
b) 650g.
c) 700g.
d) 950g.
e) 1400g.

21 - (IBMEC SP Insper/2019) Uma instituição social sem fins lucrativos lançou uma revista como meio de arrecadar dinheiro. O valor dessa revista é composto, de modo não igualitário, pelo valor do custo da fabricação, pelo valor dos impostos incidentes, e o valor restante, que corresponde a 5/12 do valor da revista, é destinado para a instituição.

Para baixar o valor da revista a fim de conseguir maior número de vendas, foi feito um acordo que eliminou integralmente o valor do imposto incidente. Com isso, o valor destinado à instituição passou a corresponder a 5/11 do novo valor da revista.

Sabendo-se que o custo de fabricação é R$ 2,10, é correto dizer que, com a retirada do imposto, o valor da revista baixou

a) R$ 0,25.
b) R$ 0,35.
c) R$ 0,45.
d) R$ 0,55.
e) R$ 0,65.

22 - (IFBA/2019) Hoje eu tenho x anos e meu irmão y anos. Há 15 anos meu irmão tinha o dobro de minha idade. Então a minha idade x, em anos, sabendo que daqui a cinco anos nossas idades somarão 70 anos, é:

a) 10
b) 20
c) 15
d) 30
e) 25

23 - (IFBA/2019) Três amigos, João, Pedro e Manuel, após uma partida de futebol, falando sobre o número de gols que fizeram, pronunciaram as seguintes frases:

João: Se subtrairmos de 13 o número de gols que eu fiz, essa quantidade será igual à adição do número de gols de Pedro com o dobro do número de gols de Manuel.
Pedro: Se subtrairmos de 10 o número de gols que eu fiz, essa quantidade será igual à adição do número de gols de Manuel com o dobro do número de gols de João.
Manuel: Se subtrairmos de 9 o número de gols que eu fiz, essa quantidade será igual à adição do número de gols de João com o dobro do número de gols de Pedro.

Quantos gols João, Pedro e Manuel fizeram juntos?

a) 6
b) 14
c) 10
d) 12
e) 8

24 - (UEA AM/2020) Gustavo tem duas contas correntes bancárias, A e B. Fazendo cálculos, ele constatou que se depositar R$ 1.260,00 na conta B, esta passará a ter um saldo correspondente ao dobro do saldo da conta A. Entretanto, se depositar R$ 1.260,00 na conta A, ambas ficarão com saldos iguais. Originalmente, as duas contas têm, juntas, um total de

a) R$ 5.800,00.
b) R$ 5.520,00.
c) R$ 5.500,00.
d) R$ 6.300,00.
e) R$ 6.560,00.

25 - (IFPI/2020) Carla fez uma prova de História com o seguinte sistema de avaliação: em cada questão certa, ela ganha 4 pontos e, em cada questão errada, são descontados 2 pontos. Na prova com 10 questões, a pontuação de Carla foi de 16 pontos. Quantas questões Carla acertou?

a) 9
b) 8
c) 7
d) 6
e) 5

26 - (IFPI/2020) O caixa automático de um banco só libera notas de R$ 10,00 e notas de R$ 20,00. O Sr. Pedro retirou desse caixa a importância de R$ 260,00, num total de 18 notas. Quantas notas de R$ 20,00 o Sr. Pedro retirou?

a) 6
b) 7
c) 8
d) 9
e) 10

27 - (Uniube MG/2020) Um clube de xadrez promoveu um torneio em que participaram 280 pessoas, entre crianças e adolescentes. Cada criança jogou 3 vezes e cada adolescente jogou 5 vezes, em um total de 574 partidas. Cada partida foi disputada entre 2 desses jogadores e permitiu-se que crianças jogassem contra adolescentes e também que dois jogadores quaisquer disputassem mais de uma partida. A diferença entre o número de adolescentes e o número de crianças nesse torneio foi

a) 20.
b) 28.
c) 32.
d) 24.
e) 36.

28 - (IFPI/2020) Um caixa eletrônico de um banco só libera notas de R$ 10,00 e notas de R$ 50,00. Se uma pessoa retirar desse caixa R$ 680,00, recebendo 20 notas, quantas notas de R$ 10,00 e quantas notas de R$ 50,0 ele obterá, respectivamente?

a) 5 e 15
b) 6 e 14
c) 7 e 13
d) 8 e 12
e) 9 e 11

29 - (Fac. Cesgranrio RJ/2020) Maria comprou uma caixa com 48 balas. Ela retirou algumas balas da caixa e as colocou em um saco, para dar ao seu filho Pedro. Em seguida, retirou da caixa mais algumas balas e as colocou em outro saco para dar a sua filha, Joana. Maria observou que restaram 16 balas na caixa e que, no saco destinado a Pedro, havia 4 balas a menos do que no saco destinado a Joana.

Quantas balas Maria colocou no saco destinado a Pedro?

a) 14
b) 15
c) 16
d) 17
e) 18

30 - (Unifor CE/2020) Os departamentos A, B e C de uma empresa de tecnologia do estado do Ceará devem receber a quantia de 850 mil reais para melhorias de cada departamento. Por razões estratégicas, A deve ficar com a mesma quantia que os departamentos B e C juntos e B deve receber 50 mil reais a mais que C.

Nessas condições, temos que:

a) C receberá 150.000 reais.
b) C receberá 175.000 reais.
c) B receberá 225.000 reais.
d) B receberá 250.000 reais.
e) A receberá 425.000 reais.

31 - (UFRGS RS/2020) Para que o sistema de equações lineares $\begin{cases} x + y = 7 \\ ax + 2y = 9 \end{cases}$ seja possível e determinado, é necessário e suficiente que

a) $a \in IR$.
b) a = 2.
c) a = 1.
d) $a \neq 1$.
e) $a \neq 2$.

32 - (UECE/2020) Na sala de reuniões de um condomínio, há mesas de 4, 5 e 6 lugares, perfazendo o total de 22 mesas. Na última reunião que houve, compareceram 113 pessoas, que foram acomodadas nessas mesas, ocupando todos os lugares. Se o número de mesas com 6 lugares era o dobro do número de mesas com 5 lugares, então, o número de mesas com 4 lugares era

a) 10.
b) 7.
c) 4.
d) 13.

33 - (UFMS/2020) Uma cerâmica da cidade de Três Lagoas comercializa 3 tipos de tijolos: T1, T2 e T3. A tabela a seguir indica pedidos de tijolos realizados por três clientes:

	T1	T2	T3
Cliente 1	5.000	2.000	3.000
Cliente 2	1.000	4.500	6.000
Cliente 3	2.500	4.000	5.500

Sabendo que o cliente 1, o cliente 2 e o cliente 3 pagaram por seus pedidos, respectivamente, a quantia de R$ 16.000,00, R$ 19.500,00 e R$ 20.000,00, é correto afirmar que:

a) o valor de cada unidade do tijolo T1 é R$ 2,00.
b) os três tipos de tijolo possuem o mesmo preço por unidade.
c) o valor de cada unidade do tijolo T3 R$ 1,50.
d) a matriz formada pelos valores de cada unidade dos três tipos de tijolo é de ordem 1x3.
e) o valor de cada unidade do tijolo T2 é R$ 1,00.

34 - (IFPR/2020) Considere $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 4y + 1 = 2b \\ x + y + az = 3 \end{cases}$, sendo a e b números reais.

O sistema linear tem solução única, se:

a) $a \neq -1$
b) $b \neq -1$
c) $a = -1$ e $b = -4$
d) $a = -1$ e $b \neq -4$

35 - (FGV /2020) Para que o preço atual de um produto ficasse igual ao preço dele 5 anos atrás, seria necessário dar um desconto de 60%. Sabendo-se que a média entre o preço atual desse produto e o preço praticado há 5 anos é igual a R$ 168,00, a diferença entre o preço atual e o preço de 5 anos atrás é igual a

a) R$ 144,00.
b) R$ 126,00.
c) R$ 96,00.
d) R$ 72,00.
e) R$ 68,00.

36 - (FGV /2020) Considere o sistema linear de equações, nas incógnitas *x* e *y*.

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - y = -6 \\ 4x + y = m \end{cases}$$

Ele é possível e determinado para um único valor de *m*.

Podemos afirmar que este valor é:

a) 1.
b) 3.
c) 0
d) 2.

e) –1.

37 - (Famema SP/2020) Um grupo de N amigos decidiu comprar um presente para uma de suas professoras. O preço do presente é R$ 396,00 e será dividido em partes iguais entre eles. No dia de comprar o presente, um dos amigos desistiu de participar da compra, o que resultou em um aumento de R$ 3,00 na parte de cada um dos amigos que restou no grupo. O número N de amigos no grupo original era igual a

a) 11.
b) 18.
c) 12.
d) 9.
e) 6.

38 - (ESPM SP/2020) Uma prova é constituída de duas partes: uma parte A, com 10 testes de múltipla escolha e uma parte B, com 10 testes do tipo certo/errado. Os testes da parte A têm o mesmo peso. Os da parte B também, embora diferente do anterior.

- Ana acertou 6 testes da parte A e 7 da parte B, obtendo a nota de 51 pontos.
- Bia acertou 5 testes da parte A e 5 da parte B, obtendo a nota de 40 pontos.
- Carla acertou 8 testes da parte A e 3 da parte B.

Podemos concluir que a nota obtida pela Carla foi de:
a) 45 pontos
b) 49 pontos
c) 47 pontos
d) 53 pontos
e) 51 pontos

39 - (Fac. Direito de São Bernardo do Campo SP/2020) Um estudante comprou três livros: um sobre Direito Civil, um sobre Direito Constitucional e outro sobre Direito Tributário, pagando no total R$ 350,00. Sabe-se que o preço do livro de Direito Civil é R$ 50,00 mais caro do que a média aritmética dos preços dos outros dois livros, e que o preço do livro sobre Direito Tributário é 50% maior do que o preço do livro sobre Direito Constitucional. A diferença entre o maior e o menor preço é de

a) R$ 70,00
b) R$ 60,00
c) R$ 40,00
d) R$ 30,00

40 - (UERJ/2020) Os números inteiros x e y satisfazem às seguintes equações:

$$\begin{cases} \frac{2}{5}x + \frac{3}{5}y = 37 \\ x - y = 30 \end{cases}$$

Logo, x + y é igual a:

a) 80
b) 85

c) 90
d) 95

41 - (Unioeste PR/2020) Em uma lanchonete, registrou-se o consumo de 3 mesas, como mostra o quadro abaixo. Considerando que há preços únicos para cada tipo de produto da lanchonete e sabendo-se que o consumo total na mesa 2 foi de R$ 25,00 e na mesa 3 foi de R$ 70,00, então é **CORRETO** afirmar que:

	Produto		
Mesa	**Café**	**Misto quente**	**Pão de queijo**
1	6	3	8
2	3	2	4
3	9	5	12

a) O preço unitário do misto quente é R$ 4,50.
b) É possível determinar o valor do consumo total na mesa 1.
c) É possível determinar o preço unitário de todos os produtos.
d) É possível concluir que o preço do café é mais caro que o do pão de queijo.
e) O problema consiste em um sistema de equações lineares que não possui nenhuma solução.

42 - (Fuvest SP/2020) Uma agência de turismo vendeu um total de 78 passagens para os destinos: Lisboa, Paris e Roma. Sabe-se que o número de passagens vendidas para Paris foi o dobro do número de passagens vendidas para os outros dois destinos conjuntamente. Sabe-se também que, para Roma, foram vendidas duas passagens a mais que a metade das vendidas para Lisboa. Qual foi o total de passagens vendidas, conjuntamente, para Paris e Roma?
a) 26
b) 38
c) 42
d) 62
e) 68

43 - (Fatec SP/2020) Amanda resolveu complementar seu orçamento doméstico como motorista por aplicativo. Como já possui um automóvel inscreveu-se numa plataforma em que o valor cobrado do passageiro por viagem depende basicamente de três fatores:

- o valor fixo de R$ 2,00 cobrado no início de qualquer viagem;
- o valor de R$ 0,26 por minuto de viagem;
- o valor de R$ 1,40 por quilômetro rodado.

Além disso, Amanda sabe que

- a plataforma do aplicativo retém um quarto do valor pago pelo passageiro;
- terá um custo de combustível no valor de R$ 0,28 por quilômetro rodado.

Suponha que ela realizará apenas viagens de 5 km, com duração de 10 minutos cada.

Considerando que Amanda deseja receber mensalmente o valor líquido mínimo de R$ 2.190,00, o menor número de viagens mensais, como motorista de aplicativo, que Amanda precisa fazer é

a) 280
b) 300
c) 320
d) 340
e) 360

44 - (PUC Campinas SP/2021) Uma padaria produz bolos de três tamanhos utilizando ovos, farinha e açúcar nas quantidades indicadas na tabela. Ao final do dia constatou-se que para a produção de bolos foram gastos 186 ovos, 9,3 kg de farinha e 5,35 kg de açúcar.

Bolo	Ovos	Farinha (g)	Açúcar (g)
Pequeno	4	200	100
Médio	6	300	150
Grande	8	400	300

O número de bolos grandes produzidos nesse dia foi:

a) 10
b) 15
c) 7
d) 12
e) 8

45 - (Univag MT/2021) Duas irmãs, Inaiá e Janaína, ganharam de presente uma mesma quantia em dinheiro. Inaiá gastou um valor fixo diário por 11 dias, de modo que sobraram R$ 320,00 do total que ela recebeu. Janaína também gastou um valor fixo diário, só que por 19 dias, restando a ela R$ 491,00 do total que recebeu. Se o valor diário que Janaína gastou corresponde à metade do valor diário gasto por Inaiá, então a quantia em dinheiro que cada uma das irmãs recebeu de presente foi

a) R$ 1.574,00.
b) R$ 1.783,00.
c) R$ 1.662,00.
d) R$ 1.992,00.
e) R$ 1.365,00.

46 - (FMABC SP/2021) No início de uma feira de profissões, a razão entre o número de alunos participantes do ensino médio (EM) e o número de alunos participantes do ensino fundamental (EF) era igual a 4,8. Ao meio dia, 90 alunos do EM e 90 alunos do EF foram embora, e a razão passou a ser de 8,4. O total de alunos, desses dois níveis, que estiveram presentes no início da feira foi

a) 1 119.
b) 1 187.
c) 1 025.
d) 1 161.
e) 1 073.

47 - (Famerp SP/2021) Para fazer uma receita culinária são utilizados apenas os ingredientes A e B. Cada 100 g do ingrediente A custa R$ 4,00 e cada 100 g do ingrediente B custa R$ 8,00. Usando a proporção correta dos ingredientes, um cozinheiro utilizou um total de 1 kg de ingredientes para fazer essa receita, ao custo de R$ 56,00. A porcentagem do ingrediente B nessa receita é de

a) 45%.
b) 32%.
c) 40%.
d) 50%.
e) 66%.

48 - (Unifor CE/2021) O Dia das Crianças é comemorado em 12 de outubro em todo o território nacional. Nessa data, homenageamos as crianças de todo país e, por isso, diversos eventos infantis ocorrem nesse dia. No ano de 2020, muitos eventos foram cancelados por conta do isolamento social decorrente do contexto de pandemia causada pelo novo sorotipo de coronavírus, COVID-19. Um professor de matemática resolveu fazer uma brincadeira com os seus filhos no dia das crianças. Ele comprou uma determinada quantidade de doces de chocolate e uma determinada quantidade de doces de morango. Ele chamou de 'm' a quantidade de doces de chocolate e de 'n' a quantidade de doces de morango, e propôs o seguinte problema para os seus filhos descobrirem o total de doces que ele comprou: sabe-se que o produto dos números inteiros 'm' e 'n' é igual a 572, que a divisão de "m" por 'x' tem quociente 4 e resto 2 e que a divisão de 'n' por x + 1 tem também quociente 4 e resto 2. O valor de m + n encontrado pelos filhos do professor é igual a



a) 36.
b) 38.
c) 42.
d) 46.
e) 48.

49 - (Fuvest SP/2021) Uma treinadora de basquete aplica o seguinte sistema de pontuação em seus treinos de arremesso à cesta: cada jogadora recebe 5 pontos por arremesso acertado e perde 2 pontos por arremesso errado. Ao fim de 50 arremessos, uma das jogadoras contabilizou 124 pontos. Qual é a diferença entre as quantidades de arremessos acertados e errados dessa jogadora?

a) 12
b) 14
c) 16
d) 18
e) 20

50 - (ENEM MEC/2022) Três amigos, A, B e C, se encontraram em um supermercado. Por coincidência, estavam comprando os mesmos itens, conforme o quadro.

Amigos	Arroz (kg)	Feijão (kg)	Macarrão (kg)
A	3	2	4
B	2	3	3
C	2	2	2

Os amigos estavam muito entretidos na conversa e nem perceberam que pagaram suas compras, pegaram seus trocos e esqueceram seus comprovantes. Já longe do supermercado, "A" lembrou que precisava saber o quanto pagou por um quilo de arroz e dois quilos de macarrão, pois estava comprando para sua vizinha e esperava ser ressarcido. "B", que adorava desafios matemáticos, disse que pagou suas compras com R$ 40,00 e obteve troco de R$ 7,30, e que conseguiria determinar o custo desses itens se os amigos dissessem como pagaram e quanto foram seus respectivos trocos. "A" disse que pagou com R$ 40,00 e obteve troco de R$ 4,00, e "C" pagou com R$ 30,00 e obteve troco de R$ 5,40.

A vizinha de "A" deve a ele pela compra, em reais, o valor de

a) 8,10.
b) 10,00.
c) 11,40.
d) 12,00.
e) 13,20.

51 - (UEG GO/2022) Uma empresa fabrica dois tipos de embalagens, A e B, e dispõe de duas máquinas, uma para corte e outra para montagem. Para a fabricação de cada embalagem do tipo A são gastos 7 minutos na máquina de corte e 9 minutos na máquina de montagem; para cada embalagem do tipo B são gastos 10 minutos na máquina de corte e 20 minutos na máquina de montagem. Sabendo-se que a máquina de corte é utilizada por 6 horas e a máquina de montagem por 9,5 horas, as quantidades de embalagens fabricadas do tipo A e do tipo B são, respectivamente:

a) 9 e 33 unidades
b) 10 e 29 unidades
c) 26 e 18 unidades
d) 30 e 15 unidades
e) 50 e 25 unidades

52 - (UEG GO/2022) Na chácara de Maria são criados porcos e galinhas. O total de animais é igual a 123 e o total de patas é igual a 346. As quantidades de porcos e de galinhas são, respectivamente:

a) 73 e 50
b) 68 e 55
c) 50 e 73
d) 55 e 68
e) 45 e 78

53 - (FMABC SP/2022) Sabe-se que um aluno deu respostas corretas para 25 das 30 primeiras questões de uma prova objetiva e que respondeu corretamente à metade do número de questões restantes. Se o número de questões respondidas corretamente correspondeu a $\frac{5}{8}$ do número total de questões dessa prova, então o número de questões que esse aluno acertou foi igual a

a) 50.
b) 60.
c) 45.
d) 40.
e) 55.

54 - (ENEM MEC/2022) Um parque tem dois circuitos de tamanhos diferentes para corridas. Um corredor treina nesse parque e, no primeiro dia, inicia seu treino percorrendo 3 voltas em torno do circuito maior e 2 voltas em torno do menor, perfazendo um total de 1 800 m. Em seguida, dando continuidade a seu treino, corre mais 2 voltas em torno do circuito maior e 1 volta em torno do menor, percorrendo mais 1 100 m.

No segundo dia, ele pretende percorrer 5 000 m nos circuitos do parque, fazendo um número inteiro de voltas em torno deles e de modo que o número de voltas seja o maior possível.

A soma do número de voltas em torno dos dois circuitos, no segundo dia, será

a) 10.
b) 13.
c) 14.
d) 15.
e) 16.

55 - (PUC Campinas SP/2022) Como forma de incentivo à cultura, um museu disponibilizou ingressos gratuitos para serem distribuídos a estudantes de escolas públicas. A secretaria de educação distribuiu 12 ingressos por escola e sobraram 4 ingressos. Ao ser lembrada de que duas novas escolas haviam sido inauguradas, a secretaria redistribuiu os ingressos, ficando cada escola com 10 ingressos, sem sobras. O número de ingressos disponibilizados pelo museu foi:

a) 76
b) 64
c) 52
d) 100
e) 88

56 - (Unicamp SP/2022) Certo país adquiriu 5.000.000 de doses das vacinas Alfa, Beta e Gama, pagando um preço de $40.000.000,00 pelo total. Cada dose das vacinas Alfa, Beta e Gama custou $5,00, $10,00 e $20,00, respectivamente. Sabendo que o número de doses adquiridas da vacina Beta é o triplo do número de doses adquiridas da vacina Gama, o número de doses adquiridas da vacina Alfa foi de:

a) 1.500.000.
b) 2.000.000.
c) 2.500.000.
d) 3.000.000.

57 - (Famema SP/2022) Considere o sistema linear $\begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ -x + y + 2z = 3 \\ x - y + az = b \end{cases}$, onde *a* e *b* são constantes reais.

Sobre esse sistema, assinale a afirmativa correta.

a) Se $a = -3$ e $b = -2$, então o sistema é impossível.
b) Se $a = -2$ e $b = -2$, então o sistema é possível indeterminado.
c) Se $a = -2$ e $b = -3$, então o sistema é impossível.
d) Se $a = -3$ e $b = -3$, então o sistema é possível determinado.
e) Se $a \neq -3$ e $b = -2$, então o sistema é possível determinado.

58 - (Famerp SP/2023) Ana e Beto estão poupando dinheiro individualmente. Atualmente, o dinheiro que Ana e Beto já pouparam está na razão de 13 para 7, nessa ordem. Se Ana desse para Beto R$ 90,00 da sua poupança, os dois ficariam com poupanças de mesmo valor. Na situação dada, a poupança atual de Beto é de

a) R$ 360,00.
b) R$ 240,00.
c) R$ 300,00.
d) R$ 210,00.
e) R$ 390,00.

59 - (Famema SP/2023) Um cinema vende ingressos a preço único. Com o preço atual dos ingressos, o cinema tem conseguido vender apenas metade da lotação máxima da sala, com arrecadação total de R$ 1.408,00. Diante dessa situação, o gerente decidiu abaixar o preço do ingresso em R$ 5,00 e, com o novo valor, o cinema passou a preencher sua lotação máxima, com arrecadação total de R$ 2.176,00. O percentual de desconto dado pelo gerente no preço do ingresso em relação ao que era anteriormente cobrado foi de, aproximadamente,

a) 22,7%.
b) 23,7%.
c) 26,7%.
d) 23,1%.
e) 23,3%.

Função Constante e Função Afim

Função Afim

A função afim, também chamada de função polinomial do $1°$ grau, é uma aplicação $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa cada $x \in \mathbb{R}$ o elemento $f(x) = ax + b$, em que $a \neq 0$ e b são números reais dados. Quando $a = 0$, a função $f(x) = b$ recebe o nome de função constante.

São exemplos de função afim:

Exemplo 1: $\boldsymbol{f(x) = x + 2.}$
Os coeficientes a e b são, respectivamente, 1 e 2.

Exemplo 2: $\boldsymbol{f(x) = \frac{4}{3}x - 5.}$
Os coeficientes a e b são, respectivamente, $\frac{4}{3}$ e -5.

Exemplo 3: $\boldsymbol{f(x) = -5x + 1.}$
Os coeficientes a e b são, respectivamente, -5 e 1.

Exemplo 4: $\boldsymbol{f(x) = 3x.}$
Os coeficientes a e b são, respectivamente, 3 e 0.

O número real a é denominado coeficiente angular. Já o b denomina-se coeficiente linear, intuitivamente é relacionado à parte fixa da função.

Observe as situações abaixo:

Problema 1: Os vendedores de uma loja de roupas recebem um salário no valor de $R\$\ 1800,00$. Percebendo a necessidade de motivar seus funcionários, o dono da loja decidiu que seus vendedores passariam a receber, além dos $1800,00$ reais, $2,00$ reais por cada peça de roupa vendida.

Nessa situação percebemos que a parte fixa do salário é 1800,00 reais, enquanto a parte variável é igual a 2,00 reais vezes o número de peças de roupas vendidas (x).

Desse modo, a função que representa o salário dos vendedores é representada por:

$$f(x) = ax + b$$
$$f(x) = 2x + 1800.$$

Problema 2: Uma piscina com capacidade para 1000 litros, inicialmente cheia, deve ser completamente esvaziada. Para isso, é aberto um ralo que permite a saída de 20 litros de água por minuto.

Nesta segunda situação temos que a piscina tem um volume inicial de 1000 litros e perde 20 litros de água a cada 1 minuto. Considerando x o tempo, em minutos, a função que representa o volume de água na piscina em relação ao tempo decorrido, desde a abertura do ralo, é:

$$f(x) = ax + b$$
$$f(x) = -20x + 1000.$$

Valores de uma Função Afim

O valor numérico de uma função afim, para $x = x_0$, é dado por $f(x_0) = ax_0 + b$. Portanto, considerando a função afim $f(x) = 3x - 12$, temos:

Para $x = 5$, que

$$f(5) = 3 \cdot 5 - 12 \Rightarrow f(5) = 3.$$

Para $x = -4$, que

$$f(-4) = 3 \cdot (-4) - 12 \Rightarrow f(-4) = -24.$$

Para $x = \frac{13}{3}$, que

$$f\left(\frac{13}{3}\right) = 3 \cdot \frac{13}{3} - 12 \Rightarrow f\left(\frac{13}{3}\right) = 1.$$

Para $x = 0, que$

$$f(0) = 3 \cdot 0 - 12 \Rightarrow f(0) = -12.$$

Atenção!

Propriedade:
Uma função afim é crescente quando x_1 **menor** que x_2 implicar que $f(x_1)$ é **menor** que $f(x_2)$.
A função é decrescente quando x_1 **menor** que x_2 implicar que $f(x_1)$ é **maior** que $f(x_2)$.

Isto quer dizer que:
$a > 0 \rightarrow$ Função crescente;
$a < 0 \rightarrow$ Função decrescente.

Determinação de uma Função Afim

Para determinar uma função afim $f(x) = ax + b$, ou seja, encontrar os valores dos coeficientes a e b, é necessário conhecer duas imagens, $f(x_1)$ e $f(x_2)$, para x_1 e x_2 reais, com $x_1 \neq x_2$.

Exemplo 1: Determinar a função afim definida pelos valores $f(1) = 1$ e $f(5) = -3$.

Passo 1: Substituir os valores de $f(x)$ na fórmula geral da função afim $f(x) = ax + b$.
Para $f(1) = 1$, temos

$$f(x) = ax + b \Rightarrow f(1) = a \cdot 1 + b \Rightarrow 1 = a + b.$$

Logo,

$$a + b = 1.$$

Para $f(5) = -3$, obtemos que

$$f(x) = ax + b \Rightarrow f(5) = a \cdot 5 + b \Rightarrow -3 = 5a + b.$$

Portanto,

$$5a + b = -3.$$

Passo 2: Resolver o sistema de equações formadas com a substituição dos valores de $f(x)$, pelo método da adição.

$$\begin{cases} a+b=1, \\ 5a+b=-3\,.\,(-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=1, \\ -5a-b=3 \end{cases} \Rightarrow -4a=4 \Rightarrow a=-1.$$

Passo 3: Substituir o valor encontrado em uma das equações do Passo 2.

$$a+b=1 \Rightarrow -1+b=1.$$

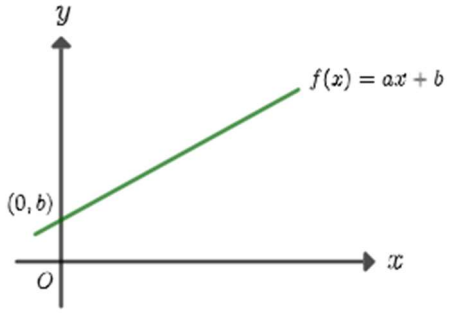
Assim, $b=2$.

Logo, a função afim determinada pelos valores de $f(1)=1$ e $f(5)=-3$ é $f(x)=-x+2$.

Exemplo 2: Determinar a função afim definida pelos valores $f(0)=3$ e $f(2)=7$.

Para $f(0)=3$, obtemos

$$f(x)=ax+b \Rightarrow f(0)=a\cdot 0+b \Rightarrow 3=0+b$$



Logo, $b=3$.

Para $f(2)=7$, segue que

$$f(x)=ax+b \Rightarrow f(2)=a\cdot 2+3 \Rightarrow 7=2a+3 \Rightarrow 2a=4$$

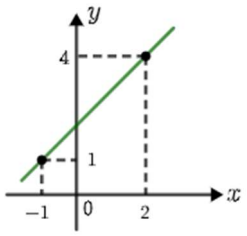
Portanto, $a=2$.

Observação: Note que, neste exemplo, não é necessária a aplicação dos Passos 2 e 3, uma vez que os valores de a e b são encontrados ainda no primeiro passo.

Logo, a função afim determinada pelos valores de $f(0)=3$ e $f(2)=7$ é $f(x)=2x+3$.

Gráfico de uma Função Afim

O gráfico de uma função afim $f(x)=ax+b$ é uma reta. Nele, o valor de a representa a taxa de variação/declividade da reta em relação ao eixo horizontal O_x (abscissa). O valor de b representa o ponto em que a reta da função afim intersecta o eixo O_y (ordenada), isto acontece porque $f(0)=b$.



- **Construindo Gráficos**

Para a construção do gráfico de uma função afim são necessários apenas dois pontos, o que representa dois pares ordenados. Após determinarmos dois pontos distintos da função, traçamos a reta ligando esses pontos.

Exemplo 1: Construir gráfico da função $f(x)=x+2$.

x	$f(x)$
-1	1
2	4

Exemplo 2: **Construir gráfico da função $f(x) = -2x + 5$.**

x	$f(x)$
2	1
3	-1

Exemplo 3: **Construir gráfico da função $f(x) = \frac{1}{4}x$.**

x	$f(x)$
-4	-1
4	1

Construindo os gráficos das funções afins encontradas nos problemas 1 e 2, destacados na seção 1 deste capítulo, temos:

No Problema 1, temos que $f(x) = 2x + 1800$.

O primeiro passo para construirmos o gráfico de uma função afim é encontrar dois pontos dessa função. Para isso, basta adotarmos um valor para x e encontrar seu valor correspondente em $f(x)$.

Para $x = 100$:

$$f(x) = 2x + 1800 \Rightarrow f(100) = 2 \cdot 100 + 1800 \Rightarrow f(100) = 2000.$$

As coordenadas do primeiro ponto P_1, são $(100, 2000)$.

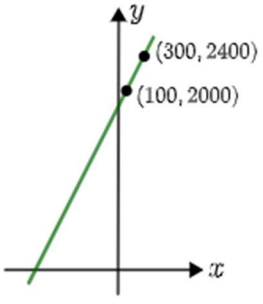
Para $x = 300$:

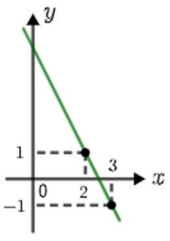
$$f(x) = 2x + 1800 \Rightarrow f(300) = 2 \cdot 300 + 1800 \Rightarrow f(300) = 2400.$$

As coordenadas do segundo ponto P_2, são $(300, 2400)$.

Em seguida, identificamos os pontos no plano cartesiano e traçamos uma reta ligando esses pontos.

Logo, o gráfico da função afim $f(x) = 2x + 1800$ é:



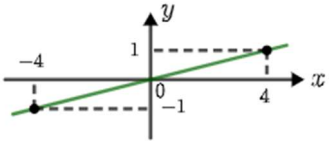


No Problema 2, temos que $f(x) = -20x + 1000$.

Para $x = -2$:

$$f(x) = -20x + 1000 \Rightarrow f(-2) = -20 \cdot (-2) + 1000 \Rightarrow$$
$$f(-2) = 1040.$$

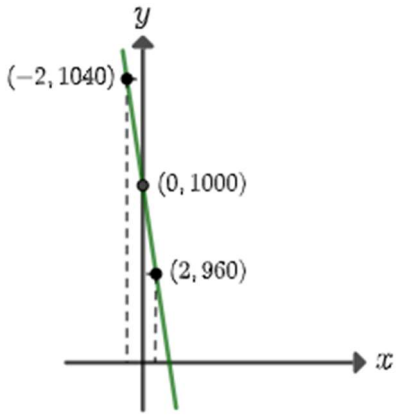
As coordenadas do primeiro ponto P_1, são $(-2, 1040)$.

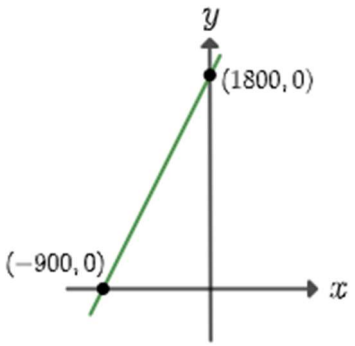


Para $x = 2$:

$$f(x) = -20x + 1000 \Rightarrow f(2) = -20 \cdot 2 + 1000 \Rightarrow f(2) = 960.$$

As coordenadas do segundo ponto P_2, são $(2, 960)$. Logo, o gráfico da função afim $f(x) = -20x + 1000$ é:





Atenção!

O sentido da reta é determinado pelo valor de a.

Isto quer dizer que:
$a > 0 \rightarrow$ Reta ascendente (função crescente);
$a < 0 \rightarrow$ Reta descendente (função decrescente);
$a = 0 \rightarrow$ Reta paralela ao eixo Ox (função constante).

Zero da Função Afim

O zero da função afim é o valor de x para o qual a função é igual a zero, isto é, $f(x) = 0$. Para encontrar o zero de uma função deve-se resolver a equação $ax + b = 0$.

Quando calculamos o zero de uma função afim, estamos calculando a raiz da equação $f(x) = 0$.

Exemplo 1: Retomando o exemplo do problema 1, temos a função $f(x) = 2x + 1800$.

Para encontrarmos o zero da função devemos admitir $f(x) = 0$ e resolver a equação formada.

Assim:

$$f(x) = 0 \Rightarrow 2x + 1800 = 0 \Rightarrow 2x = -1800 \Rightarrow x = -900.$$

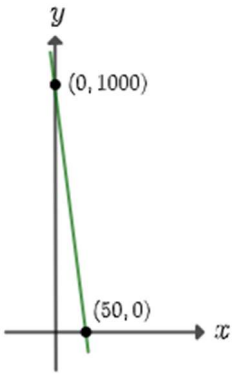
Observação: Analisando o gráfico de $f(x) = 2x + 1800$ percebemos que o valor do zero da função $(x = -900)$, também chamado de raiz da equação, representa a abscissa do ponto de intersecção do gráfico da função com o eixo Ox.

Exemplo 2: Retomando o exemplo do problema 2, temos a função $f(x) = -20x + 1000$.

Resolvendo a equação $f(x) = 0$, obtemos que

$$-20x + 1000 = 0 \Rightarrow -20x = -1000 \Rightarrow x = 50.$$

Logo, a abscissa do ponto em que o gráfico da função $f(x) = -20x + 1000$ corta o eixo Ox é igual a 50.



Atenção!

Todos os pontos do gráfico de uma função possuem coordenadas formadas por dois valores, um valor no eixo Ox (abscissa) e outro no eixo Oy (ordenada).

Os valores no eixo y são determinados pelo resultado de $f(x)$, enquanto os valores no eixo x são determinados pelo valor de x encontrado na função $f(x) = ax + b$.

Em uma função afim $f(x) = ax + b$ o zero da função é calculado para $f(x) = 0$. Isto quer dizer que as coordenadas do ponto ao encontrar o zero de uma função é $\left(\frac{-b}{a}, 0\right)$.

Lembre-se de que:

$f(x) = 0 \rightarrow$ valor no eixo Oy (ordenada).
$ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = \frac{-b}{a} \rightarrow$ valor no eixo Ox (abscissa).

Inequações do 1° Grau

Sejam as funções $f(x)$ e $g(x)$ cujos valores de x pertencem ao conjunto dos reais, chamamos de inequação as sequências abertas abaixo:

$$f(x) > g(x)$$
$$f(x) < g(x)$$
$$f(x) \geq g(x)$$
$$f(x) \leq g(x)$$

São exemplos de inequações:

Exemplo 1: Resolver a inequação $3x - 5 > 0$.

Inequação com $f(x) = 3x - 5$ e $g(x) = 0$.

Uma das maneiras de calcularmos a inequação é:

Passo 1: Encontrar o zero da função.

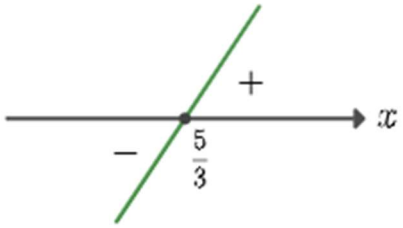
$3x - 5 = 0 \Rightarrow 3x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{3} \rightarrow$ Valor em que a reta corta o eixo Ox.

Passo 2: Avaliar se a função é crescente ou decrescente.

$$a = 3.$$

Logo, $a > 0$. Isso quer dizer que a função é crescente.

Passo 3: Construir o gráfico da inequação a partir das informações obtidas nos passos 1 e 2.



Passo 4: Fazer o estudo do sinal do gráfico e determinar o conjunto solução da inequação.

Para $x > \frac{5}{3} \Rightarrow f(x) > 0$.

Para $x = \frac{5}{3} \Rightarrow f(x) = 0$.

Para $x < \frac{5}{3} \Rightarrow f(x) < 0$.

Portanto, para $3x - 5 > 0$, temos o conjunto solução S representado por $S = \left\{x \in \mathbb{R} | \, x > \frac{5}{3}\right\}$.

Exemplo 2: Resolver a inequação $2x + 6 < 0$.

Inequação com $f(x) = 2x + 6$ e $g(x) = 0$.

Passo 1: Encontrar o zero da função.

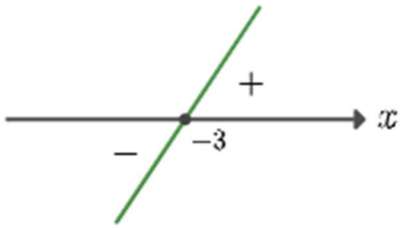
$$2x + 6 = 0 \Rightarrow 2x = -6 \Rightarrow x = -3.$$

Passo 2: Avaliar se a função é crescente ou decrescente.

$$a = 2.$$

Logo, $a > 0$, ou seja, a função é crescente.

Passo 3: Construir o gráfico da inequação a partir das informações obtidas nos passos 1 e 2.



Passo 4: Fazer o estudo do sinal do gráfico e determinar o conjunto solução da inequação.

Para $x > -3 \Rightarrow f(x) > 0$.

Para $x = -3 \Rightarrow f(x) = 0$.

Para $x < -3 \Rightarrow f(x) < 0$.

Assim, para $2x + 6 < 0$, temos o conjunto solução S representado por $S = \{x \in \mathbb{R} | \ x < -3\}$.

Exemplo 3: Resolver a inequação $\frac{1}{3}x + 5 \geq 2x$.

Inequação com $f(x) = \frac{1}{3}x + 5$ e $g(x) = 2x$.

Outra maneira de resolvermos uma inequação é:

Passo 1: Calcular os valores de x da inequação.

$$\frac{1}{3}x + 5 \geq 2x \Rightarrow \frac{1}{3}x - 2x \geq -5 \Rightarrow \frac{-5x}{3} \geq -5 \Rightarrow -5x \geq -15 \cdot (-1) \Rightarrow 5x \leq 15 \Rightarrow x \leq 3.$$

Passo 2: Determinar o conjunto solução da inequação.

Assim, $S = \{x \in \mathbb{R} | \ x \leq -3\}$.

Exemplo 4: Resolver a inequação $2x + 1 \leq 3$.

Inequação com $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = 3$.

Calculando a inequação, temos:

$$2x + 1 \leq 3 \Rightarrow 2x \leq 3 - 1 \Rightarrow 2x \leq 2 \Rightarrow x \leq 1.$$

Desse modo, $S = \{x \in \mathbb{R} | \ x \leq 1\}$.

- **Sistema de Inequações do 1° Grau**

Para a resolução de um sistema de inequações do $1°$ grau devemos, primeiramente, resolver as inequações do sistema e, em seguida, encontrar uma solução que satisfaça as duas inequações simultaneamente.

A solução do sistema é dada pela intersecção das soluções das inequações que compõem o sistema.

Exemplo 1: **Determinar $x \in \mathbb{R}$, que satisfaça o sistema $\begin{cases} 2x + 4 \leq 8, \\ -x - 1 < 3 \end{cases}$.**

Calculando a primeira inequação, temos:

$$2x + 4 \leq 8$$
$$2x \leq 4$$
$$x \leq 2.$$

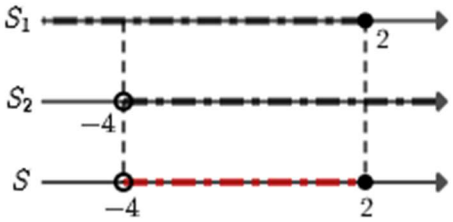
Assim, $S_1 = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 2\}$.

Calculando a segunda inequação, temos:

$$-x - 1 < 3$$
$$-x < 4 \cdot (-1)$$
$$x > -4.$$

Desse modo, $S_2 = \{x \in \mathbb{R} | x > -4\}$.

Representando graficamente os conjuntos solução S_1 e S_2 podemos observar o intervalo dos valores de x que satisfaz, simultaneamente, o sistema de inequações:



Logo, o conjunto solução é dado por $S = \{x \in \mathbb{R} | -4 < x \leq 2\}$.

Exemplo 2: **Determinar $x \in \mathbb{R}$, que satisfaça o sistema $\begin{cases} 3x - 2 < x, \\ x + 1 > -2 \end{cases}$.**

Calculando a primeira inequação, temos:

$$3x - 2 < x$$
$$3x - x < 2$$
$$2x < 2$$
$$x < 1.$$

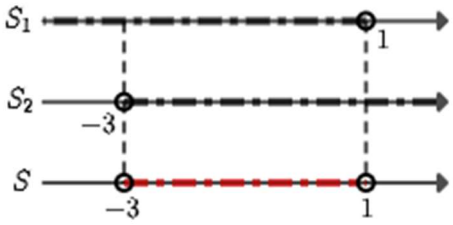
Assim, $S_1 = \{x \in \mathbb{R} | x < 1\}$.

Calculando a segunda inequação, temos:

$$x + 1 > -2$$
$$x > -2 - 1$$
$$x > -3.$$

Desse modo, $S_2 = \{x \in \mathbb{R} | x > -3\}$.

Representando graficamente os conjuntos solução S_1 e S_2 podemos observar o intervalo dos valores de x que satisfaz, simultaneamente, o sistema de inequações:



Logo, o conjunto solução é dado por $S = \{x \in \mathbb{R} | -3 < x < 1\}$.

Exemplo 3: Determinar $x \in \mathbb{R}$, que satisfaça o sistema $\begin{cases} x - 1 > 0, \\ -2x - 3 \geq -7 \end{cases}$.

Calculando a primeira inequação, temos:

$$x - 1 > 0$$
$$x > 1.$$

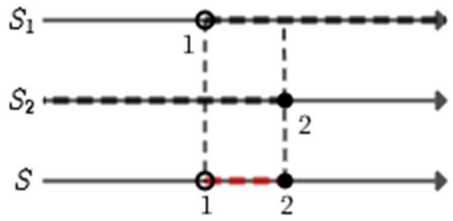
Assim, $S_1 = \{x \in \mathbb{R} | x > 1\}$.

Calculando a segunda inequação, temos:

$$-2x - 3 \geq -7$$
$$-2x \geq -7 + 3$$
$$-2x \geq -4 \cdot (-1)$$
$$2x \leq 4$$
$$x \leq 2.$$

Desse modo, $S_2 = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 2\}$.

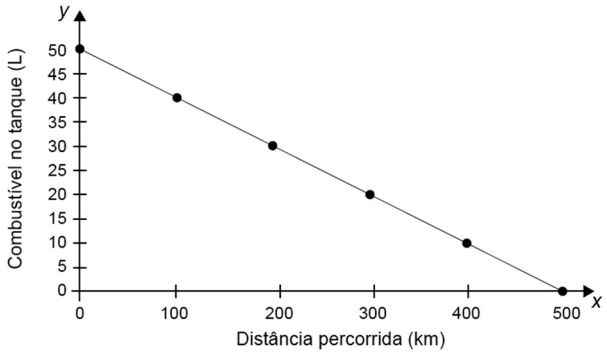
Representando graficamente os conjuntos solução S_1 e S_2 podemos observar o intervalo dos valores de x que satisfaz, simultaneamente, o sistema de inequações:



Logo, o conjunto solução é dado por $S = \{x \in \mathbb{R} | 1 < x \leq 2\}$.

Exercícios

01 - (ENEM MEC/2018) Uma indústria automobilística está testando um novo modelo de carro. Cinquenta litros de combustível são colocados no tanque desse carro, que é dirigido em uma pista de testes até que todo o combustível tenha sido consumido. O segmento de reta no gráfico mostra o resultado desse teste, no qual a quantidade de combustível no tanque é indicada no eixo y (vertical), e a distância percorrida pelo automóvel é indicada no eixo x (horizontal).



A expressão algébrica que relaciona a quantidade de combustível no taque e a distância percorrida pelo automóvel é

a) $y = -10x + 500$

b) $y = \frac{-x}{10} + 50$

c) $y = \frac{-x}{10} + 500$

d) $y = \frac{x}{10} + 50$

e) $y = \frac{x}{10} + 500$

02 - (UnirG TO/2018) Um trabalhador recebe um salário mensal composto de um valor fixo de R$ 1.300,00 e de uma parte variável. A parte variável corresponde a uma comissão de 6% do valor total de vendas que ele fizer durante o mês. A expressão matemática que representa o salário do trabalhador é:

a) f(x) = 0,06x + 1.300;
b) f(x) = 0,6x + 1.300;
c) f(x) = 0,78x + 1.300;
d) f(x) = 6x + 1.300.

03 - (ENEM MEC/2012) As curvas de oferta e de demanda de um produto representam, respectivamente, as quantidades que vendedores e consumidores estão dispostos a comercializar em função do preço do produto. Em alguns casos, essas curvas podem ser representadas por retas. Suponha que as quantidades de oferta e de demanda de um produto sejam, respectivamente, representadas pelas equações:

$Q_O = -20 + 4P$
$Q_D = 46 - 2P$

em que Q_O é quantidade de oferta, Q_D é a quantidade de demanda e P é o preço do produto.

A partir dessas equações, de oferta e de demanda, os economistas encontram o preço de equilíbrio de mercado, ou seja, quando Q_O e Q_D se igualam.

Para a situação descrita, qual o valor do preço de equilíbrio?

a) 5
b) 11

c) 13
d) 23
e) 33

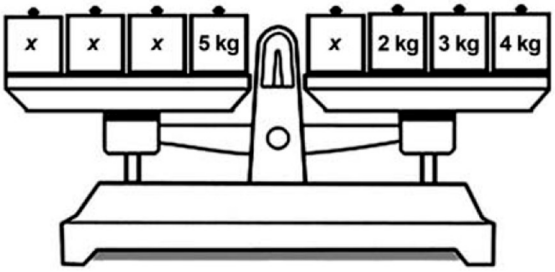
04 - (IFSP/2015) Um espião de guerra enviou ao seu comando a seguinte mensagem:

$$5n + 25 > 5500$$
$$-8n + 3501 > 210 - 5n$$

O comando sabia que a letra **n** representava o número de foguetes do inimigo. Fazendo os cálculos, é correto afirmar que o total de foguetes que o comando descobriu foi de

a) 3.000 foguetes.
b) 2.192 foguetes.
c) 1.097 foguetes.
d) 1.096 foguetes.
e) 195 foguetes.

05 - (Encceja/2017) As antigas balanças de prato ainda são usadas em algumas mercearias para a pesagem de alimentos. O equilíbrio ocorre quando a soma das massas dos objetos colocados em um dos pratos é igual à soma das massas dos objetos colocados no outro prato. Um estudante foi desafiado a descobrir qual é o valor de x representado na balança equilibrada da figura, sabendo que todas as caixinhas marcadas com x têm a mesma massa em kg.



O valor de x, em quilograma, é igual a

a) 1.
b) 2.
c) 5.
d) 8.

06 - (UEG GO/2017) Um professor fará uma avaliação cuja nota será composta por 20% da nota de um trabalho escrito, 30% da nota de uma apresentação oral e o restante por uma prova sobre um tema a ser sorteado. Se o aluno obtiver nota 9 no trabalho escrito, 8 na apresentação oral, para que ele tenha nota 7 nessa avaliação ele terá que tirar nessa prova uma nota igual a

a) 1,4
b) 4,0
c) 5,4
d) 5,6

e) 7,0

07 - (FPS PE/2017) Uma clínica médica tem capacidade máxima para 40 pacientes. O custo médio diário da clínica C(x), em milhares de reais, em função do número x de pacientes internados por dia, é dado por $C(x) = \frac{8x + 288}{x}$. Qual o número mínimo de pacientes internados na clínica, para que o custo diário seja de, no máximo, 20.000 reais?

a) 22
b) 23
c) 24
d) 25
e) 26

08 - (UEA AM/2017) Uma pequena empresa que fabrica camisetas verificou que o lucro obtido com a venda de seus produtos obedece à função L(x) = 75x – 3000, sendo L(x) o lucro em reais e x o número de camisetas vendidas, para $40 < x \leq 120$. Para que o lucro da empresa chegue a R$ 4.000,00, o menor número de camisetas a serem vendidas é

a) 97.
b) 96.
c) 95.
d) 94.
e) 93.

09 - (IFMT/2018) O custo de fabricação de X unidades de um certo produto é dado pela função de primeiro grau $C_{(x)}$ = 400 + 4x. Cada unidade é vendida pelo preço de R$ 8,00. Sabendo-se que lucro é a diferença entre receita e custo, então, para haver um lucro desse produto igual a R$ 4.600,00, o total de unidades terá de ser igual a:

a) 1.650
b) 1.550
c) 1.450
d) 1.350
e) 1.250

10 - (IFMS/2018) Uber é um serviço de transporte alternativo oferecido através de um aplicativo. Em Campo Grande o serviço teve início em setembro de 2016. Lucas solicitou um Uber e fez uma viagem de 20 quilômetros com duração de 30 minutos. Considerando a tabela abaixo, qual o valor pago por Lucas nessa viagem?

Preço base (fixo)	Preço por quilômetros rodados	Preço por minuto de viagem
R$ 2,80	R$ 1,10	R$ 0,20

a) R$ 4,10
b) R$ 28,00
c) R$ 30,80

d) R$ 32,80
e) RS 56,00

11 - (IFSC/2018) Considere a equação $\frac{3x}{4} = 2x + 5$, e assinale a alternativa CORRETA.

a) É uma função do primeiro grau, sua solução é x = −1 e seu conjunto solução é S = {−1}.
b) É uma equação racional, sua solução é x = −4 e seu conjunto solução é S = {−4}.
c) É uma equação do primeiro grau, sua solução é x = +4 e seu conjunto solução é S = ∅.
d) É uma equação do segundo grau, sua solução é x = −4 e seu conjunto solução é S = {−4}.
e) É uma equação do primeiro grau, sua solução é x = −4 e seu conjunto solução é S = {−4}.

12 - (IFBA/2018) Sendo x a solução da equação $\frac{x+4}{6} + \frac{2x-3}{2} = 1$, então o valor correspondente ao valor de E, na equação E = 49x, é?

a) 7
b) 11
c) 11/7
d) 111
e) 77

13 - (IFMS/2019) João é um brasileiro que busca uma oportunidade de emprego. Depois de muitas entrevistas, conseguiu uma vaga de vendedor para o período do último trimestre do ano. Trata-se de um contrato em uma loja de preço único, em que cada peça é vendida pelo valor de R$ 12,00. João ainda precisa entender e optar por uma das políticas salariais da loja:

- Proposta 1: Salário fixo de R$ 900,00 + comissão de 3% sobre cada peça vendida.
- Proposta 2: Salário = apenas comissão de 15% sobre seu total de vendas.

Com base nessas propostas, assinale a alternativa correta.

a) Pela proposta 2, João precisaria vender 2.000 peças para receber R$ 3.000,00.
b) Pela proposta 1, poderíamos representar o pagamento mensal (P) através da função P(x) = 900 + 0,3.x; em que x é o número de peças vendidas.
c) Se João optar pela proposta 2, podemos afirmar que ele receberá R$ 576,00 pela venda de 320 peças.
d) Suponha que João tenha vendido no primeiro mês 250 peças e, nos meses seguintes, 50 peças a mais que no anterior. Considerando a proposta 1, ao final do período de contratação, terá recebido um total de R$ 2.970,00.
e) A proposta 2 será mais vantajosa a partir de 350 peças.

14 - (IFAL/2019) Dois profissionais em serviços gerais cobram pelos seus serviços da seguinte maneira:

PROFISSIONAL A: cobra R$ 80,00 pela visita mais R$ 20,00 por cada hora de serviço;
PROFISSIONAL B: cobra R$ 60,00 pela visita mais R$ 25,00 por hora de serviço.

Para uma pessoa que quer contratar um desses profissionais para lhe prestar serviço, é mais rentável:

a) contratar o profissional A para serviços que demandarem até 3 horas.
b) contratar o profissional B para serviços que demandarem 5 horas ou mais.
c) contratar o profissional A para serviços que demandarem 4 horas.
d) contratar o profissional B para serviços que demandarem 4 horas.
e) contratar o profissional A para serviços que demandarem 5 horas ou mais.

15 - (UFT TO/2019) Em um curso de graduação da UFT, um quinto dos acadêmicos tem altura menor que 1,60 metros, metade tem altura de 1,60 a 1,70 metros e 75 acadêmicos têm mais de 1,70 metros. Quantos acadêmicos, no total, tem o referido curso?

a) 125
b) 175
c) 200
d) 250

16 - (UEG GO/2019) Um comerciante vende um produto a R$ 25,00. Ele tem um gasto mensal total de R$ 6.000,00. A quantidade de produtos que ele deve vender por mês para ter um lucro mensal de 20% é

a) 48
b) 240
c) 56
d) 288
e) 200

17 - (IFPI/2020) Em uma fábrica, a produção de determinada peça para bicicleta tem custo fixo de R$ 12,00 mais um custo variável de R$ 1,50 por unidade produzida. Qual o número máximo de peças que podem ser fabricadas com R$ 192,60?

a) 119
b) 120
c) 121
d) 122
e) 123

18 - (ENEM MEC/2021) Um lava-rápido oferece dois tipos de lavagem de veículos: lavagem simples, ao preço de R$ 20,00, e lavagem completa, ao preço de R$ 35,00. Para cobrir as despesas com produtos e funcionários, e não ter prejuízos, o lava-rápido deve ter uma receita diária de, pelo menos, R$ 300,00.

Para não ter prejuízo, o menor número de lavagens diárias que o lava-rápido deve efetuar é

a) 6.
b) 8.

c) 9.
d) 15.
e) 20.

19 - (ENEM MEC/2022) Admita que um grupo musical deseja produzir seu próprio CD. Para tanto, adquire um pequeno equipamento para gravar CDs ao valor de R$ 252,00, e vários CDs novos, sendo esses os únicos gastos realizados na produção dos CDs. Sabe-se que o custo total na compra do equipamento e dos CDs totalizou o valor de R$ 1 008,00, e que o custo unitário de cada CD novo, em real, varia de acordo com o número *n* de CDs adquiridos, segundo o quadro.

Número *n* de CDs adquiridos	Custo unitário de cada CD novo (em real)
$n < 1\,000$	0,45
$1\,000 \leq n < 2\,500$	0,40
$2\,500 \leq n$	0,35

Nessas condições, o número de CDs adquiridos pelo grupo musical é igual a

a) 1 680.
b) 1 890.
c) 2 160.
d) 2 520.
e) 2 880.

20 - (PUC RJ/2014) A soma das soluções da inequação $\frac{-x+3}{2x-1} > 0$ onde x pertence ao conjunto dos números naturais é:

a) 3
b) 4
c) 5
d) 6
e) 8

21 - (IFG GO/2015) O vendedor de uma loja recebe o salário fixo mensal de R$ 1.200,00. Além disso, recebe o valor fixo de R$ 200,00 de comissão, por semana, se conseguir vender o número mínimo de mercadorias estipulado pelo gerente da loja. Nos últimos 10 meses, o vendedor recebeu o total de R$ 17.800,00. Dessa forma, é **correto** afirmar que nesse período, além do salário mensal, o vendedor recebeu comissão por

a) 18 semanas
b) 24 semanas
c) 27 semanas
d) 32 semanas
e) 29 semanas

22 - (UTF PR/2018) Quando José estava indo ao ponto de ônibus que fica a 420m de sua casa, parou para conversar com um amigo. Em seguida, andou o triplo do que já

havia caminhado chegando ao ponto de ônibus. Assinale a alternativa que apresenta quanto faltava em metros para ele chegar ao ponto de ônibus.

a) 105.
b) 125.
c) 150.
d) 350.
e) 315.

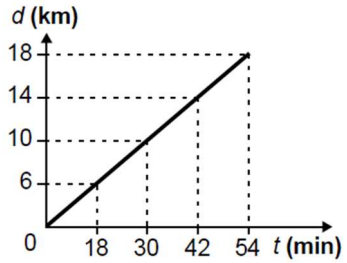
23 - (Encceja/2019) O técnico de um maratonista está monitorando os tempos obtidos pelo atleta em seu treinamento. Ele registrou o tempo gasto e a distância percorrida durante uma sessão de treinos, conforme indicado. Em seguida, observou que o tempo gasto era diretamente proporcional à distância percorrida.

Distância percorrida *d* (km)	Tempo gasto *t* (min)
6	18
10	30
14	42
18	54

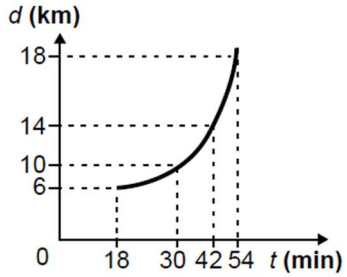
Para divulgação impressa desses resultados, optaram pela apresentação dos dados observados em um gráfico cartesiano, mostrando a distância percorrida *d* e o tempo gasto *t*.

Qual gráfico representa a relação entre a distância percorrida *d* e o tempo gasto *t*?

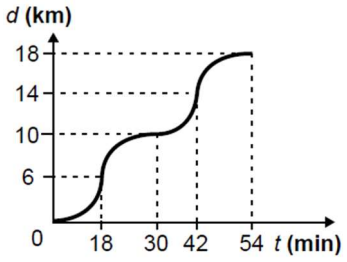
a)



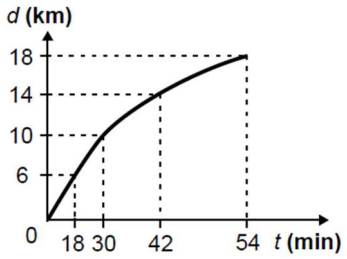
b)



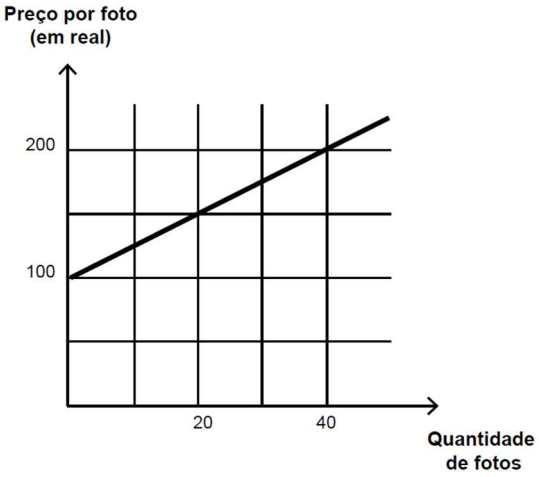
c)



d)



24 - (Encceja/2019) Um fotógrafo cobra, ao ser contratado, uma taxa inicial de R$ 100,00, independentemente da quantidade de fotos tiradas. O gráfico mostra o valor cobrado, em real, em função da quantidade de fotos por ele tiradas. Para uma festa de formatura, um formando decide contratá-lo com uma encomenda de oitenta fotos. No ato da entrega, seis fotos não estavam com boa definição e o fotógrafo decidiu não cobrar por elas.



Quanto o fotógrafo cobrou pela encomenda entregue?

a) R$ 185,00
b) R$ 200,00
c) R$ 285,00
d) R$ 300,00

25 - (Encceja/2019) Numa fazenda, o reservatório de água é abastecido utilizando-se uma bomba que retira água de um poço. Essa bomba tem a capacidade de bombear 12 litros de água por minuto. Ela é automaticamente ligada quando restam no reservatório 150 litros de água e desligada após enchê-lo. Pode-se determinar a quantidade de água *y*, contida no reservatório, em função do tempo *t*, em minuto, que a bomba permanece ligada.

A função que relaciona a quantidade de água no reservatório com o tempo que a bomba permanece ligada é

a) $y = 12t$
b) $y = 162t$
c) $y = 150 - 12t$
d) $y = 150 + 12t$

26 - (FGV /2019) No final do ano 2012, José Carlos comprou um carro 0km. Devido à depreciação, dois anos depois da compra, o valor do carro era R$46 000,00 e, cinco anos após a compra, ele valia R$40 000,00.

Admitindo que o valor do carro decresça linearmente com o tempo, pode-se afirmar que 8 anos e 3 meses após a compra o valor será:

a) R$33 000,00
b) R$34 000,00
c) R$32 500,00
d) R$33 500,00
e) R$32 000,00

27 - (Universidade Iguaçu RJ/2019) Duas fábricas, A e B, produzem, nas mesmas condições, um mesmo equipamento. Em agosto de 2018, A produziu 1100 unidades e B, 2000 unidades. A partir de setembro desse mesmo ano, A e B aumentaram, respectivamente, a produção em 100 e 50 unidades, a cada mês.

Nessas condições, pode-se afirmar que a produção das duas empresas se igualará em

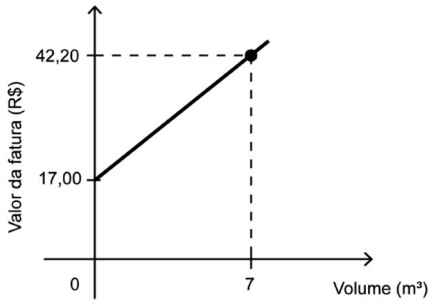
01) dezembro de 2019.
02) fevereiro de 2020.
03) maio de 2021.
04) agosto de 2022.
05) outubro de 2023.

28 - (ENEM MEC/2019) Uma empresa tem diversos funcionários. Um deles é o gerente, que recebe R$ 1 000,00 por semana. Os outros funcionários são diaristas. Cada um deles trabalha 2 dias por semana, recebendo R$ 80,00 por dia trabalhado.

Chamando de X a quantidade total de funcionários da empresa, a quantia Y, em reais, que esta empresa gasta semanalmente para pagar seus funcionários é expressa por

a) $Y = 80X + 920$.
b) $Y = 80X + 1\,000$.
c) $Y = 80X + 1\,080$.
d) $Y = 160X + 840$.
e) $Y = 160X + 1\,000$.

29 - (ENEM MEC/2020) Uma fatura mensal de água é composta por uma taxa fixa, independentemente do gasto, mais uma parte relativa ao consumo de água, em metro cúbico. O gráfico relaciona o valor da fatura com o volume de água gasto em uma residência no mês de novembro, representando uma semirreta.



Observa-se que, nesse mês, houve um consumo de 7 m^3 de água. Sabe-se que, em dezembro, o consumo de água nessa residência, em metro cúbico, dobrou em relação ao mês anterior.

O valor da fatura referente ao consumo no mês de dezembro nessa residência foi

a) superior a R$ 65,00 e inferior a R$ 70,00.
b) superior a R$ 80,00 e inferior a R$ 85,00.
c) superior a R$ 90,00 e inferior a R$ 95,00.
d) superior a R$ 95,00.
e) inferior a R$ 55,00.

30 - (FGV /2020) Uma indústria química produz certa matéria-prima a um custo fixo mensal de R$300.000,00 e um custo variável por quilograma igual a R$7.000,00. Sabendo que o custo variável por quilograma é 80% do preço de venda por quilograma, obtenha a quantidade mensal que deve ser produzida e vendida para que o lucro mensal seja de R$50.000,00.

a) 210kg.
b) 200kg.
c) 190kg.
d) 205kg.
e) 195kg.

31 - (ENEM MEC/2020) Por muitos anos, o Brasil tem figurado no cenário mundial entre os maiores produtores e exportadores de soja. Entre os anos de 2010 e 2014, houve uma forte tendência de aumento da produtividade, porém, um aspecto dificultou esse avanço: o alto custo do imposto ao produtor associado ao baixo preço de venda do produto. Em média, um produtor gastava R$ 1200,00 por hectare plantado, e vendia por R$ 50,00 cada saca de 60 kg. Ciente desses valores, um produtor pode, em certo ano, determinar uma relação do lucro L que obteve em função das sacas de 60 kg vendidas. Suponha que ele plantou 10 hectares de soja em sua propriedade, na qual colheu x sacas de 60 kg e todas as sacas foram vendidas.
Disponível em: www.cnpso.embrapa.br. Acesso em: 27 fev. 2012 (adaptado).

Qual é a expressão que determinou o lucro L em função de x obtido por esse produtor nesse ano?

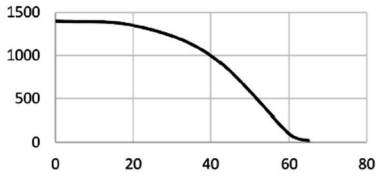
a) L(x) = 50x – 1 200
b) L(x) = 50x – 12 000
c) L(x) = 50x + 12 000
d) L(x) = 500x – 1 200

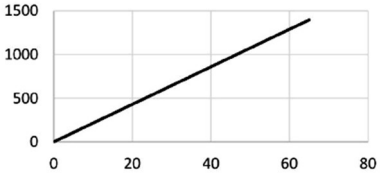
e) L(x) = 1 200x – 500

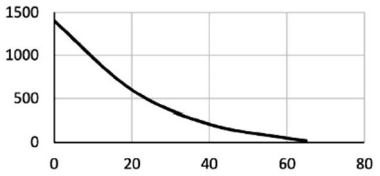
32 - (Fac. Santo Agostinho BA/2020) Um vendedor tem um salário fixo de R$ 400,00 e uma comissão de 5% sobre o total de x reais de suas vendas no mês. Seu salário mensal total, em reais, pode ser expresso por:

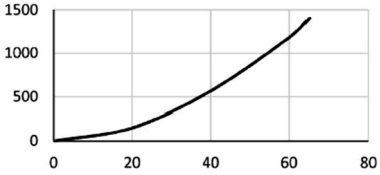
a) 400 + 5x.
b) 400,05x.
c) 405x.
d) 400 + 0,5x.
e) 400 + 0,05x.

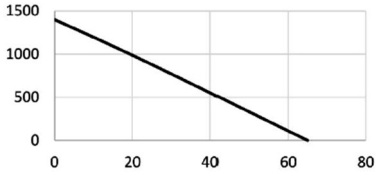
33 - (UFPR/2020) Para esvaziar um reservatório que contém 1.430 litros de água, é aberta uma torneira em sua base. Supondo que a vazão dessa torneira seja constante e igual a 22 litros por minuto, qual dos gráficos abaixo descreve a quantidade de água no reservatório (em litros), em função do tempo (em minutos), a partir do momento em que a torneira é aberta?

a)


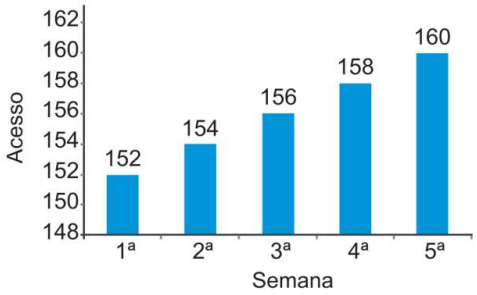
b)


c)


d)


e)


34 - (ENEM MEC/2021) Uma confeiteira pretende divulgar em um sítio da internet os doces que produz, mas só fará isso se acreditar que o número de acessos por semana compensará seu gasto com a divulgação. Por isso, pediu que lhe enviassem dados sobre o número de acessos ao sítio nas últimas 5 semanas e recebeu o gráfico a seguir.

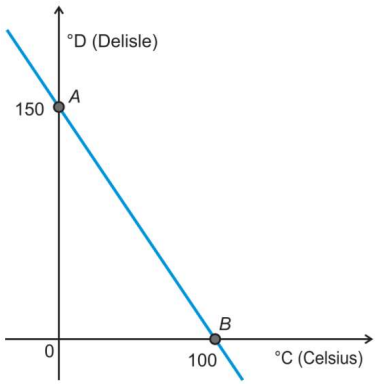


A confeiteira acredita que, se o número de acessos mantiver o mesmo crescimento semanal para as próximas 5 semanas, ao final desse período valerá a pena investir na divulgação.

O número de acessos que a confeiteira acredita ser suficiente para que a divulgação no sítio valha a pena é

a) 162.
b) 170.
c) 172.
d) 312.
e) 320.

35 - (ENEM MEC/2021) A escala de temperatura Delisle (°D), inventada no século XVIII pelo astrônomo francês Joseph-Nicholas Delisle, a partir da construção de um termômetro, foi utilizada na Rússia no século XIX. A relação entre as temperaturas na escala Celsius (°C) e na escala Delisle está representada no gráfico pela reta que passa pelos pontos A e B.



Disponível em: www.profibus.com.br. Acesso em: 22 mar. 2013.

Qual é a relação algébrica entre as temperaturas nessas duas escalas?

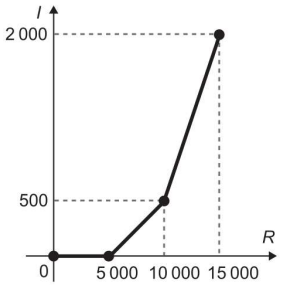
a) 2D + C = 100
b) 2D + 3C = 150
c) 3D + 2C = 300
d) 2D + 3C = 300
e) 3D + 2C = 450

36 - (ENEM MEC/2021) O quadro representa a relação entre o preço de um produto (*R*) e seu respectivo imposto devido (*I*).

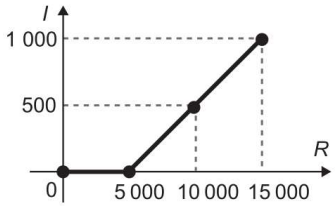
Preço do produto (R)	Imposto devido (I)
$R \leq 5\,000$	isento
$5\,000 < R \leq 10\,000$	10% de (R - 5 000)
$10\,000 < R \leq 15\,000$	500 + 30% de (R - 10 000)

O gráfico que melhor representa essa relação é

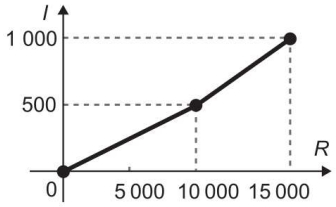
a)



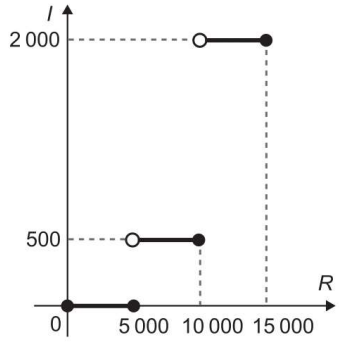
b)



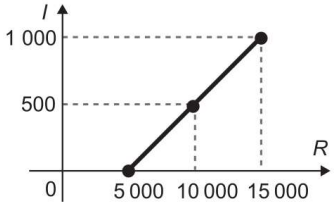
c)



d)



e)



37 - (PUC RS/2021) Em uma determinada viagem, para agradar seus clientes, uma empresa de ônibus intermunicipal oferecerá pequenos lanches. Serão oferecidos pacotes fechados de biscoitos salgados de 40 g e biscoitos doces de 50 g. Cada pacote de biscoito salgado custa, para a empresa, R$ 2,50, e o de biscoito doce, R$ 3,00. A empresa não quer gastar mais do que R$ 540,00 e pretende servir pelo menos 8.800 g de biscoitos doces e salgados. Sendo **x** o número de embalagens de biscoito

salgado e **y** o número de embalagens de biscoito doce, o sistema de inequações que representa esta situação do problema é

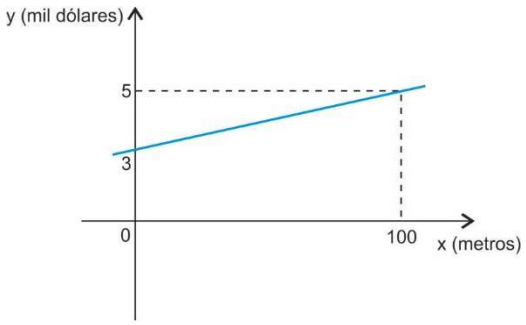
a) $\begin{cases} 40x + 50y \leq 8.800 \\ 2,5 + 3y \geq 540 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 40x + 50y \geq 8.800 \\ 2,5x + 3y \geq 540 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 40x + 50y \leq 8.800 \\ 2,5x + 3y \leq 540 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 40x + 50y \geq 8.800 \\ 2,5x + 3y \leq 540 \end{cases}$

38 - (UNIG RJ/2021)



O rompimento de barragem em Brumadinho em 25 de janeiro de 2019 foi o maior acidente de trabalho no Brasil em perda de vidas humanas e o segundo maior desastre industrial do século. Foi um dos maiores desastres ambientais da mineração do país, depois do rompimento de barragem em Mariana.

Independentes dos acidentes, as hidrelétricas causam grandes problemas ambientais, pois grandes áreas são desmatadas e alagadas para dar lugar às barragens. Uma empresa, para construir uma barragem, cobra uma taxa fixa, mais uma outra que varia de acordo com o número de metros da barragem construída.

Sabendo-se que o gráfico descreve o custo da obra, em mil dólares, em função do metro construído, é correto afirmar que, se a barragem tem 0,45 km, então o custo, em dólares, da obra está estimado em

01) 50000
02) 30000
03) 2000
04) 12000
05) 10000

39 - (UEG GO/2021) Uma reta passa pelos pontos (15,8) e (40,24). Um ponto (*x, y*) dessa reta indica a quantidade *y*, em mililitros, de soro que uma pessoa de massa corpórea *x*, em quilogramas, deve tomar em um determinado tratamento. A quantidade de soro que uma pessoa de 85 kg, que esteja fazendo esse tratamento, deve tomar é

a) 48,2 ml
b) 54,6 ml

c) 52,8 ml
d) 56,4 ml
e) 58,2 ml

40 - (Fac. Cesgranrio RJ/2021) Sejam f e g duas funções de domínio real, definidas pelas leis f(x) = 4x – 12 e g(x) = **a**x + 3, onde **a** representa um coeficiente real. Quando as funções **f** e **g** são representadas no mesmo plano cartesiano, seus gráficos se interceptam no ponto onde x = 1.

O coeficiente **a** vale

a) –11
b) –5
c) +5
d) +11
e) +13

41 - (Fuvest SP/2021) Um comerciante adotou como forma de pagamento uma máquina de cartões, cuja operadora cobra uma taxa de 6% em cada venda. Para continuar recebendo exatamente o mesmo valor por cada produto, ele resolveu aplicar um reajuste nos preços de todos os produtos da loja. Se P era o valor de uma mercadoria antes da adoção da máquina, o novo valor V deve ser calculado por:

a) V = P + 0,06
b) V = 0,94 · 1,06 · P
c) V = 1,06 · P
d) $V = \frac{P}{0,94}$
e) V = 0,94 · P

42 - (Famema SP/2022) Estudando uma certa espécie de grilos, biólogos descobriram que o gráfico da relação entre o número de vezes que o grilo canta por unidade de tempo e a temperatura é aproximadamente uma reta.

Sabe-se que essa espécie de grilo canta 96 vezes por minuto quando a temperatura é de 18 °C e 186 vezes por minuto quando a temperatura é de 30 °C.

Se os grilos estão cantando 141 vezes por minuto, a temperatura em graus Celsius é, aproximadamente,

a) 20.
b) 22.
c) 24.
d) 26.
e) 28.

43 - (Famerp SP/2023) Antônio comprou um bilhete com um número de rifa de eletrodoméstico por R$ 3,00, com chance de 1 em 8 000. Sabe-se que cada bilhete da rifa tinha exatamente um número e custava o mesmo valor, e que os organizadores do sorteio venderam todos os bilhetes e tiveram lucro de 60% sobre o custo de compra do eletrodoméstico. Nessas condições, o custo do eletrodoméstico sorteado foi de

a) R$ 38.400,00.
b) R$ 15.000,00.
c) R$ 12.400,00.
d) R$ 14.400,00.
e) R$ 40.000,00.

44 - (IFBA/2018) Sendo o valor de "p" o triplo do valor de "r" e q o dobro do valor de r; sendo a soma do valor de "p" com o valor de "q" o mesmo valor correspondente a 20% do valor 75; sendo $M = \frac{2 \cdot p(3 + r)}{q^2}$, então podemos afirmar que o valor de M é?

a) 4
b) 2
c) 6
d) 5
e) 3

45 - (FGV /2019) Uma empresa fabrica calças jeans, e toda produção mensal de 1 600 unidades é vendida ao preço unitário de R$90,00.

As 1 000 primeiras unidades são produzidas a um custo médio de R$70,00 por unidade, e as 600 unidades seguintes, a um custo médio de R$50,00 por unidade.

O lucro mensal dessa empresa é de:

a) R$44 000,00
b) R$36 000,00
c) R$40 000,00
d) R$38 000,00
e) R$42 000,00

46 - (IFAL/2019) Para produzir certo produto, o produtor tem um custo fixo de R$ 120,00 e um custo variável de R$ 2,40 por unidade do produto produzido. Se o preço unitário de venda do produto é de R$ 8,00, que quantidade mínima de produtos deve ser vendida para que não haja prejuízo?

a) 12
b) 15
c) 21
d) 22
e) 24

47 - (ENEM MEC/2020) Para sua festa de 17 anos, o aniversariante convidará 132 pessoas. Ele convidará 26 mulheres a mais do que o número de homens. A empresa contratada para realizar a festa cobrará R$ 50,00 por convidado do sexo masculino e R$ 45,00 por convidado do sexo feminino.

Quanto esse aniversariante terá que pagar, em real, à empresa contratada, pela quantidade de homens convidados para sua festa?

a) 2 385,00
b) 2 650,00
c) 3 300,00
d) 3 950,00
e) 5 300,00

48 - (Unifor CE/2020) Uma pessoa pegou um táxi para ir ao trabalho. A distância de casa ao trabalho é de 12 km. Na ida, ela pagou R$ 29,10, na bandeira 1. Na volta para casa à noite, ela pegou um táxi novamente e pagou R$ 33,90, na bandeira 2, pelo mesmo trajeto.

O acréscimo, por quilômetro rodado, da bandeira 1 para a bandeira 2 foi de

a) R$ 0,45
b) R$ 0,40
c) R$ 0,38
d) R$ 0,35
e) R$ 0,30

49 - (UFPR/2020) Uma malharia produz camisetas personalizadas para eventos esportivos. Cada novo modelo possui um custo fixo de R$ 450,00 mais R$ 9,00 por camiseta produzida. Sabendo que cada camiseta será vendida por R$ 20,00, a desigualdade que permite calcular o número de camisetas a serem vendidas para que se tenha um lucro de no mínimo R$ 1.000,00 é:

a) $20n + 9(50 + n) \leq 1000$.
b) $10(2n - 45) - 9n \leq 1000$.
c) $9(50 + n) - 20n \geq 1000$.
d) $10(45 + 2n) - 9n \geq 1000$.
e) $20n - 9(50 + n) \geq 1000$.

Função Quadrática

Definição

A função quadrática, também chamada de função polinomial do $2°$ grau, é aquela em que existem números reais a, b e c, com $a \neq 0$, tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo x pertencente aos reais.

São exemplos de função quadrática:

Exemplo 1: A função $f(x) = 2x^2 + x + 2$.

Os coeficientes a, b e c são, respectivamente, 2, 1 e 2.

Exemplo 2: A função $f(x) = -x^2 - 5x + 1$.

Os coeficientes a, b e c são, respectivamente, -1, -5 e 1.

Exemplo 3: A função $f(x) = 3x^2 + 2x$.

Os coeficientes a, b e c são, respectivamente, 3, 2 e 0.

Exemplo 4: A função $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + 3$.

Os coeficientes a, b e c são, respectivamente, $\frac{1}{3}$, 0 e 3.

Exemplo 5: A função $f(x) = 4x^2$.

Os coeficientes a, b e c são, respectivamente, 4, 0 e 0.

Valores de uma Função Quadrática

Em uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ seu valor numérico, para $x = x_0$, é dado por $f(x_0) = ax_0{}^2 + bx_0 + c$.

Desse modo, considerando a função quadrática $f(x) = x^2 - 2x + 3$, temos:

Para $x = -1$, que

$$f(-1) = (-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 3$$

$$f(-1) = 1 + 2 + 3$$

$$f(-1) = 6.$$

Para $x = 0$, que

$$f(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 + 3$$

$$f(0) = 0 - 0 + 3$$

$$f(0) = 3.$$

Para $x = 2$, que

$$f(2) = 2^2 - 2 \cdot 2 + 3$$

$$f(2) = 4 - 4 + 3$$

$$f(2) = 3.$$

Para $x = \frac{5}{3}$, que

$$f\left(\frac{5}{3}\right) = \left(\frac{5}{3}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{5}{3}\right) + 3$$

$$f\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{25}{9} - \frac{10}{3} + 3$$

$$f\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{25 - 30 + 27}{9}$$

$$f\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{22}{9}.$$

Zeros da Função Quadrática

Os zeros de uma função quadrática são os valores de x para os quais a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ é igual a zero. Para encontrar os zeros de uma função deve-se resolver a equação $ax^2 + bx + c = 0$.

Quando calculamos o zero de uma função quadrática, estamos calculando as raízes da equação correspondente a $f(x) = 0$.

Numa função quadrática é possível, ainda, determinar os zeros da função (também chamados de raízes da equação do $2°$ grau) a partir dos valores da soma s e do produto p desses zeros. Logo, $ax^2 + bx + c = 0$ é equivalente a $x^2 - sx + p = 0$.

Atenção!

Observações:

1) Nem sempre existem dois números reais em que sua soma seja s e seu produto seja p.

2) Numa função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, o número $\Delta = b^2 - 4ac$ é chamado de discriminante.

3) Os zeros da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ se relacionam com o valor encontrado para Δ.

$\Delta > 0 \rightarrow$ Possui 2 zeros reais diferentes.
$\Delta < 0 \rightarrow$ Não possui zeros reais.
$\Delta = 0 \rightarrow$ Possui 2 zeros reais iguais.

Os zeros da função quadrática podem ser determinados de diferentes maneiras.

- **Fórmula de Bhaskara**

A primeira forma de encontrarmos os zeros da função é utilizando a fórmula de Bhaskara $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, em que $\Delta = b^2 - 4ac$.

Exemplo 1: Encontrar os zeros da função $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$.

Passo 1: Calculamos o valor do discriminante da equação formada a partir da função dada por $f(x) = 0$, ou seja,

$$2x^2 + 3x + 1 = 0.$$

Assim, temos que

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$\Delta = 3^2 - 4.2.1 \Rightarrow \Delta = 9 - 8 \Rightarrow \Delta = 1 \Rightarrow \Delta > 0$. (possui 2 raízes reais diferentes)

Passo 2: Encontramos as raízes da equação por meio da fórmula de Bhaskara.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2.2} \Rightarrow x = \frac{-3 \pm 1}{4}.$$

Logo,

$$x_1 = \frac{-3+1}{4} \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2} \text{ e } x_2 = \frac{-3-1}{4} \Rightarrow x_2 = -1.$$

Assim, os zeros da função são -1 e $-\frac{1}{2}$.

Exemplo 2: Encontrar os zeros da função $f(x) = x^2 - 5x + 4$.

Seguindo os mesmos passos do Exemplo 1, temos que

$$x^2 - 5x + 4 = 0.$$

Deste modo,

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 \Rightarrow \Delta = 25 - 16 \Rightarrow \Delta = 9 \Rightarrow \Delta > 0$ (possui 2 raízes reais diferentes).

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2.1} \Rightarrow x = \frac{5 \pm 3}{2}.$$

Logo,

$$x_1 = \frac{5+3}{2} \Rightarrow x_1 = 4 \text{ e } x_2 = \frac{5-3}{2} \Rightarrow x_2 = 1.$$

Portanto, os zeros da função são 1 e 4.

- **Fatoração**

Outra maneira de calcular os zeros da função é por meio da fatoração.

Exemplo 1: $f(x) = x^2 - 8x + 16$.

Fatorando a equação $f(x) = 0$, temos:

$$x^2 - 8x + 16 = 0$$

$$(x - 4)(x - 4) = 0.$$

Desse modo, $x - 4 = 0$, ou $x - 4 = 0$. Se $x - 4 = 0$, obtemos que $x = 4$ e, portanto, essa função possui dois zeros iguais de valor 4.

Exemplo 2: $f(x) = 3x^2 - 7x + 2$.

Fatorando a equação $3x^2 - 7x + 2 = 0$, obtemos que

$$(3x - 1)(x - 2) = 0.$$

Logo: $3x - 1 = 0$, ou $x - 2 = 0$.
Se $3x - 1 = 0$, então $x = \frac{1}{3}$.
Se $x - 2 = 0$, então $x = 2$.

Assim, os zeros da função são $\frac{1}{3}$ e 2.

Esse processo é vantajoso em equações quadráticas incompletas, isto é, quando $b = 0$ ou $c = 0$.

Exemplo 3: $f(x) = 2x^2 + x$.

$$2x^2 + x = 0 \Rightarrow x(2x + 1) = 0.$$

Desse modo: $x = 0$, ou $2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$.

Logo, os zeros da função são $-\frac{1}{2}$ e 0.

Exemplo 4: $f(x) = 3x^2 - 6x$.

Fatorando a equação $3x^2 - 6x = 0$, encontramos

$$3x(x - 2) = 0.$$

Portanto: $3x = 0$ ou $x - 2 = 0$.

Se $3x = 0$, então $x = 0$.
Se $x - 2 = 0$, então $x = 2$.

Assim, os zeros da função são 0 e 2.

Exemplo 5: $f(x) = x^2 - 4$.

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow (x + 2)(x - 2) = 0.$$

Desse modo: $x + 2 = 0$, ou $x - 2 = 0$

Se $x + 2 = 0$, então $x = -2$.
Se $x - 2 = 0$, então $x = 2$.

Logo, os zeros da função são -2 e 2.

Exemplo 6: $f(x) = 4x^2 - 36$.

$$4x^2 - 36 = 0 \Rightarrow (2x + 6)(2x - 6) = 0.$$

Assim: $2x + 6 = 0$ ou $2x - 6 = 0$.

Se $2x + 6 = 0$, então $x = -3$.
Se $2x - 6 = 0$, então $x = 3$.

Portanto, os zeros da função são -3 e 3.

- **Isolando o x**

Esse método é vantajoso nas funções quadráticas em que $b = 0$.

Exemplo 1: $f(x) = x^2 - 4$.

Isolando o x, temos:

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4}.$$

Desse modo: $x = 2$ ou, $x = -2$.

Portanto, os zeros da função são -2 e 2.

Exemplo 2: $f(x) = 4x^2 - 36$.

$$4x^2 - 36 = 0 \Rightarrow 4x^2 = 36 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9}.$$

Assim: $x = 3$ ou, $x = -3$. Logo, os zeros da função são -3 e 3.

- **Soma e Produto**

Esse método é mais indicado para funções quadráticas simples, em que os zeros correspondem a números inteiros.

A soma das raízes da equação é dada por $-\frac{b}{a}$, enquanto o produto das raízes é obtido calculando o valor de $\frac{c}{a}$.

Exemplo 1: $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

Passo 1: Calculamos a soma das raízes.

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \Rightarrow x_1 + x_2 = -\frac{(-3)}{1} \Rightarrow x_1 + x_2 = 3.$$

Passo 2: Calculamos o produto das raízes.

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = \frac{2}{1} \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = 2.$$

Passo 3: Pensamos em dois números com soma igual a 3 e o produto igual a 2.

Portanto, os zeros da função são 1 e 2.

Exemplo 2: $f(x) = 2x^2 - 2x - 12$.

Seguindo os passos do **Exemplo 1**, temos:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \Rightarrow x_1 + x_2 = -\frac{(-2)}{2} \Rightarrow x_1 + x_2 = 1.$$

e

$$x_1 . x_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow x_1 . x_2 = \frac{-12}{2} \Rightarrow x_1 . x_2 = -6.$$

Portanto, os zeros da função são -2 e 3.

Vértice, Valor Máximo e Valor Mínimo da Função Quadrática

Determinar o vértice de uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ permite encontrar seu valor máximo ou mínimo.

Quando $a > 0$, a concavidade da parábola está voltada para cima, isto quer dizer que o vértice indica o valor mínimo assumido pela função. Além disso, a função não assume valor máximo, ou seja, é ilimitada superiormente.

Quando $a < 0$, a concavidade da parábola está voltada para baixo e o vértice indica o valor máximo assumido pela função. Além disso, a função não assume valor mínimo, ou seja, é ilimitada inferiormente.

- **Encontrando as coordenadas do vértice**

Para encontrarmos as coordenadas do vértice de uma parábola, seguimos os seguintes passos:

Exemplo 1: Encontrar coordenadas do vértice da função $f(x) = x^2 - 6x$.

Passo 1: Calculamos as raízes da equação do 2□ grau.

$$x^2 - 6x = 0.$$

Temos que,

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 \Rightarrow \Delta = 36.$$

Assim,

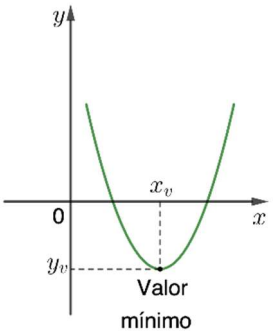
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 1}$$

Logo,

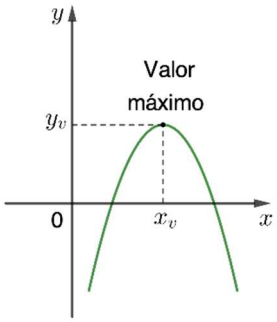
$$x_1 = \frac{6+6}{2} \Rightarrow x_1 = 6 \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{6-6}{2} \Rightarrow x_2 = 0.$$

Passo 2: Encontramos a coordenada x do vértice, denotada por x_v. Temos que, $x_v = \frac{x_1' + x_2}{2}$. Deste modo,

$$x_v = \frac{6+0}{2} \Rightarrow x_v = 3.$$



Passo 3: Substituímos o valor de x_v na função para encontrar o valor da coordenada y do vértice, denotado por y_v, ou seja:



$$f(x_v) = {x_v}^2 - 6x_v \Rightarrow y_v = 3^2 - 6 \cdot 3 \Rightarrow y_v = -9.$$

Logo, as coordenadas do vértice da parábola são $(3, -9)$. Isso quer dizer que a função assume seu valor mínimo -9 quando $x = 3$.

Exemplo 2: Encontrar coordenadas do vértice da função $f(x) = -x^2 + 4x - 3$.

Seguindo os passos do Exemplo 1, temos que

$$-x^2 + 4x - 3 = 0.$$

Deste modo,

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-3) \Rightarrow \Delta = 4,$$

e as raízes da função serão:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot (-1)}$$

Logo,

$$x_1 = \frac{-4+2}{-2} \Rightarrow x_1 = 1 \text{ e } x_2 = \frac{-4-2}{-2} \Rightarrow x_2 = 3.$$

A coordenada x_v do vértice será

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} \Rightarrow x_v = \frac{1+3}{2} \Rightarrow x_v = 2,$$

e, assim, a coordenada y_v do vértice é dada por

$$f(x_v) = -{x_v}^2 + 4x_v - 3 \Rightarrow y_v = -2^2 + 4 \cdot 2 - 3 \Rightarrow y_v = 1.$$

Portanto, as coordenadas do vértice da parábola são $(2, 1)$, ou seja, a função assume seu valor máximo 1 quando $x = 2$.

Atenção!

As coordenadas do vértice também podem ser calculadas por:

$$x_v = -\frac{b}{2a} \text{ e } y_v = -\frac{\Delta}{4a}$$

Calculando as coordenadas do vértice das funções dos exemplos anteriores, temos:

Exemplo 1: Encontrar coordenadas do vértice da função $f(x) = x^2 - 6x$.

Primeiramente o x_v, temos que

$$x_v = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x_v = -\frac{(-6)}{2 \cdot 1} \Rightarrow x_v = 3;$$

Calculando o valor de Δ, segue que

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 \Rightarrow \Delta = 36;$$

e, por último, o valor de y_v,

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow y_v = -\frac{36}{4 \cdot 1} \Rightarrow y_v = -9.$$

Logo, as coordenadas do vértice da parábola são $(3, -9)$.

Exemplo 2: Encontrar coordenadas do vértice da função $f(x) = -x^2 + 4x - 3$.

Temos que:

$$x_v = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x_v = -\frac{4}{2\cdot(-1)} \Rightarrow x_v = 2;$$

Calculando o valor de Δ, segue que

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-3) \Rightarrow \Delta = 4;$$

e, por último, o valor de y_v,

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow y_v = -\frac{4}{4\cdot(-1)} \Rightarrow y_v = 1.$$

Portanto, as coordenadas do vértice da parábola são $(2, 1)$.

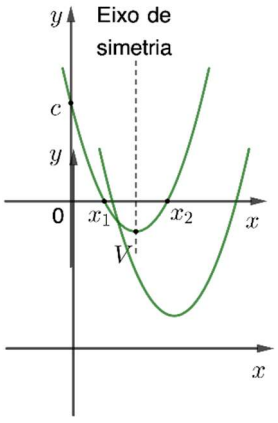
Gráfico da Função Quadrática

O gráfico de uma função quadrática é representado por uma parábola.

Os coeficientes a, b e c na função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ definem as características da parábola formada.

- **Coeficiente a**

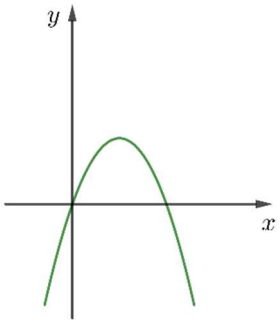
O coeficiente a determina a concavidade e a abertura da parábola de uma função quadrática.



Quanto à concavidade da parábola:

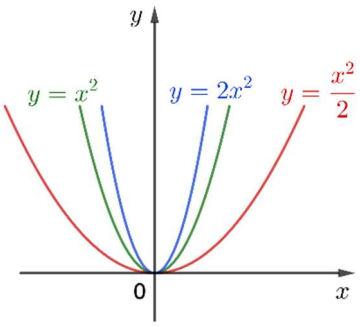
Quando $\alpha > 0$ a concavidade é para cima.

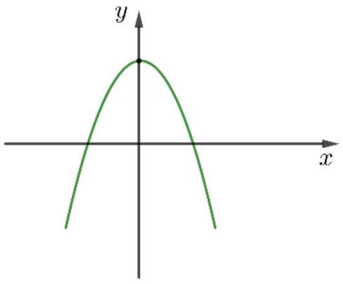
Quando $\alpha < 0$ a concavidade é para baixo.



Quanto à abertura da parábola:

Quanto menor o valor absoluto de α, maior será a abertura da parábola. Da mesma forma, quanto maior o valor absoluto de α, menor será a abertura da parábola.

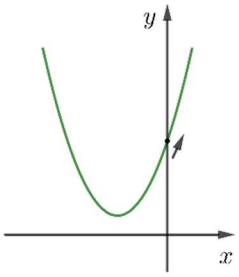


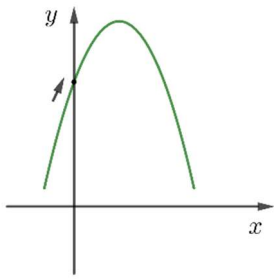


- **Coeficiente b**

O coeficiente b aponta se a parábola intersecta o eixo Oy no ramo crescente, no ramo decrescente ou no vértice da parábola.

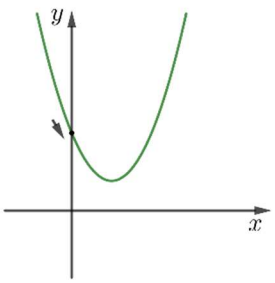
Quando $b > 0$, o ramo crescente da parábola intersecta o eixo O_y.

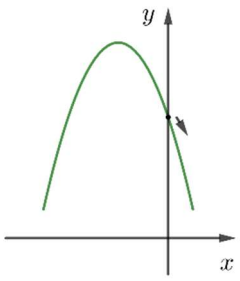


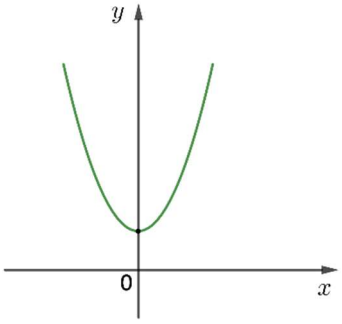


Quando $b < 0$, o ramo decrescente da parábola intersecta o eixo O_y.

Quando $b = 0$, vértice da parábola intersecta o eixo O_y.

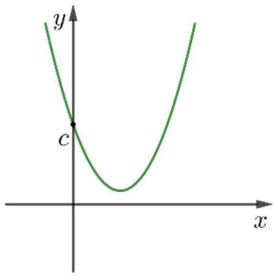




O 

- **Coeficiente c**

coeficiente c representa o ponto em que a parábola intersecta o eixo O_y, ou seja, ponto $(0, c)$.



Inequações do 2□ Grau

Estudo do Sinal

O primeiro passo para a resolução de inequações do segundo grau é fazer o estudo do o sinal da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, ou seja, determinar os valores reais de x para $f(x) > 0$, $f(x) = 0$ e $f(x) < 0$.

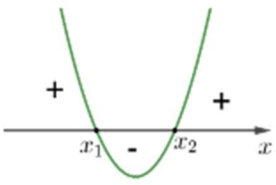
O estudo do sinal de uma função quadrática depende do valor de $\Delta = b^2 - 4ac$ da equação do $2°$ grau correspondente $ax^2 + bx + c = 0$, bem como do coeficiente a e dos zeros da função.

- **Para $\Delta > 0$**

Quando $\Delta > 0$, a função possui dois zeros reais diferentes (x_1 e x_2), assim, a parábola que representa a função intersecta o eixo Ox em dois pontos.

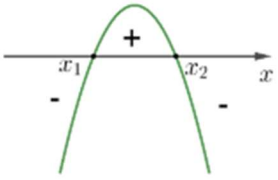
Se $a > 0$:

$f(x) > 0$ quando $x < x_1$ ou $x > x_2$.
$f(x) < 0$ quando $x_1 < x < x_2$.
$f(x) = 0$ quando $x = x_1$ ou $x = x_2$.

Se $a < 0$: 

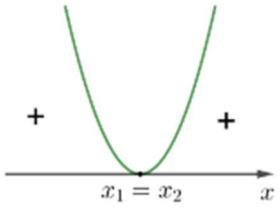
$f(x) > 0$ quando $x_1 < x < x_2$.
$f(x) < 0$ quando $x < x_1$ ou $x > x_2$.
$f(x) = 0$ quando $x = x_1$ ou $x = x_2$.

- **Para $\Delta = 0$**

Quando 

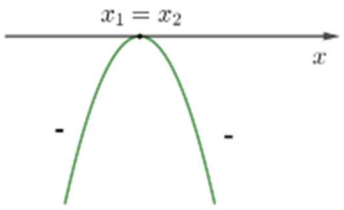
$\Delta = 0$, a função possui um zero real duplo ($x' = x_2$), assim, a parábola que representa a função tangencia o eixo Ox.

Se $a > 0$**:**



$f(x) > 0$ **quando** $x \neq x_1$.
$f(x) = 0$ **quando** $x = x_1$.

Se $a < 0$**:**



$f(x) < 0$ **quando** $x \neq x_1$.
$f(x) = 0$ **quando** $x = x_1$.

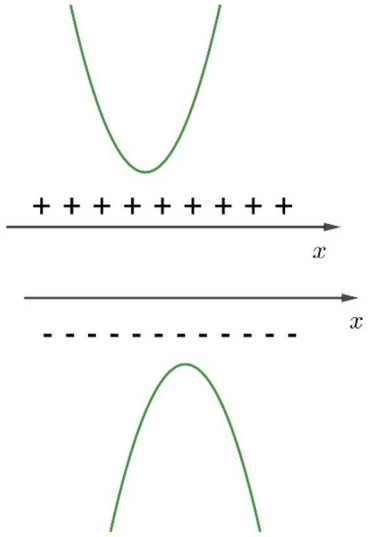
- **Para** $\Delta < 0$

Quando $\Delta < 0$, a função não possui zeros reais, assim, a parábola que representa a função não intersecta o eixo Ox.

Se $a > 0$**:**

$f(x) > 0$ **para todo** x **real.**

Se $a < 0$**:**



$f(x) > 0$ **para todo** x **real.**

Agora que entendemos o estudo do sinal de uma função quadrática podemos calcular as inequações do $2°$ grau. Observe os exemplos abaixo:

Exemplo 1: Determinar $x \in \mathbb{R}$**, que satisfaça a inequação** $x^2 + 3x - 4 > 0$**.**

Passo 1: Observamos o sinal do coeficiente a para determinar a concavidade da parábola.

$$a = 1 \Rightarrow a > 0.$$

Desse modo, a concavidade da parábola será voltada para cima.

Passo 2: Calculamos as raízes da equação correspondente à função dada, $x^2 + 3x - 4 = 0$. Calculando o valor de Δ, segue que

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) \Rightarrow \Delta = 9 + 16 \Rightarrow \Delta = 25.$$

Logo,

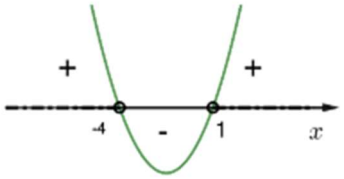
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2.1} \Rightarrow x = \frac{-3 \pm 5}{2},$$

e, portanto,

$$x_1 = \frac{-3+5}{2} \Rightarrow x_1 = 1 \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-3-5}{2} \Rightarrow x_2 = -4.$$

As raízes da equação são -4 e 1.

Passo 3: Encontramos o conjunto solução da inequação.



Portanto, o conjunto solução da inequação é $S = \{x \in \mathbb{R} \,|x < -4 \; ou \; x > 1\}$.

Exemplo 2: Determinar $x \in \mathbb{R}$, que satisfaça a inequação $-2x^2 + x + 3 \leq 0$.

Seguindo os mesmos passos do exemplo 1, temos:

$$a = -2 \Rightarrow a < 0.$$

Desse modo, a concavidade da parábola será voltada para baixo.

Calculando as raízes da equação $x^2 + 3x - 4 = 0$, temos

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 1^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 3 \Rightarrow \Delta = 1 + 24 \Rightarrow \Delta = 25.$$

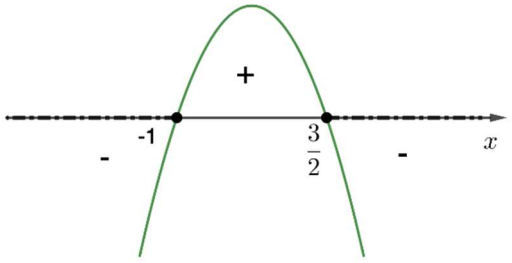
e, em seguida,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2.(-2)} \Rightarrow x = \frac{-1 \pm 5}{-4}.$$

Logo,

$$x_1 = \frac{-1+5}{-4} \Rightarrow x_1 = -1 \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-1-5}{-4} \Rightarrow x_2 = \frac{3}{2}.$$

Desse modo, as raízes da equação são -1 e $\frac{3}{2}$.



Portanto, o conjunto solução da inequação é $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,|x \leq -1 \; ou \; x \geq \frac{3}{2}\right\}$.

Sistema de Inequações do 1° Grau

Para a resolução de um sistema de inequações do 2° grau devemos, primeiramente, resolver as inequações do sistema e, em seguida, encontrar uma solução que satisfaça as duas inequações simultaneamente.

Exemplo 1: Determinar $x \in \mathbb{R}$, que satisfaça o sistema $\begin{cases} x^2 + x - 2 \geq 0, \\ x^2 - 6x + 5 < 0 \end{cases}$.

Para $x^2 + x - 2 \geq 0$, temos $a = 1$, isto significa que a concavidade da parábola está voltada para cima. Agora, vamos encontrar as raízes da equação $x^2 + x - 2 = 0$.

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) \Rightarrow \Delta = 1 + 8 \Rightarrow \Delta = 9.$$

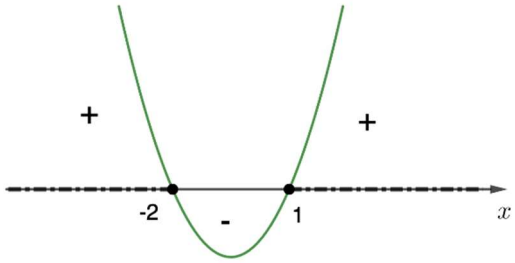
Em seguida, temos

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2.1} \Rightarrow x = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

Logo,

$$x_1 = \frac{-1+3}{2} \Rightarrow x_1 = 1 \text{ e } x_2 = \frac{-1-3}{2} \Rightarrow x_2 = -2.$$

As raízes da equação são -2 e 1.



Portanto, o conjunto solução da primeira inequação é $S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2 \; ou \; x \geq 1\}$.

Para $x^2 - 6x + 5 < 0$, temos que $a = 1$, isto significa que a concavidade da parábola está voltada para cima. Agora, vamos encontrar as raízes da equação $x^2 - 6x + 5 = 0$.

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 \Rightarrow \Delta = 36 - 20 \Rightarrow \Delta = 16.$$

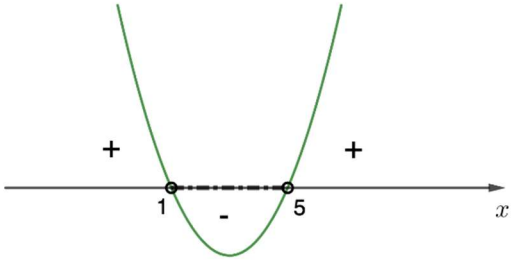
Em seguida, temos

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x = \frac{6 \pm 4}{2}.$$

Logo,

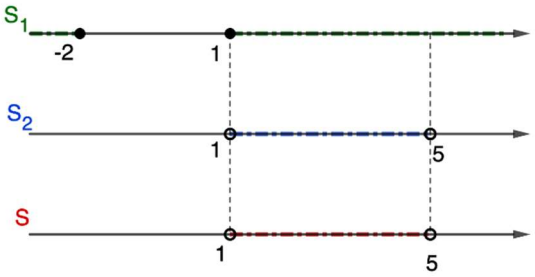
$$x_1 = \frac{6+4}{2} \Rightarrow x_1 = 5 \text{ e } x_2 = \frac{6-4}{2} \Rightarrow x_2 = 1.$$

As raízes da equação são 1 e 5.



Portanto, o conjunto solução da segunda inequação é $S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 5\}$.

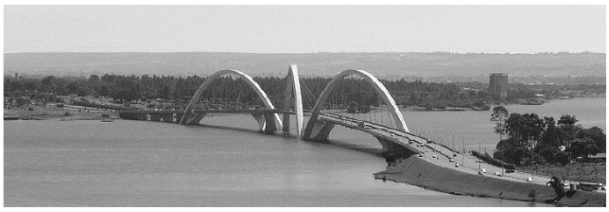
A solução do sistema é dada pela intersecção das soluções das inequações que compõem o sistema. Portanto:



A solução do sistema de inequações é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 5\}$.

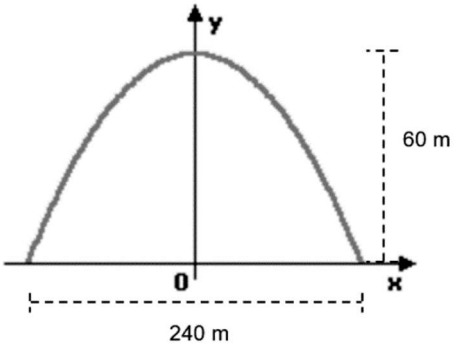
Exercícios

01 - (Unifenas MG/2020) A Ponte Juscelino Kubitschek, também conhecida como Ponte JK ou Terceira Ponte, está situada em Brasília, ligando o Sul à parte central de Brasília.



A estrutura da ponte conta com três arcos parabólicos, que sustentam, por meio de cabos de aço, três tabuleiros com vão de 240 metros cada um, e altura aproximada de 60 metros acima do nível do lago, apoiados em quatro bases submersas.

A figura representa, matematicamente, um dos arcos parabólicos.



A expressão algébrica para esse arco é igual a

a) $y = -\frac{1}{240}x^2 + 60$

b) $y = -\frac{1}{120}x^2 + 60$

c) $y = -\frac{1}{240}x^2 + 60x$

d) $y = -120x^2 + 60$

e) $y = -60x^2 + 60$

02 - (Uncisal AL/2020) Os 45 formandos de um curso de direito contrataram uma empresa especializada para organizar sua festa de formatura. No contrato firmado entre a empresa e a comissão de festas, foi estabelecido um preço inicial de R$ 112.500,00, valor que deveria ser rateado entre os formandos participantes do evento. Prevendo-se a desistência de alguns, acordou-se que cada participante confirmado pagasse, além de sua cota referente ao preço inicial, a quantia de R$ 500,00 correspondente a cada participante desistente. Dessa forma, a receita total da empresa organizadora dependeria essencialmente da quantidade de formandos efetivamente participantes do evento.

Na situação apresentada, indicando-se por R(x) a receita da empresa organizadora em função da quantidade x de formandos que efetivamente participarão do evento, então R(x) é uma função

a) linear, porque cada participante efetivo terá a obrigação de pagar por (45 – x) desistentes.
b) linear, porque cada participante efetivo pagará a quantia de R$ 2.500,00 somada à quantia que caberia a cada desistente.
c) quadrática, porque o preço inicialmente estabelecido será duplamente rateado pelos x formandos que efetivamente participarão do evento.
d) quadrática, porque cada participante efetivo do evento estará comprometido com cada um dos (45 – x) desistentes e com sua própria participação.
e) cúbica, porque além do preço inicialmente estabelecido, cada um dos x formandos que efetivamente participarão do evento pagará por si e pelos (45 – x) desistentes.

03 - (ENEM MEC/2021) Um diretor esportivo organiza um campeonato no qual haverá disputa de times em turno e returno, isto é, cada time jogará duas vezes com todos os outros, totalizando 380 partidas a serem disputadas.

A quantidade de times (x) que faz parte desse campeonato pode ser calculada pela equação

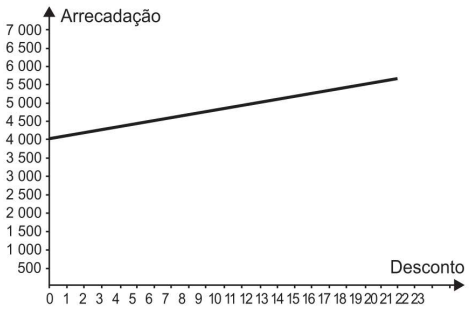
a) $x = 380 - x^2$
b) $x^2 - x = 380$
c) $x^2 = 380$
d) $2x - x = 380$
e) $2x = 380$

04 - (ENEM MEC/2021) O administrador de um teatro percebeu que, com ingresso do evento a R$ 20,00, um show conseguia atrair 200 pessoas e que, a cada R$ 1,00 de

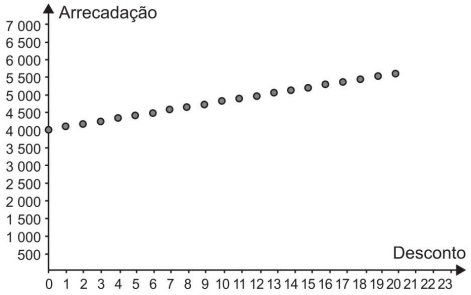
redução no preço do ingresso, o número de pessoas aumentava em 40. Ele sabe que os donos do teatro só admitem trabalhar com valores inteiros para os ingressos, pela dificuldade de disponibilizar troco, e pretende convencê-los a diminuir o preço do ingresso. Assim, apresentará um gráfico da arrecadação em função do valor do desconto no preço atual do ingresso.

O gráfico que mais se assemelha ao que deve ser elaborado pelo administrador é

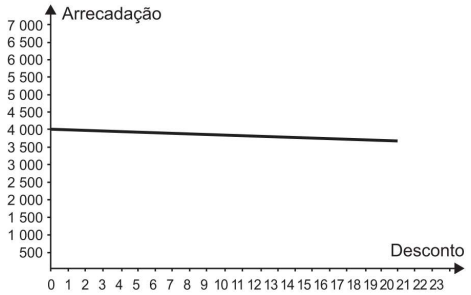
a)



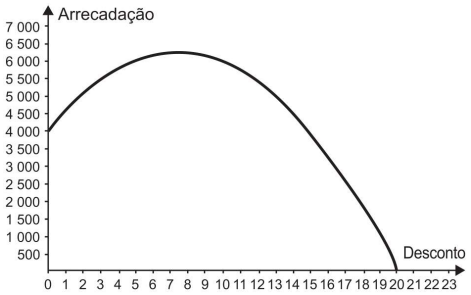
b)

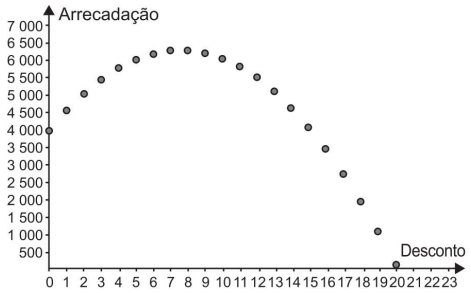


c)



d)



e) 

05 - (UEG GO/2021) A potência P de um chuveiro elétrico é dada pela fórmula $P = Ri^2$, sendo R sua resistência elétrica e i a corrente elétrica que circula por ele. Sabendo-se que o consumo de energia elétrica E é diretamente proporcional à potência do aparelho, a função que relaciona a energia consumida pelo chuveiro elétrico e a corrente elétrica que circula por ele é

a) linear decrescente
b) linear crescente
c) quadrática decrescente
d) quadrática crescente
e) exponencial crescente

06 - (Fac. Cesgranrio RJ/2021) A representação gráfica de uma função polinomial de 2º grau é, sempre, uma parábola. Desse modo, toda função polinomial de 2º grau admite um valor máximo ou um valor mínimo, dependendo da concavidade. A função f, de domínio real, é definida pela lei $f(x) = x^2 + bx + 12$ e admite valor mínimo no ponto de abscissa – 4.

Qual é o valor do coeficiente real **b**?

a) – 4
b) + 4
c) + 7
d) + 8
e) + 10

07 - (Unesp SP/2021) O dono de uma empresa dispunha de recurso para equipá-la com novos maquinários e empregados, de modo a aumentar a produção horária de até 30 itens. Antes de realizar o investimento, optou por contratar uma equipe de consultoria para analisar os efeitos da variação v da produção horária dos itens no custo C do produto. Perante as condições estabelecidas, o estudo realizado por essa equipe obteve a seguinte função:

$C(v) = -0{,}01v^2 + 0{,}3v + 50$, com $-10 \leq v \leq 30$

A equipe de consultoria sugeriu, então, uma redução na produção horária de 10 itens, o que permitiria enxugar o quadro de funcionários, reduzindo o custo, sem a necessidade de investir novos recursos.

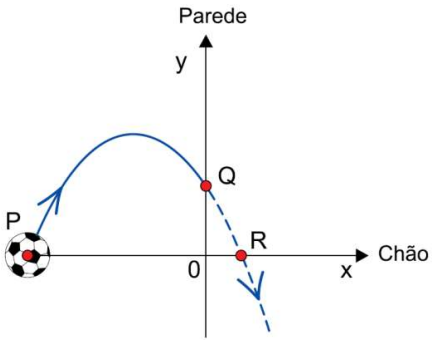
O dono da empresa optou por não seguir a decisão e questionou qual seria o aumento necessário na produção horária para que o custo do produto ficasse igual ao obtido

com a redução da produção horária proposta pela consultoria, mediante os recursos disponibilizados.

De acordo com a função obtida, a equipe de consultoria deve informar que, nesse caso,

a) é impossível igualar o custo da redução proposta, pois os recursos disponíveis são insuficientes, uma vez que essa igualdade exigiria um aumento na produção horária de 50 itens.
b) é possível igualar o custo da redução proposta, uma vez que essa igualdade exigiria um aumento na produção horária de 15 itens, o que está dentro dos recursos disponíveis.
c) é possível igualar o custo da redução proposta, uma vez que essa igualdade exigiria um aumento na produção horária de 20 itens, o que está dentro dos recursos disponíveis.
d) é impossível igualar o custo da redução proposta, pois os recursos disponíveis são insuficientes, uma vez que essa igualdade exigiria um aumento na produção horária de 40 itens.
e) é possível igualar o custo da redução proposta, desde que sejam empregados todos os recursos disponíveis, uma vez que essa igualdade exigiria um aumento na produção horária de 30 itens.

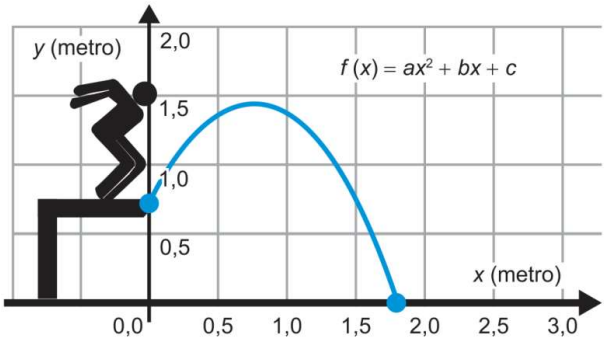
08 - (Famema SP/2021) A figura representa, no plano cartesiano, a trajetória de uma bola que foi chutada a partir do ponto P(–5, 0), localizado no chão, e seguiu em trajetória parabólica até bater na parede, no ponto Q(0, 2). Se não houvesse parede, a bola seguiria sua trajetória até o ponto R(1, 0), no chão.



Admitindo-se que a trajetória descrita pela bola é modelada pela função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, então a + b + c é igual a

a) 0.
b) 1.
c) 0,5.
d) 1,5.
e) –0,5.

09 - (ENEM MEC/2022) A trajetória de uma pessoa que pula de um andaime até o chão é descrita por uma função $y = f(x)$, sendo x e y medidos em metro, conforme mostra a figura.



Seja *D* o domínio da função $f(x)$, como definida na figura.

Para que a situação representada na figura seja real, o domínio dessa função deve ser igual a

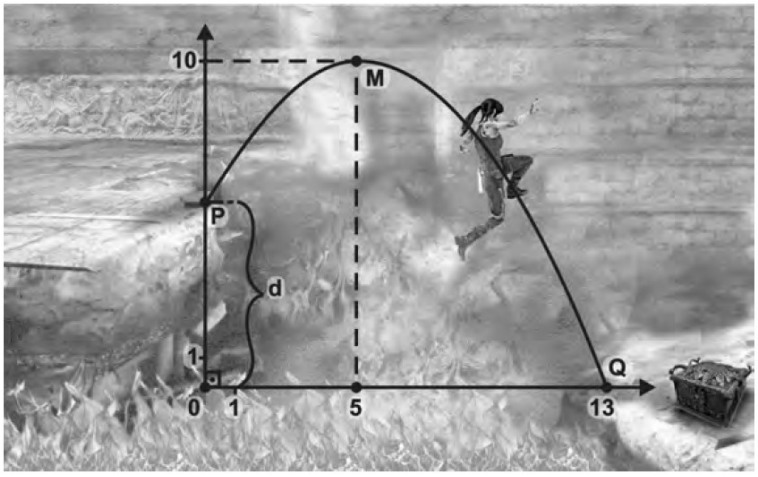
a) $\{x_2\}$, sendo x_2 a raiz positiva de $f(x)$.
b) $\{x \in R \mid 0 \leq x \leq x_2\}$, sendo x_2 a raiz positiva de $f(x)$.
c) $\{x \in R \mid x_1 \leq x \leq x_2\}$, sendo x_1 e x_2 raízes de $f(x)$, com $x_1 < x_2$.
d) $\{x \in R \mid x \geq 0\}$.
e) $x \in R$.

10 - (ENEM MEC/2022) O chocolate é um dos alimentos mais apreciados e desejados do mundo. Uma loja especializada nesse produto oferece uma promoção para os bombons, que custam R$ 2,00 cada. Cada cliente tem *x*% de desconto na compra de *x* bombons. A promoção é válida para a compra de até 40 bombons, ou seja, 40% é o desconto máximo possível. Queremos escrever uma expressão para *V* em função de *x*, com $x \leq 40$.

Qual é a expressão do valor *V*, em reais, na compra de *x* bombons da promoção, por cliente?

a) $V = \frac{1}{50}x^2$
b) $V = 2 - \frac{1}{50}x$
c) $V = 2x - \frac{1}{50}x^2$
d) $V = x - \frac{1}{100}x^2$
e) $V = 2x - \frac{1}{100}x$

11 - (UEL PR/2022) Lara Croft – a famosa personagem feminina da indústria dos *games* – é uma arqueóloga que explora tumbas, templos e campos. Em uma de suas missões, para abrir a Caixa de Pandora, realiza um salto entre dois rochedos, com desnível d, separados por um poço em chamas. Ao chegar do outro lado, observa que a Caixa de Pandora está protegida por um encantamento que somente cessa ao se conhecer o valor de d. Para ajudá-la, saiba que o salto coincide com um trecho de parábola, no plano cartesiano, que passa por três pontos: P = (0; d);M = (5; 10) e Q = (13; 0), onde P marca o início do salto, M é o vértice da parábola, e Q delimita o final do trecho, conforme a figura.



Com base no texto e na figura, assinale a alternativa que apresenta, corretamente, o valor do desnível d.

a) $\frac{191}{32}$
b) $\frac{192}{32}$
c) $\frac{193}{32}$
d) $\frac{194}{32}$
e) $\frac{195}{32}$

12 - (UEG GO/2022) A temperatura T (dada em °C), no interior de uma câmara, é descrita pela função abaixo, em que t representa o tempo, em horas:

$$T(t) = \begin{cases} 7, & se\ 0 \le t < 3 \\ -t^2 + 12t - 20, & se\ 3 \le t < 9 \\ 7, & se\ 9 \le t < 24 \end{cases}.$$

Determine o valor de t em que a temperatura assume o valor máximo.

a) 2 horas
b) 3 horas
c) 5 horas
d) 6 horas
e) 10 horas

13 - (FMABC SP/2022) Representado em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, o gráfico de uma função quadrática y = f(X) é uma parábola que intersecta o eixo das abscissas no ponto A(1, 0) e tem como coordenadas de seu vértice o ponto V(3, –4). A parábola intersecta o eixo das ordenadas no ponto de coordenadas

a) (0, 5).
b) (0, 8).
c) (0, 6).
d) (0, 3).

e) (0, 4).

14 - (ENEM MEC/2022) Ao analisar os dados de uma epidemia em uma cidade, peritos obtiveram um modelo que avalia a quantidade de pessoas infectadas a cada mês, ao longo de um ano. O modelo é dado por $p(t) = -t^2 + 10t + 24$, sendo t um número natural, variando de 1 a 12, que representa os meses do ano, e $p(t)$ a quantidade de pessoas infectadas no mês t do ano. Para tentar diminuir o número de infectados no próximo ano, a Secretaria Municipal de Saúde decidiu intensificar a propaganda oficial sobre os cuidados com a epidemia. Foram apresentadas cinco propostas (I, II, III, IV e V), com diferentes períodos de intensificação das propagandas:

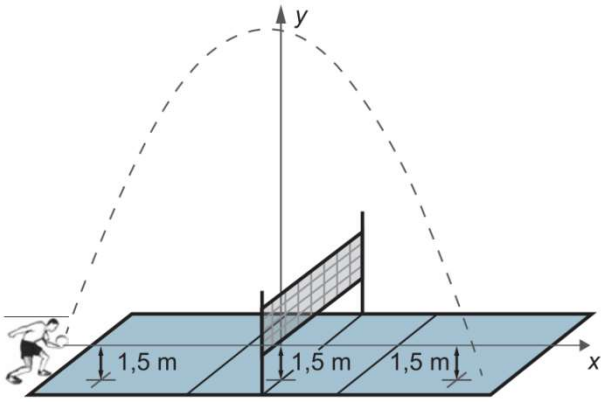
- I: $1 \leq t \leq 2$;
- II: $3 \leq t \leq 4$;
- III: $5 \leq t \leq 6$;
- IV: $7 \leq t \leq 9$;
- V: $10 \leq t \leq 12$.

A sugestão dos peritos é que seja escolhida a proposta cujo período de intensificação da propaganda englobe o mês em que, segundo o modelo, há a maior quantidade de infectados. A sugestão foi aceita.

A proposta escolhida foi a

a) I.
b) II.
c) III.
d) IV.
e) V.

15 - (ENEM MEC/2022) Em jogos de voleibol, um saque é invalidado se a bola atingir o teto do ginásio onde ocorre o jogo. Um jogador de uma equipe tem um saque que atinge uma grande altura. Seu recorde foi quando a batida do saque se iniciou a uma altura de 1,5 m do piso da quadra, e a trajetória da bola foi descrita pela parábola $y = -\frac{x^2}{6} - \frac{7x}{3} + 12$, em que y representa a altura da bola em relação ao eixo x (das abscissas) que está localizado a 1,5 m do piso da quadra, como representado na figura. Suponha que em todas as partidas algum saque desse jogador atinja a mesma altura do seu recorde.



A equipe desse jogador participou de um torneio de voleibol no qual jogou cinco partidas, cada uma delas em um ginásio diferente. As alturas dos tetos desses ginásios, em relação aos pisos das quadras, são:

- ginásio I: 17 m;
- ginásio II: 18 m;
- ginásio III: 19 m;
- ginásio IV: 21 m;
- ginásio V: 40 m.

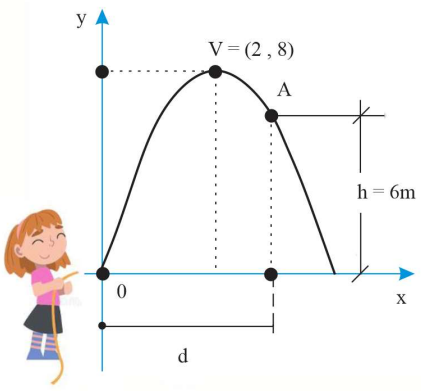
O saque desse atleta foi invalidado

a) apenas no ginásio I.
b) apenas nos ginásios I e II.
c) apenas nos ginásios I, II e III.
d) apenas nos ginásios I, II, III e IV.
e) em todos os ginásios.

16 - (Uniderp MS/2022) Baseados no fato de que "brincar com água produz uma sensação corpórea direta e uma conexão interior, vividas com grande prazer e curiosidade pela maioria das crianças", profissionais da área de saúde, de uma clínica multidisciplinar, desenvolveram atividades lúdicas com crianças que apresentam depressão. Mostraram a importância de oferecer a essas crianças brincadeiras que não estejam prontas, dando espaço à livre criação dos pequenos, o que ajuda no processo de recuperação.

Disponível em: <https://papodepracinha.com.br/2016/12/15/brincar-com-agua-leveza-e-imaginacao>. Acesso em: outubro de 2021. Adaptado.

Em uma das brincadeiras, uma criança inclinou a mangueira de modo que o jato d'agua esguichado descreveu um arco de parábola, como ilustrado na figura.



Sabendo-se que a água atinge uma altura máxima, em relação ao solo, no ponto V = (2 , 8) e que ao atingir o ponto **A**, essa altura diminui para 6,0m, pode-se afirmar que a distância **d**, da projeção do ponto **A** no solo até a criança, é igual a:

a) 2,2m
b) 2,5m
c) 3,0m
d) 3,5m
e) 3,8m

17 - (UFU MG/2023) A figura que segue apresenta a vista frontal da Igreja da Pampulha.



Disponível em: https://www.vivadecora.com.br/. Acesso em: 22 abr. 2023.

Considere que a fachada do prédio é representada por uma parábola no sistema cartesiano, de acordo com a figura a seguir, que o retângulo ABCD corresponde à abertura de entrada da Igreja, e que os pontos A, D, P e Q pertencem à parábola.

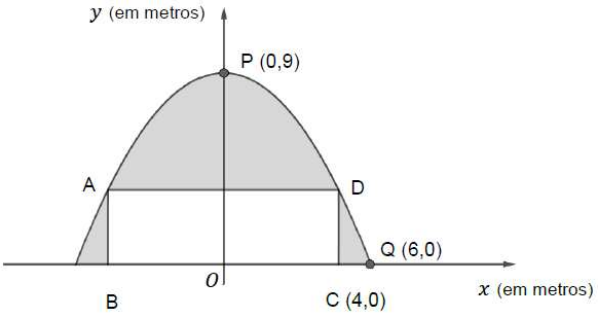


Figura ilustrativa e sem escalas

A área de ABCD, em m^2, é igual a

a) 40
b) 20
c) 16
d) 36

18 - (ENEM MEC/2023) Analisando as vendas de uma empresa, o gerente concluiu que o montante diário arrecadado, em milhar de real, poderia ser calculado pela expressão $V(x) = \frac{x^2}{4} - 10x + 105$, em que os valores de x representam os dias do mês, variando de 1 a 30.

Um dos fatores para avaliar o desempenho mensal da empresa é verificar qual é o menor montante diário V_0 arrecadado ao longo do mês e classificar o desempenho conforme as categorias apresentadas a seguir, em que as quantidades estão expressas em milhar de real.

- Ótimo: $V_0 \geq 24$
- Bom: $20 \leq V_0 < 24$
- Normal: $10 \leq V_0 < 20$
- Ruim: $4 \leq V_0 < 10$
- Péssimo: $V_0 < 4$

No caso analisado, qual seria a classificação do desempenho da empresa?

a) Ótimo.

b) Bom.
c) Normal.
d) Ruim.
e) Péssimo.

19 - (IFPI/2020) Sabendo-se que no gráfico da função quadrática, o eixo de simetria da parábola é sempre perpendicular ao eixo *x*. Com base nessa informação, qual o eixo de simetria do gráfico da função $y = -2x^2 - 4x + 1$?

a) x = 3
b) x = 2
c) x = 1
d) x = 0
e) x = −1

20 - (IFPI/2020) A trajetória de determinada bola em um chute descreve uma parábola. Supondo que a altura *y* (em metros) em que a bola se encontra *x* (segundos) após o chute, seja dada pela fórmula $y = -x^2 + 8x$. Qual a altura máxima atingida pela bola?

a) 20 metros
b) 18 metros
c) 16 metros
d) 10 metros
e) 4 metros

21 - (IFPI/2020) Sobre a função *f* definida por $f(x) = \left(\frac{p-2}{5}\right) \cdot x^2 + 4x + 3$ é **INCORRETO** afirmar que:

a) *f* é função polinomial do 1º grau crescente quando $p = 2$.
b) *f* é função quadrática que possui imagem mínima quando $p = 3$.
c) *f* é função quadrática que possui imagem máxima quando $p = 1$.
d) *f* é função polinomial do 1º grau de raiz igual a $-\frac{3}{4}$ quando $p = 2$.
e) *f* é função quadrática que possui duas raízes reais quando $p = 12$.

22 - (IFPI/2020) A função $f:[0,18] \to \mathrm{R}$, definida por $f(x) = -4x^2 + 72x$, descreve a altura em função do tempo de um projétil lançado do solo, sendo *x* em segundos e *f* em metros. Qual deve ser a altura máxima atingida por esse projétil?

a) 9 m
b) 72 m
c) 86 m
d) 32 m
e) 324 m

23 - (IFPI/2020) Seja *f* a função quadrática definida por $f(x) = (2p+3)x^2 + 3x - 5$, com $p \in \mathrm{R}$ e $p \neq \frac{-3}{2}$. Para que valores de *p* a função assume valor máximo?

a) $p \leq \frac{-3}{2}$

b) $p < \frac{-3}{2}$

c) $p \geq 0$

d) $p < 2$

e) $p > 0$

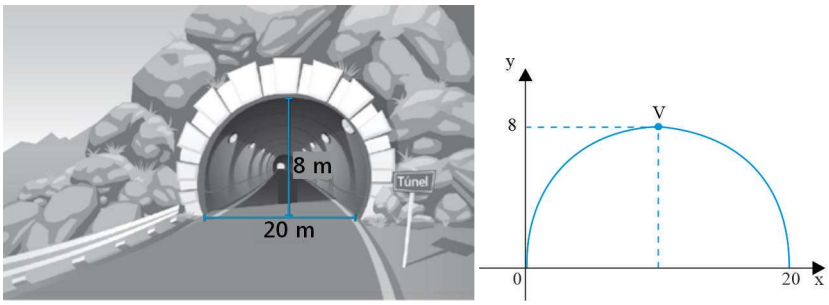
24 - (IFPI/2020) Seja a função quadrática *f* definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$. Sabendo que $f(0) = 1$, $f(2) = 9$, $f(-1) = 6$, qual valor de $f(-2) + f(1)$?

a) 19
b) 18
c) 16
d) 15
e) 14

25 - (IFPI/2020) Considere a função real *f*, tal que $f(x) = -3x^2 + 2$. O ponto $P(2, f(2))$ pertence a qual quadrante do plano cartesiano?

a) Primeiro quadrante.
b) Segundo quadrante.
c) Terceiro quadrante.
d) Quarto quadrante.
e) Segundo e terceiro quadrantes.

26 - (Cefet MG/2020) O corte transversal de um túnel, de pista única, em que a base tem 20 m de largura e a altura máxima é de 8 m, tem o formato de um arco de parábola, conforme representado na ilustração e no gráfico a seguir, sendo V o vértice da parábola.



Um caminhão, cujo formato do corte transversal de sua carroceria é um retângulo, tem altura do chão até seu ponto mais alto igual a 6 m. O ponto mais alto desse caminhão está em sua carroceria. Para que ele consiga passar no túnel, a maior largura possível para a carroceria do caminhão, dentre as opções abaixo, em metros, é

a) 6
b) 8
c) 11
d) 13

27 - (Uniube MG/2020) Em um plano cartesiano, o gráfico da função $f(x) = x^2 - 4x + k - 7$, em que k é uma constante real, é tangente ao eixo x no ponto de abscissa V e intersecta o eixo y no ponto de ordenada P. O gráfico da função $g(x) = ax^2 + bx + c$, em que a, b e c são constantes reais, com $b > 0$, passa pelos pontos P e V e tem 4,5 como valor máximo. A menor raiz da função g é

a) –1.
b) –2.
c) 1.
d) 2.
e) 0.

28 - (IFPI/2020) Seja *f* a função quadrática dada por $f(x) = (p + 1)x^2 + 2px + p + 1$. Para quais valores reais de *"p"*, a função *f* possui duas raízes distintas?

a) $p < \frac{-1}{2}$, com $p \neq -1$
b) $p \leq \frac{-1}{2}$
c) $p = \frac{2}{3}$
d) $p < \frac{2}{3}$, com $p \neq -1$
e) $p \geq \frac{2}{3}$, com $p \neq 1$

29 - (IFPI/2020) A trajetória de uma bola em um chute descreve uma parábola. Supondo que a altura *h* (em metros) em que a bola se encontra, *t* segundos após o chute, seja dada pela fórmula $h(t) = -t^2 + 4t$, qual a altura máxima atingida pela bola?

a) 2
b) 3
c) 4
d) 5
e) 6

30 - (IFBA/2020) Ao estudar a variação da temperatura de um objeto armazenado em um determinado local, técnicos chegaram a determinado modelo matemático. A equação obtida foi

$$f(x) = \frac{-x^2}{12} + 2x + 10,$$

sendo f(x) a temperatura dada em graus Celsius e x dado em horas. A temperatura máxima atingida por esse objeto, nesse local de armazenamento, é de:

a) 0°C.
b) 10°C.
c) 12°C.
d) 22°C.

e) 24°C.

31 - (IFBA/2020) Em uma indústria de produção de cereais em barras, o custo de produção em mil reais de x mil unidades de barras é dada pela função $C(x) = 0{,}1x^2 - 4x + 70$. Se cada barra de cereal é vendida a 4 reais, então a empresa não terá lucro, nem prejuízo, produzindo e vendendo:

a) 20 ou 70 barras de cereal
b) 30 ou 50 barras de cereal
c) 10 ou 70 barras de cereal
d) 20 ou 50 barras de cereal
e) 10 ou 50 barras de cereal

32 - (Fac. Cesgranrio RJ/2020) O valor mínimo da função polinomial de 2º grau $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a > 0$, ocorre quando $x = -\frac{b}{2a}$.

Se o valor mínimo de $f(x) = 2x^2 - kx + 14$ ocorre em $x = -4{,}5$, então k é igual a

a) 9
b) 18
c) 26
d) −18
e) −9

33 - (ENEM MEC/2020) Uma empresa de chocolates consultou o gerente de produção e verificou que existem cinco tipos diferentes de barras de chocolate que podem ser produzidas, com os seguintes preços no mercado:

- Barra I: R$ 2,00;
- Barra II: R$ 3,50;
- Barra III: R$ 4,00;
- Barra IV: R$ 7,00;
- Barra V: R$ 8,00.

Analisando as tendências do mercado, que incluem a quantidade vendida e a procura pelos consumidores, o gerente de vendas da empresa verificou que o lucro L com a venda de barras de chocolate é expresso pela função $L(x) = -x^2 + 14x - 45$, em que x representa o preço da barra de chocolate.

A empresa decide investir na fabricação da barra de chocolate cujo preço praticado no mercado renderá o maior lucro.

Nessas condições, a empresa deverá investir na produção da barra

a) I.
b) II.
c) III.
d) IV.
e) V.

34 - (ENEM MEC/2020) Em um ano, uma prefeitura apresentou o relatório de gastos públicos realizados pelo município. O documento mostra que foram gastos 72 mil reais no mês de janeiro (mês 1), que o maior gasto mensal ocorreu no mês de agosto (mês 8) e que a prefeitura gastou 105 mil reais no mês de dezembro (mês 12). A curva que modela esses gastos é a parábola $y = T(x)$, com x sendo o número correspondente ao mês e $T(x)$, em milhar de real.

A expressão da função cujo gráfico é o da parábola descrita é

a) $T(x) = -x^2 + 16x + 57$

b) $T(x) = -\frac{11}{16}x^2 + 11x + 72$

c) $T(x) = \frac{3}{5}x^2 - \frac{24}{5}x + \frac{381}{5}$

d) $T(x) = -x^2 - 16x + 87$

e) $T(x) = \frac{11}{16}x^2 - \frac{11}{2}x + 72$

35 - (IFSP/2020) O lucro mensal (L), em milhares de reais, de uma certa empresa varia de acordo com a quantidade vendida (q) de um certo produto, obedecendo a seguinte regra: $L(q) = \frac{-q^2}{10} + 120q + 300$ Atualmente a empresa vende 100 unidades por mês. Baseado nestas informações, em quantas unidades a empresa deverá aumentar as vendas mensais para que o lucro seja o maior possível?

a) 100
b) 120
c) 300
d) 500
e) 600

36 - (UEA AM/2020) Sabe-se que o produto das raízes da função real $f(x) = kx^2 - 6kx + k + 7$, com $k \neq 0$, é igual a 8. Nessas condições, as coordenadas do vértice V da parábola definida pela função $y = f(x)$ são

a) V(3, –2).
b) V(2, –1).
c) V(3, –1).
d) V(4, –1).
e) V(4, –2).

37 - (UniCesumar PR/2019) O estagiário de uma empresa recebeu a incumbência de analisar um gráfico antigo, impresso em papel, para descobrir o valor do lucro máximo previsto em um pequeno empreendimento. O estagiário sabia que se tratava de uma parábola relacionando o lucro do empreendimento com seus custos, ambos em mil reais. Como o gráfico apresentava-se muito danificado, não foi possível fazer diretamente a leitura da informação que procurava. Analisando bem o gráfico, contudo, o estagiário conseguiu descobrir as coordenadas de três únicos pontos: (0, 0), (1, 3) e (3, 3). A partir desses dados, pôde concluir corretamente que o lucro máximo previsto para esse empreendimento era de

a) R$ 2 000,00
b) R$ 3 000,00
c) R$ 4 000,00
d) R$ 5 000,00
e) R$ 6 000,00

38 - (UCB DF/2019) Um estudo epidemiológico da propagação da gripe em uma pequena cidade descobre que o número total *P* de pessoas que contraíram a gripe após *t* dias, em um surto da doença, é modelado pela seguinte função:

$P(t) = -t^2 + 13t + 130$ com $1 \leq t \leq 6$.

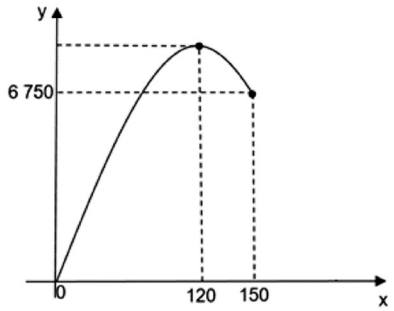
Após quantos dias o número de pessoas infectadas será igual a 160?

a) 6
b) 3
c) 4
d) 2
e) 5

39 - (UEG GO/2019) Em um jogo de futebol, um jogador chuta uma bola parada, que descreve uma parábola até cair novamente no gramado. Sabendo-se que a parábola é descrita pela função $y = 20x - x^2$, a altura máxima atingida pela bola é

a) 100 m
b) 80 m
c) 60 m
d) 40 m
e) 20 m

40 - (USF SP/2019) Um empresário do ramo farmacêutico que produz e comercializa antibióticos percebeu que a quantidade vendida variava de acordo com o preço de venda. Guiando-se pela lei da oferta e da procura, elaborou uma fórmula matemática que modela a Receita (y), em reais, em função da quantidade de antibióticos (x) vendidos pela empresa, sendo $0 \leq x \leq 150$.



Com base no gráfico, a receita máxima obtida com a venda de antibióticos é

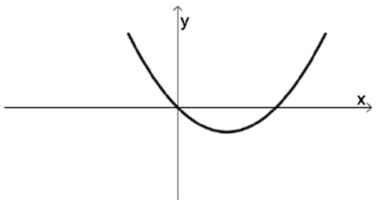
a) 5 040.
b) 7 200.

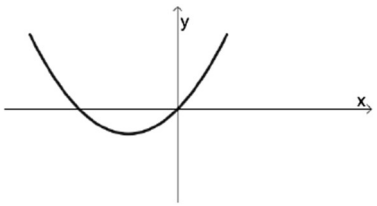
c) 9 320.
d) 12 000.
e) 13 680.

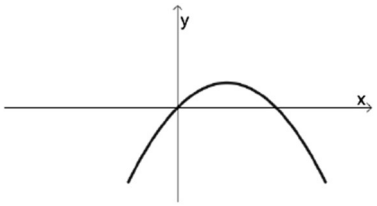
41 - (UnirG TO/2019) Dada a função do segundo grau $f(x) = x^2$, deseja-se desenhar o seu gráfico, de modo que o vértice seja deslocado duas unidades à direita e, depois, três unidades para cima, mantendo-se a concavidade da parábola. Nessas condições, a expressão da função obtida é dada por:

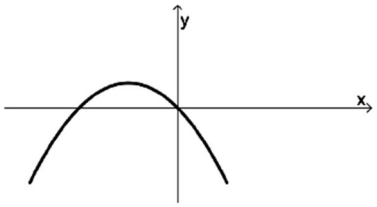
a) $g(x) = x^2 - 4x + 7$;
b) $g(x) = x^2 - 4x + 5$;
c) $g(x) = x^2 - 4x + 3$;
d) $g(x) = x^2 - 4x + 1$.

42 - (Unicamp SP/2019) Sejam a e b números reais positivos. Considere a função quadrática $f(x) = x(ax + b)$, definida para todo número real x. No plano cartesiano, qual figura corresponde ao gráfico de $y = f(x)$?

a)


b)


c)


d)


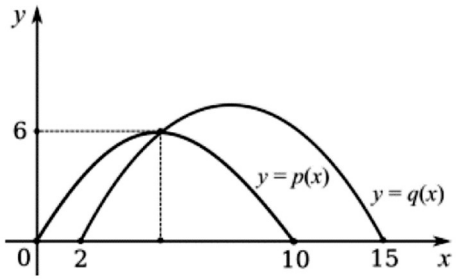
43 - (UFT TO/2019) Ao realizar o estudo de sua produção diária, uma cozinheira que faz e vende pamonhas, descobriu que o lucro em reais é calculado pela função $L(x) = -x^2 + 30x - 200$, onde x é o número de pamonhas feitas e vendidas.

Com base nestas informações, é CORRETO afirmar que o lucro máximo diário da cozinheira é:

a) R$ 10,00

b) R$ 15,00
c) R$ 20,00
d) R$ 25,00

44 - (UFU MG/2019) O arremesso de peso é uma modalidade de esporte tradicional nos jogos olímpicos e em competições esportivas mundiais. A equipe de treinamento de um atleta, para melhorar seu desempenho, analisou a trajetória de dois arremessos de peso, elaborando um esquema no plano cartesiano de modo que o primeiro peso percorreu o gráfico da função do segundo grau p(x), partindo do ponto de coordenadas (0, 0), atingindo altura máxima de 6 m e encontrando o solo no ponto (10, 0). O segundo peso percorreu o gráfico da função do segundo grau q(x), partindo do ponto (2, 0), passando pelo ponto em que o primeiro peso atingiu sua altura máxima, atingindo o solo no ponto (15, 0).



Nessas condições, a função do segundo grau cujo gráfico descreve a trajetória do segundo peso é expressa por:

a) $q(x) = -\frac{x^2}{5} - \frac{17x}{5} - 6$.

b) $q(x) = -\frac{x^2}{5} + \frac{17}{5}x - 6$.

c) $q(x) = -6x^2 + 102x - 180$.
d) $q(x) = -6x^2 - 102x - 180$.

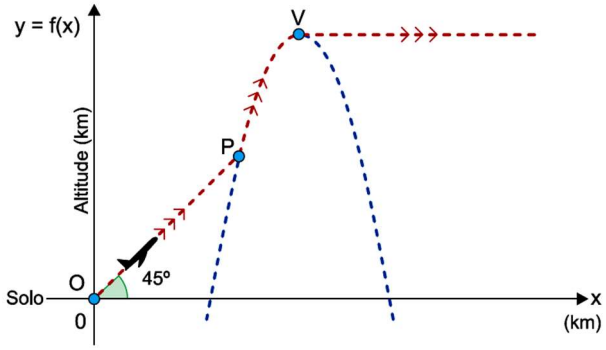
45 - (UEG GO/2019) As raízes da função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ são -1 e 3. Sabendo-se que o vértice é o ponto $(1, -4)$, os valores de a, b e c são, respectivamente:

a) $-1, -2$ e -3
b) $1, -2$ e -3
c) $-1, 2$ e 3
d) $1, 2$ e 3
e) $-1, -2$ e 3

46 - (ESPM SP/2019) Seja f uma função real tal que: $f(x) = -x^2 + k \cdot x + 3k$, com $k > 0$. Sabe-se que, para $x \leq 0$, o valor máximo de f é igual a 12. Podemos concluir que, para $x > 0$, seu valor máximo é:

a) 16
b) 17
c) 14
d) 13
e) 18

47 - (Unesp SP/2019) Em relação a um sistema cartesiano de eixos ortogonais com origem em O(0, 0), um avião se desloca, em linha reta, de O até o ponto P, mantendo sempre um ângulo de inclinação de 45° com a horizontal. A partir de P, o avião inicia trajetória parabólica, dada pela função $f(x) = -x^2 + 14x - 40$, com x e f(x) em quilômetros. Ao atingir o ponto mais alto da trajetória parabólica, no ponto V, o avião passa a se deslocar com altitude constante em relação ao solo, representado na figura pelo eixo x.



Em relação ao solo, do ponto P para o ponto V, a altitude do avião aumentou

a) 2,5 km.
b) 3 km.
c) 3,5 km.
d) 4 km.
e) 4,5 km.

48 - (UECE/2019) Seja $f : R \to R$ a função quadrática definida por $f(x) = x^2 + bx + c$. Se f assume o menor valor para $x = -1$ e se 2 é uma raiz da equação $f(x) = 0$, então, a soma $b + c$ é igual a

a) −4.
b) 4.
c) −3.
d) −6.

49 - (ENEM MEC/2019) No desenvolvimento de um novo remédio, pesquisadores monitoram a quantidade *Q* de uma substância circulando na corrente sanguínea de um paciente, ao longo do tempo *t*. Esses pesquisadores controlam o processo, observando que *Q* é uma função quadrática de *t*. Os dados coletados nas duas primeiras horas foram:

t (hora)	0	1	2
Q (miligrama)	1	4	6

Para decidir se devem interromper o processo, evitando riscos ao paciente, os pesquisadores querem saber, antecipadamente, a quantidade da substância que estará circulando na corrente sanguínea desse paciente após uma hora do último dado coletado.

Nas condições expostas, essa quantidade (em miligrama) será igual a

a) 4.
b) 7.
c) 8.
d) 9.
e) 10.

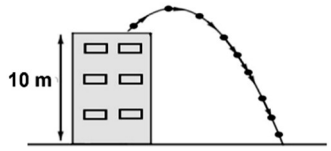
50 - (Unit AL/2019) A temperatura T (em °C) de um paciente, após receber um medicamento, varia em função do tempo t, de acordo com

$$T(t) = 36 + 2kt + (0{,}75 - k)t^2,$$

sendo k é uma constante real que depende da dose administrada.
Nessas condições, para que a temperatura não ultrapasse 40°C, o valor de k deve satisfazer:

a) $k \leq 1$
b) $k \geq 3$
c) $1 \leq k \leq 3$
d) $k \neq 1$ e $k \neq 3$
e) $k \leq 1$ ou $k \geq 3$

51 - (IFMT/2019) O gráfico da função $h(t) = -\frac{1}{4}t^2 + \frac{3}{2}t + 10$ descreve a trajetória de um objeto em função do tempo t, dado em segundos, que foi lançado de uma altura de 10 m.



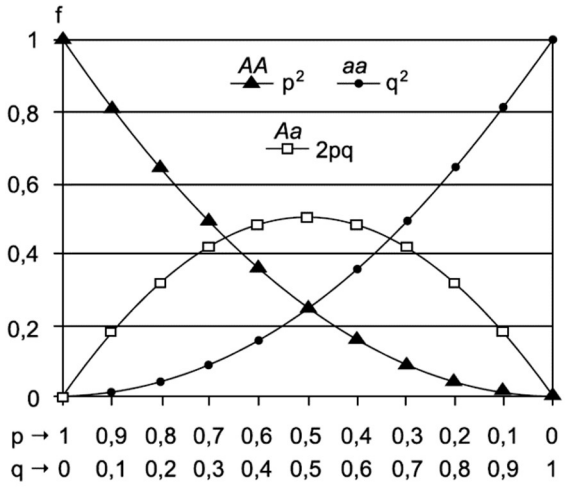
A altura máxima, obtida pelo objeto após o lançamento, e o tempo decorrido até tocar o solo são respectivamente iguais a:

a) 18,5 m e 7,5 segundos
b) 12,25 m e 10 segundos
c) 15 m e 12 segundos
d) 13,6 m e 11 segundos
e) 23 m e 17,5 segundos

TEXTO: 1 - Comum à questão: 52

O princípio de Hardy-Weinberg é utilizado no estudo da genética de populações. Por meio desse princípio, é possível predizer as frequências genotípicas de homozigotos e heterozigotos, a partir da frequência dos alelos observada em uma amostra da população.

Considerando que a frequência do alelo *A* é p e que a frequência do alelo *a* é q, de modo que $p + q = 1$, as frequências (f) para cada um dos possíveis genótipos (*AA*, *Aa* e *aa*) podem ser descritas pelas curvas presentes no gráfico:



(https://commons.wikimedia.org. Adaptado.)

52 - (Fac. Israelita de C. da Saúde Albert Einstein SP/2019) A curva obtida para o genótipo *Aa*, cuja frequência f é igual a 2pq, forma uma parábola que pode ser descrita, em função de p, pela expressão:

a) $f = 2p^2$
b) $f = 2p^2 - p$
c) $f = 2p - p^2$
d) $f = 2p - 2p^2$
e) $f = p - p^2$

Função Modular

Definição

A aplicação $f: R \to R$, definida por $f(x) = |x|$, em que $|x| = \begin{cases} x, \ se \ \geq 0 \\ -x, \ se \ x < 0 \end{cases}$ é denominada função modular.

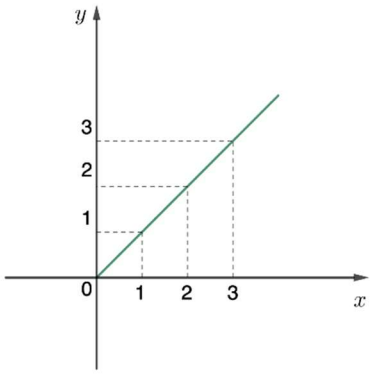
Exemplos:
a) $f(x) = |x|$.
b) $f(x) = |4x|$.
c) $f(x) = |2x - 1|$.
d) $f(x) = |x + 2| - 1$.

Gráfico da Função Modular

O gráfico de uma função modular é a reunião de duas semirretas de origem O.

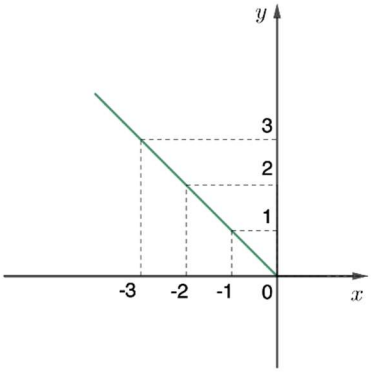
Exemplo 1: $f(x) = |x|$.

Obedecendo à definição de função modular, admitimos que $|x| = x$ quando $x \geq 0$, e $|x| = -x$ quando $x < 0$. Desse modo:



Se $x \geq 0$, então $f(x) = |x| = x$.

Para $x = 0$, obtemos que $f(0) = 0$;
Para $x = 1$, obtemos que $f(1) = 1$;
Para $x = 2$, obtemos que $f(2) = 2$;
Para $x = 3$, obtemos que $f(3) = 3$.

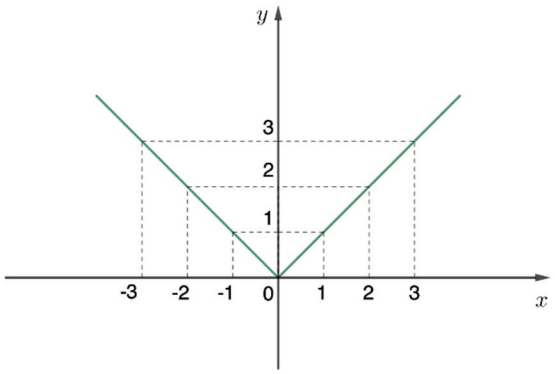


Por outro lado, se $x < 0$, então $f(x) = |x| = -x$.

Para $x = -1$, temos que $f(-1) = 1$;
Para $x = -2$, temos que $f(-2) = 2$;
Para $x = -3$, temos que $f(-3) = 3$.

Após a aplicação da definição, colocamos os dois gráficos encontrados em um só gráfico.

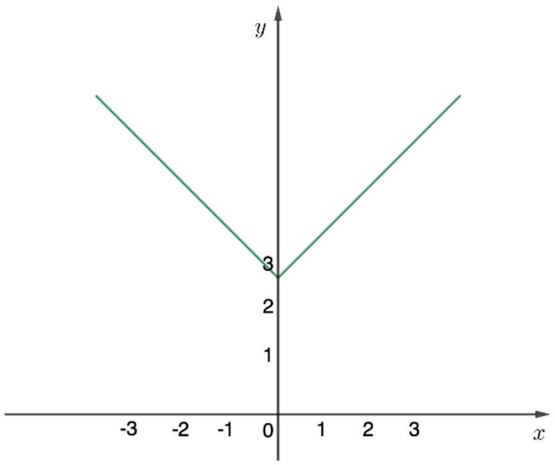
Portanto, o gráfico de $f(x) = |x|$ é:



Exemplo 2: $g(x) = |x| + 3$.

O gráfico de uma função $g(x) = |x| + k$ é similar ao gráfico de $f(x) = |x|$, entretanto é transladado para cima quando $k > 0$ e para baixo quando $k < 0$.

Portanto, o gráfico de $g(x) = |x| + 3$ é:

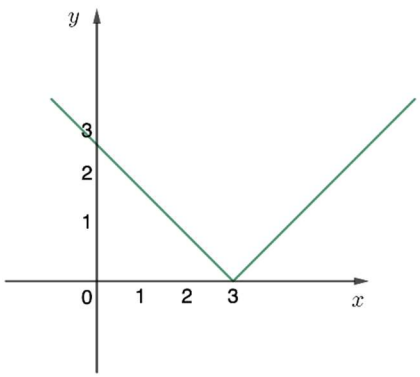


Note que o valor de unidades transladadas no gráfico é igual ao valor de k.

Exemplo 3: $h(x) = |x - 3|$.

O gráfico de uma função $h(x) = |x - m|$ é similar ao gráfico de $f(x) = |x|$, no entanto é transladado para a direita quando $m > 0$ e para a esquerda quando $m < 0$.

Na função $h(x) = |x - 3|$, $m = 3$. Portanto, o gráfico da função é:



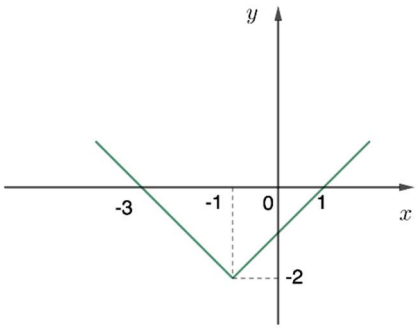
Note que o valor de unidades transladadas no gráfico é igual ao valor de m.

Exemplo 4: $\boldsymbol{p(x) = |x + 1| - 2}$.

Para construir o gráfico de uma função $p(x) = |x - m| + k$ aplicamos os conhecimentos dos dois exemplos anteriores.

Desse modo, em relação a uma função $p(x) = |x - m| + k$, consideramos que:
- Seu gráfico é congruente ao gráfico de $f(x) = |x|$;
- O gráfico é transladado para cima quando $k > 0$ e para baixo quando $k < 0$;
- O gráfico é transladado para a direita quando $m > 0$ e para a esquerda quando $m < 0$.

Portanto, o gráfico de $p(x) = |x + 1| - 2$, em que $k = -2$ e $m = -1$, é:



Equações Modulares

Para a resolução de equações modulares devemos aplicar a propriedade do módulo dos números reais, para $k > 0$.

Então, para $k > 0$, $|x| = k \iff x = k$ ou $x = -k$.

Exemplo 1: Determine o valor que x que satisfaz a equação $|x + 3| = 5$.

Usando a definição de módulo, temos que:

$$|x + 3| = 5 \Rightarrow \begin{cases} x + 3 = 5, & \Rightarrow x = 2, \\ & ou \\ x + 3 = 5, & \Rightarrow x = -8. \end{cases}$$

Logo, $S = \{-8, 2\}$.

Exemplo 2: Determine o valor que x que satisfaz a equação $\left|3x + \frac{1}{2}\right| = \frac{7}{2}$.

Usando a definição de módulo, temos que:

$$\left|3x + \frac{1}{2}\right| = \frac{7}{2} \Rightarrow \begin{cases} 3x + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}, & \Rightarrow x = 1, \\ & ou \\ 3x + \frac{1}{2} = -\frac{7}{2}, & \Rightarrow x = -\frac{4}{2}. \end{cases}$$

Logo, $S = \left\{-\frac{4}{3}, 1\right\}$.

Exemplo 3: Determine o valor que x que satisfaz a equação $|x^2 + 3x + 1| = 1$.

Usando a definição de módulo, temos que:

$$|x^2 + 3x + 1| = 1 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 3x + 1 = 1, \\ ou \\ x^2 + 3x + 1 = -1. \end{cases}$$

Deste modo, se $x^2 + 3x + 1 = 1$, obtemos que:

$$x^2 + 3x = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 \Rightarrow \Delta = 9.$$

Assim,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x_1 = \frac{-3+\sqrt{9}}{2.1} = 0 \text{ e } x_2 = \frac{-3-\sqrt{9}}{2.1} = -3.$$

Por outro lado, se $x^2 + 3x + 1 = -1$, então:

$$x^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 \Rightarrow \Delta = 1.$$

Logo,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x_1 = \frac{-3+\sqrt{1}}{2.1} = -1 \text{ e } x_2 = \frac{-3-\sqrt{1}}{2.1} = -2.$$

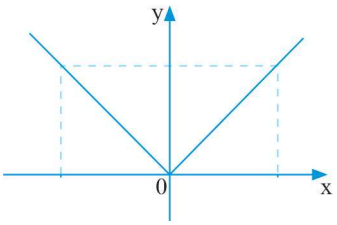
Portanto, $S = \{-3, -2, -1, 0\}$.

Exercícios

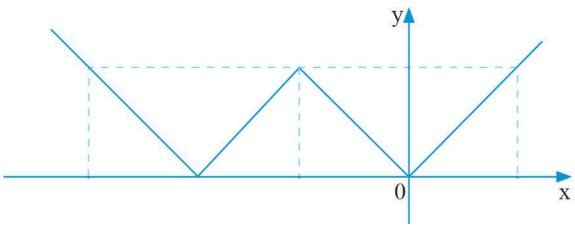
01 - (EPCAR EA/2021) Considere a função real **f** definida por $f(x) = |-|-c + x| + c|$, com $c \in \mathbb{R}$.

Dos gráficos apresentados nas alternativas a seguir, o único que **NÃO** pode representar a função **f** é

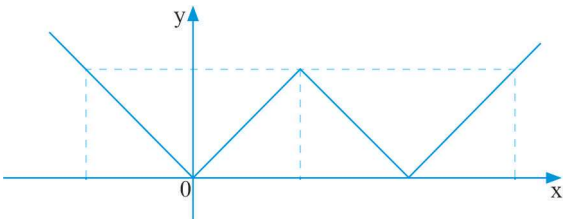
a)



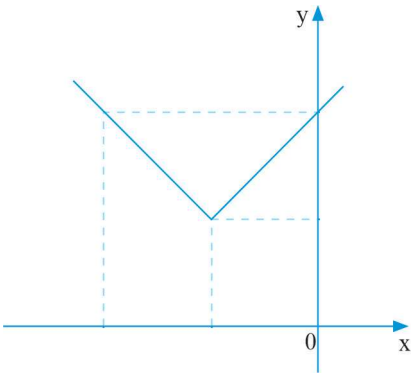
b)



c)



d)

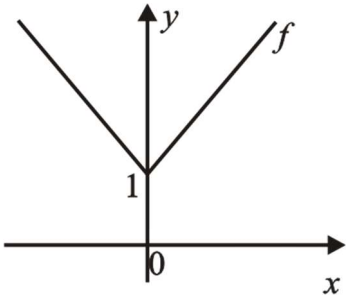


02 - (UFPE/2008) Quantas soluções, no conjunto dos números reais, a equação $|x|+|x-1|=3$ admite?

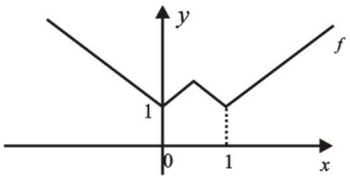
a) nenhuma
b) uma
c) duas
d) três
e) quatro

03 - (UEMG/2008) A melhor representação gráfica da função $f(x)=|x|+|x-1|$ é:

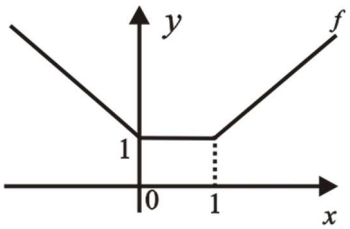
a)



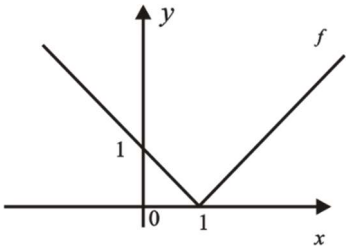
b)



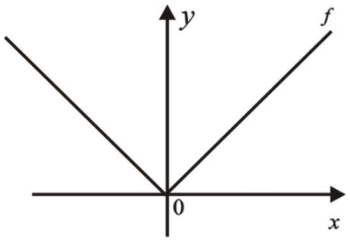
c)



d)

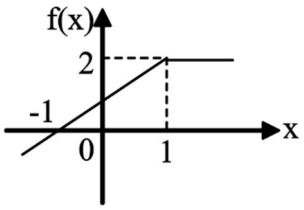


e)

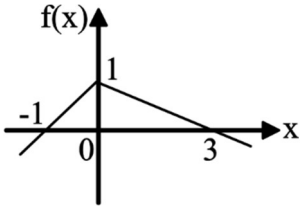


04 - (IBMEC SP Insper/2008) O gráfico que melhor representa a função real $f(x) = 2 - |1 - x|$ é:

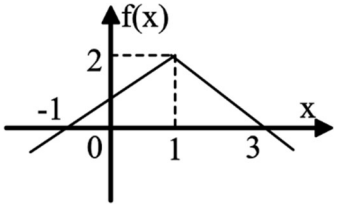
a)



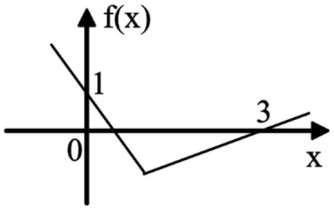
b)



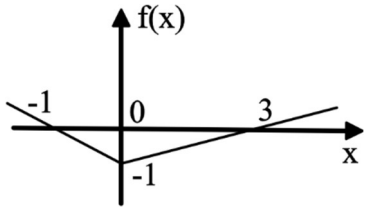
c)



d)



e)



05 - (EsPCEx SP/2009) Dada a função real modular f(x) = 8 + (|4k – 3| – 7) x, em que k é real. Todos os valores de k para que a função dada seja decrescente pertencem ao conjunto

a) k > 2,5
b) k < –1
c) –2,5 < k < –1
d) –1 < k < 2,5
e) k < –1 ou k > 2,5

06 - (UFTM MG/2010) A função f(x) = |x + 3| – |x + 1| tem valor maior que zero, para x real obedecendo à condição

a) x < –3.
b) –3 < x < 3.
c) x > 3.
d) x < 2.
e) x > –2.

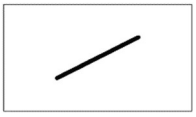
07 - (UPE/2011) Dos gráficos abaixo, o que mais se assemelha ao gráfico da função *f*(*x*) = ||x + 2| – 2| no intervalo – 5 < x < 5 é

a) 

b) 

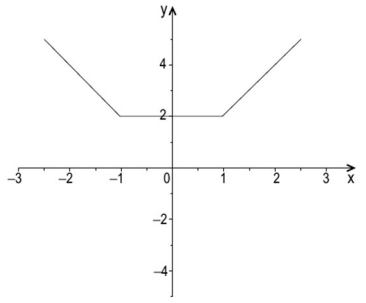
c) 

d) 

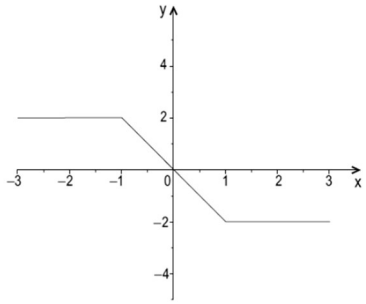
e) 

08 - (PUC RJ/2014) Considere a função real f(x) = |x + 1| + |x – 1|. O gráfico que representa a função é:

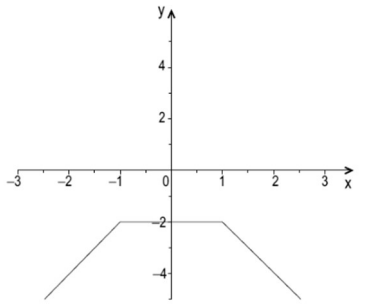
a)



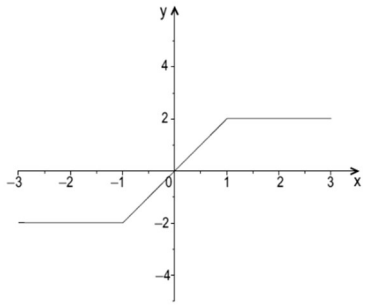
b)



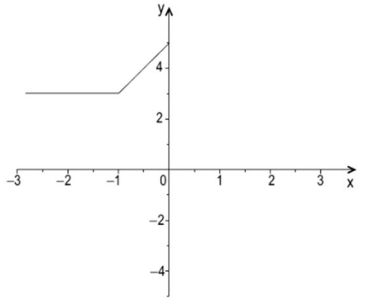
c)



d)

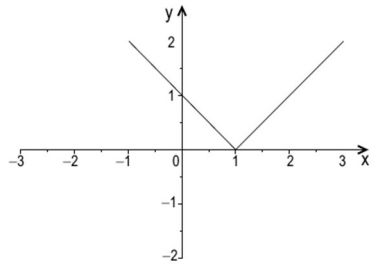


e)

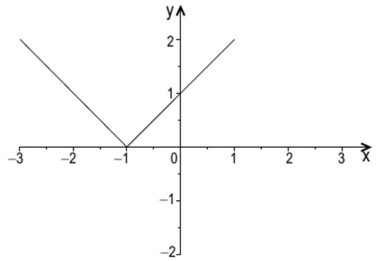


09 - (PUC RJ/2014) Considere a função real f(x) = |–x + 1|. O gráfico que representa a função é:

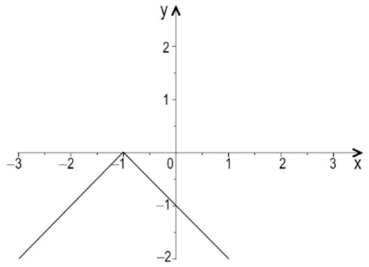
a)



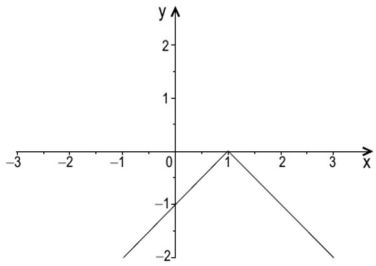
b)



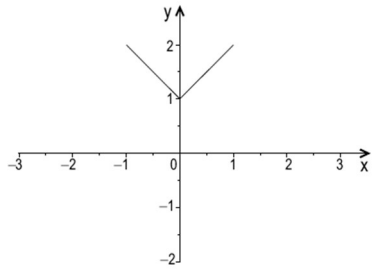
c)



d)

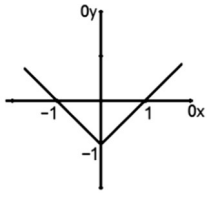


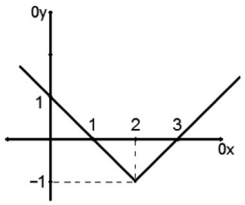
e)

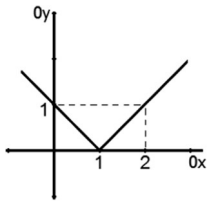


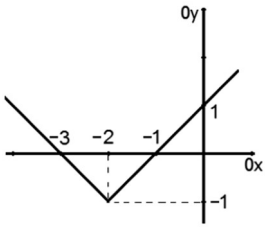
10 - (UERN/2014) Dentre os gráficos abaixo, assinale o que representa corretamente a função modular f(x) = |x – 2| – 1.

a)



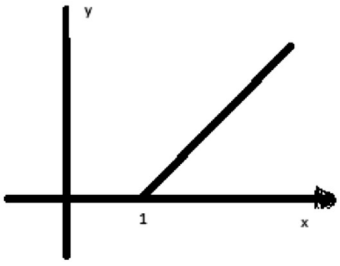
b) 

c) 

d) 

11 - (UniRV GO/2015) Uma função modular é definida por $|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$ todo $x \in IR$. Assinale (V) para as verdadeiras e (F) para as falsas.

a) A equação $|x^2 + x - 5| = |4x - 1|$ tem como solução S = {−6, −1, 1, 4}.
b) A solução para a equação $|x|^2 + 6|x| = -8$ é dada por S = {−4, −2}.
c) A solução para a inequação $|x^2 + x - 4| > 2$ é S = { $x \in IR$ / x < −2 ou −1 < x < 2 ou x > 3}.
d) O gráfico da função y = |x − 1| é:



12 - (Unifap AP/2015) Ezequiel e Marta têm dificuldades para resolver problemas que envolvam funções modulares. Daí escolhem a seguinte questão para treinar:

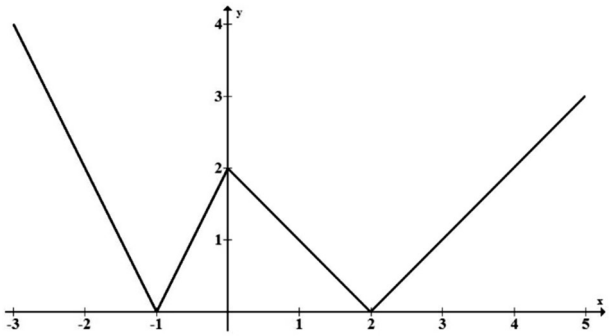
Sendo f(x) = |2x + 1|, qual é o valor de x quando f(x) = 2. Desta forma, qual foi à solução correta que eles encontraram:

a) $-\frac{3}{2}$ e $\frac{1}{2}$
b) 1 e 2
c) $\frac{3}{2}$ e $\frac{1}{2}$
d) $\frac{3}{2}$ e $-\frac{1}{2}$
e) 1

13 - (UEM PR/2016) Sejam f:R $\rightarrow$R e g:R $\rightarrow$R duas funções. Assinale o que for correto.

01. Se $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = x$, então $f(x) > g(x)$ para todo número real x.
02. Se f e g são funções modulares definidas por $f(x) = |x + 1|$ e $g(x) = |x - 1|$, então seus gráficos não têm intersecção.
04. Se f é a função modular definida por $f(x) = |2x|$ e g é a função constante definida por $g(x) = 10$, então $f(x) \leq g(x)$ quando $-5 \leq x \leq 5$; e $f(x) > g(x)$ se $x > 5$ ou $x < -5$.
08. Se $f(x) = 5 - |x + 1|$, então podemos calcular $\sqrt{f(x)}$ para todo $x \geq 0$.
16. Se f é a função modular definida por $f(x) = |x + 1|$, então o conjunto imagem de f é $Im(f) = [1, +\infty)$.

14 - (UEG GO/2016) Na figura a seguir, é apresentado o gráfico de uma função f, de R em R



A função f é dada por

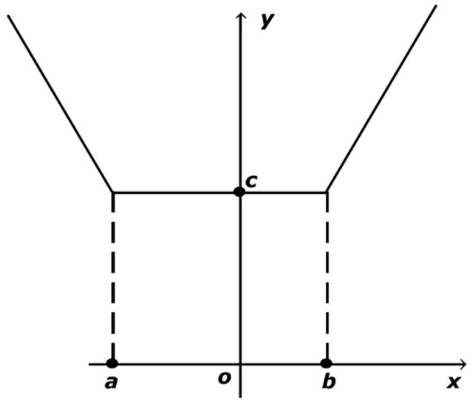
a) $f(x) = \begin{cases} |2x + 2|, & \text{se } x < 0 \\ |x - 2|, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -|x| + 2, & \text{se } -1 \leq x < 2 \\ |2x - 3|, & \text{se } x < -1 \text{ e } x \geq 2 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} |x - 1|, & \text{se } x < 0 \\ |x + 2|, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} -|x + 2|, & \text{se } -1 \leq x < 2 \\ |2x| + 1, & \text{se } x < -1 \text{ e } x \geq 2 \end{cases}$

15 - (EsPCEx SP/2018) Sabendo que o gráfico a seguir representa a função real $f(x) = |x - 2| + |x + 3|$, então o valor de a + b + c é igual a:



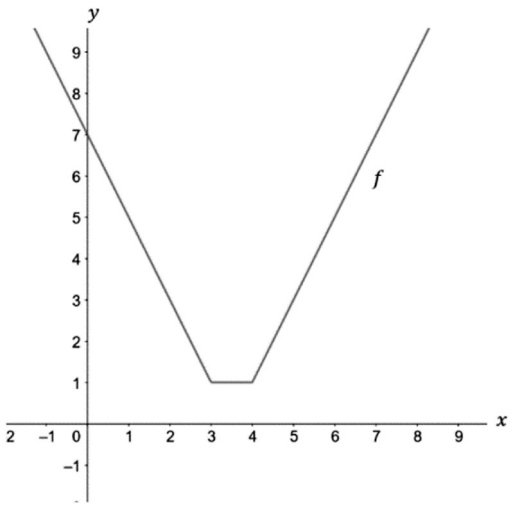
Desenho Ilustrativo Fora de Escala

a) –7.
b) –6.
c) 4.
d) 6.
e) 10.

16 - (EsPCEx SP/2019) A área da região compreendida entre o gráfico da função f(x) = ||x – 4|–2|, o eixo das abscissas e as retas x = 0 e x = 6 é igual a (em unidades de área)

a) 2.
b) 4.
c) 6.
d) 10.
e) 12.

17 - (UFMS/2020) Seja f:IR →IR uma função modular, representada pelo gráfico a seguir:



A função f pode ser representada por:

a) |x| + |x + 7|.
b) |3 – x| + |x – 4|.
c) –|x| + |x – 7|.
d) |x + 2| + |x + 5|.
e) |x + 9| – |3x + 2|.

Função Exponencial

Definição

Dado um número real a ($a > 0$ e $a \neq 1$), chamamos função exponencial de base a, a função $f: R \rightarrow R$, definida por $f(x) = a^x$ para todo x.

Exemplos:

a) $f(x) = 5^x$.

b) $f(x) = 0{,}2^x$.

c) $f(x) = \frac{4^x}{3}$.

d) $f(x) = \left(\sqrt{9}\right)^x$.

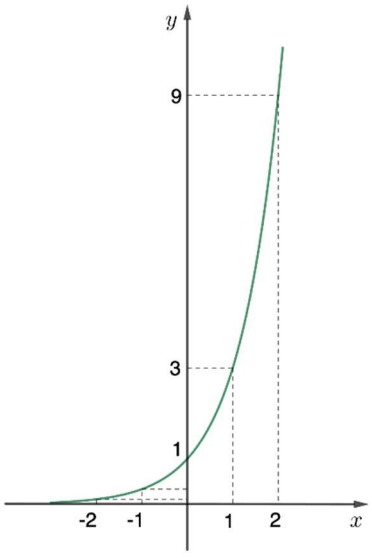
Gráfico da Função Exponencial

O gráfico de uma função exponencial é representado por uma curva. A depender do valor de a, essa curva pode ser crescente ou decrescente.

A função exponencial $f(x) = a^x$ é crescente quando $a > 1$.

Exemplo: Construir o gráfico da função exponencial de base 3, isto é, $f(x) = 3^x$.

Para $x = -2$, temos que $f(-2) = 3^{-2} = \frac{1}{9}$;
Para $x = -1$, temos que $f(-1) = 3^{-1} = \frac{1}{3}$;
Para $x = 0$, temos que $f(0) = 3^0 = 1$;
Para $x = 1$, temos que $f(1) = 3^1 = 3$;
Para $x = 2$, temos que $f(2) = 3^2 = 9$.



A função exponencial $f(x) = a^x$ é decrescente quando $0 < a < 1$.

Exemplo: Construir o gráfico da função exponencial de base $\frac{1}{3}$, ou seja, $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

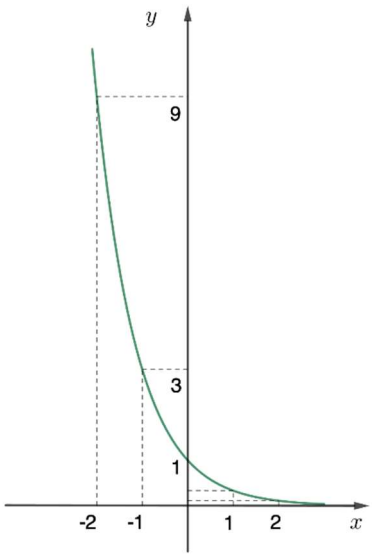
Para $x = -2$, temos que $f(-2) = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 9$;

Para $x = -1$, temos que $f(-1) = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3$;

Para $x = 0$, temos que $f(0) = \left(\frac{1}{3}\right)^{0} = 1$;

Para $x = 1$, temos que $f(1) = \left(\frac{1}{3}\right)^{1} = \frac{1}{3}$;

Para $x = 2$, temos que $f(2) = \left(\frac{1}{3}\right)^{2} = \frac{1}{9}$.



Atenção!

Observações:

1) O gráfico da função exponencial $f(x) = a^x$ não toca o eixo das abscissas, isto é, não existe valor x, pertencente aos reais, tal que $f(x) = 0$.

2) O gráfico da função exponencial $f(x) = a^x$ intersecta o eixo das ordenadas no ponto (0, 1).

Propriedades da Função Exponencial:

1) $f(1) = a^1 = a$, para todo $a \in \mathbb{R}$.

2) $f(x_1 + x_2) = a^{x_1+x_2} \Rightarrow f(x_1 + x_2) = a^{x_1} \cdot a^{x_2} \Rightarrow f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$, para quaisquer $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

3) $f(nx) = a^{nx} \Rightarrow f(nx) = (a^x)^n \Rightarrow f(nx) = (f(x))^n$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Equações Exponenciais

As equações exponenciais são equações cuja incógnita está presente nos expoentes.

São exemplos de equações exponenciais:

a) $8^x = 128$.

b) $\left(\frac{1}{5}\right)^x = 25$.

c) $3^x + 9 = 3^{2x}$.

d) $32^{x+1} = \sqrt{2^{2x}}$.

Para resolvermos equações exponenciais devemos transformá-las em uma igualdade de potência de mesma base.

Uma vez que ocorre a igualdade entre potências de mesma base, podemos afirmar que os expoentes dessas potências também são iguais. Desse modo, conseguimos encontrar o valor da incógnita da equação.

Exemplo 1: Determine o valor de x que satisfaça a equação $2^x = 64$.

Decompondo 64 em fatores primos, obtemos que

$$2^x = 64 \Rightarrow 2^x = 2^6.$$

Portanto, se nessa igualdade as bases são iguais, os expoentes também são iguais.

Logo, $x = 6$ e o conjunto solução é dado por $S = \{6\}$.

Exemplo 2: Determine o valor de x que satisfaça a equação $3^{x+1} = \frac{1}{81}$.

Decompondo 81 em fatores primos e usando as propriedades da potenciação, podemos escrever

$$3^{x+1} = \frac{1}{81} \Rightarrow 3^{x+1} = \frac{1}{3^4} \Rightarrow 3^{x+1} = 3^{-4}.$$

Igualando os expoentes, encontramos que

$$x + 1 = -4 \Rightarrow x = -4 - 1 \Rightarrow x = -5.$$

Assim, o conjunto solução é dado por $S = \{-5\}$.

Exemplo 3: Determine o valor de x que satisfaça a equação $4^{x^2+x-2} = 1$.

Temos que $4^{x^2+x-2} = 4^0$.

Deste modo, igualando os expoentes, obtemos

$$x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) \Rightarrow \Delta = 9.$$

Logo,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2.1} \Rightarrow x_1 = \frac{-1+3}{2} = 1 \text{ e } x_2 = \frac{-1-3}{2} = -2$$

Portanto, o conjunto solução é $S = \{-2, 1\}$.

Exemplo 4: Determine o valor de x que satisfaça a equação $0,4^x = \frac{8}{125}$.

Representando o número decimal $0,4$ como fração, obtemos que

$$0,4^x = \frac{8}{125} \Rightarrow \left(\frac{4}{10}\right)^x = \frac{2^3}{5^3} \Rightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^x = \left(\frac{2}{5}\right)^3.$$

Deste modo, igualando os expoentes, concluímos que $x = 3$ e, portanto, o conjunto solução é $S = \{3\}$.

Exercícios

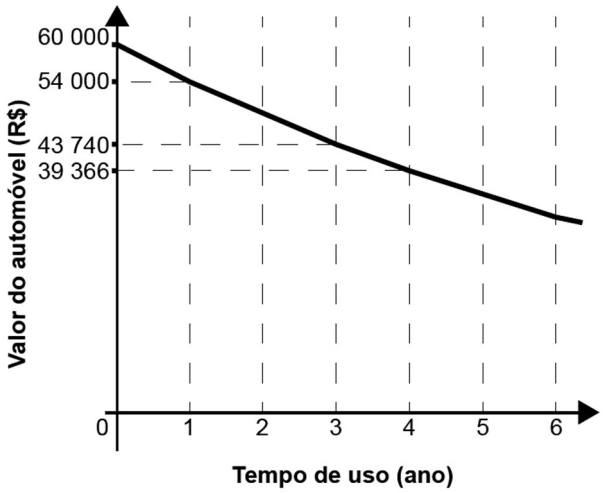
01 - (Univag MT/2017) Um grupo de ambientalistas alocou, no início de 1990, uma pequena população de 270 indivíduos de uma espécie animal em extinção em uma área de proteção ambiental. Devido ao ambiente propício para o desenvolvimento e procriação da espécie, os ambientalistas projetaram que o número N(t) de indivíduos

dessa população cresceria exponencialmente ao longo dos primeiros 30 anos, segundo a função $N(t) = 270 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{k \cdot t}$, sendo t o número de anos transcorridos após 1990.

Se após 20 anos o número de indivíduos dessa população passou a ser 480, confirmando a projeção feita pelos ambientalistas, então no início do ano 2020, quando serão completados os primeiros 30 anos, é esperado que o número de indivíduos dessa população seja igual a

a) 725.
b) 860.
c) 585.
d) 640.
e) 690.

02 - (ENEM MEC/2017) Um modelo de automóvel tem seu valor depreciado em função do tempo de uso segundo a função $f(t) = b \cdot a^t$, com tem ano. Essa função está representada no gráfico.



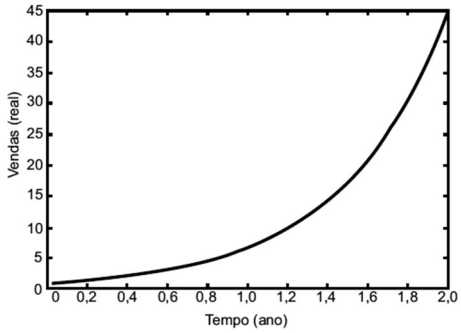
Qual será o valor desse automóvel, em real, ao completar dois anos de uso?

a) 48 000,00
b) 48 114,00
c) 48 600,00
d) 48 870,00
e) 49 683,00

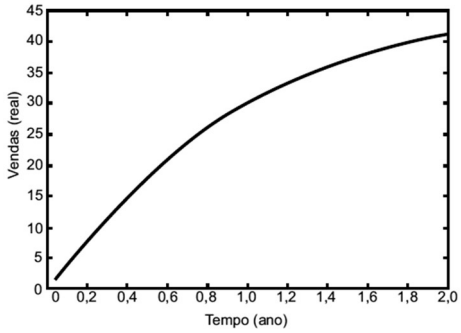
03 - (ENEM MEC/2017) Ao abrir um negócio, um microempresário descreveu suas vendas, em milhares de reais (unidade monetária brasileira), durante os dois primeiros anos. No primeiro ano, suas vendas cresceram de modo linear. Posteriormente, ele decidiu investir em propaganda, o que fez suas vendas crescerem de modo exponencial.

Qual é o gráfico que melhor descreve as vendas em função do tempo?

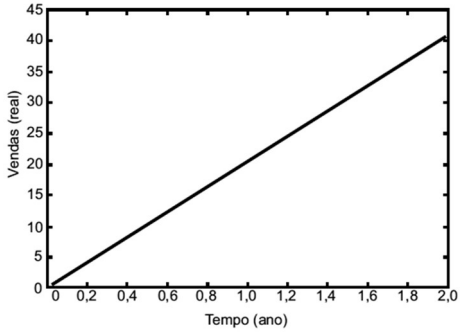
a)



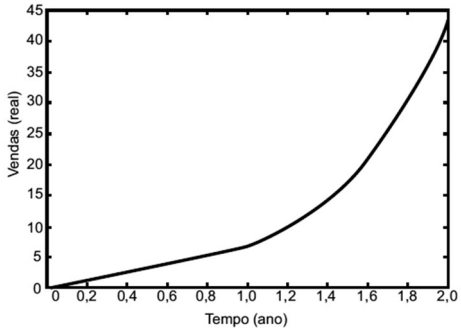
b)



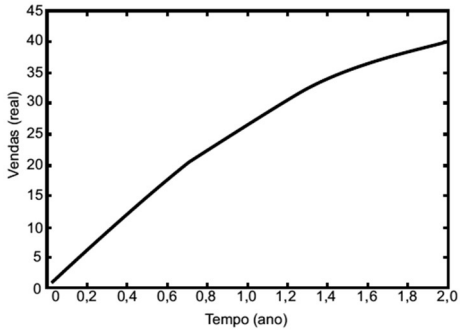
c)



d)



e)



04 - (UFRGS RS/2017) No estudo de uma população de bactérias, identificou-se que o número N de bactérias, t horas após o início do estudo, é dado por $N(t) = 20 \cdot 2^{1,5t}$.

Nessas condições, em quanto tempo a população de mosquitos duplicou?

a) 15 min.
b) 20 min.
c) 30 min.
d) 40 min.
e) 45 min.

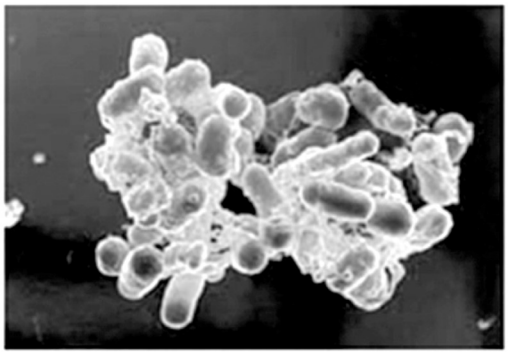
05 - (IFPE/2017) No início do ano de 2017, Carlos fez uma análise do crescimento do número de vendas de refrigeradores da sua empresa, mês a mês, referente ao ano de 2016. Com essa análise, ele percebeu um padrão matemático e conseguiu descrever a relação $V(x)=5+2^x$, onde V representa a quantidade de refrigeradores vendidos no mês x. Considere: x = 1 referente ao mês de janeiro; x = 12 referente ao mês de dezembro. A empresa de Carlos vendeu, no 2º trimestre de 2016, um total de

a) 39 refrigeradores.
b) 13 refrigeradores.
c) 127 refrigeradores.
d) 69 refrigeradores.
e) 112 refrigeradores.

06 - (IFPE/2017) Uma loja de sapatos desenvolveu um modelo matemático para calcular o número de pares vendidos nos 10 primeiros dias de um determinado mês. O modelo é dado pela função $n(d)=2^{d-1}-1$, onde "n" representa o número de pares vendidos no dia "d" do mês. Podemos afirmar que essa loja vendeu 63 pares no dia

a) 8.
b) 6.
c) 7.
d) 9.
e) 10.

07 - (Fac. Guanambi BA/2017)



Escheria coli (E. coli)

Um pequeno número da bactéria *E.Coli*, no intestino grosso de uma pessoa, pode desencadear uma séria infecção em poucas horas, pois cada uma delas se reproduz exponencialmente, dividindo-se em duas, a cada meia hora.

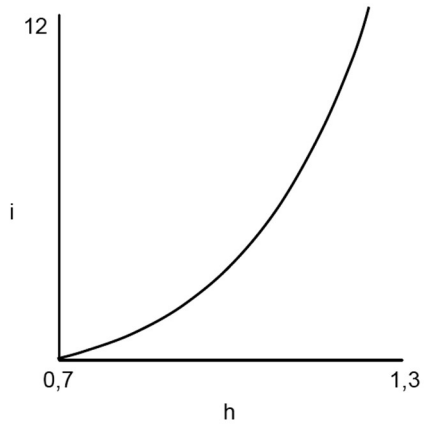
Admitindo-se que uma infecção se inicie com 100 dessas bactérias e que nenhuma bactéria morre em um intervalo de k horas, então o tamanho da população de *E. Coli* t horas pós o início da infecção, $0 \leq t \leq k$, pode ser determinado através da expressão matemática

01. $P(t) = 100^{2t}$
02. $P(t) = 100 + 2^t$
03. $P(t) = 100 + 2^{2t}$
04. $P(t) = 100.2^t$
05. $P(t) = 100.2^{2t}$

08 - (UEA AM/2017) Em uma cidade, o número de pessoas infectadas por determinado vírus, altamente contagioso, pode ser estimado por meio da função $f(x) = 13 + 3^{x+1}$, sendo x o número de dias, com x = 1 correspondendo ao dia 1º de abril e f(x) o número de pessoas infectadas. Caso nenhuma providência seja tomada, o número de pessoas infectadas atingirá a marca de 2 200 pessoas no dia

a) 5.
b) 6.
c) 7.
d) 8.
e) 9.

09 - (FPS PE/2017) Um médico, ao estudar o crescimento de crianças de um a doze anos, obteve a fórmula $i = 100^{h-0,7}$, onde a altura h é dada em metros, e a idade i, em anos. A seguir, temos um esboço de parte do gráfico de i em termos de h.



Segundo a fórmula, qual a idade de uma criança com altura de 120 cm?

a) 11 anos
b) 10 anos
c) 9 anos
d) 8 anos
e) 7 anos

10 - (Famema SP/2017) Em um plano cartesiano, o ponto P(a, b), com a e b números reais, é o ponto de máximo da função $f(x) = -x^2 + 2x + 8$. Se a função $g(x) = 3^{-2x+k}$, com k um número real, é tal que g(a) = b, o valor de k é

a) 2.
b) 3.
c) 4.
d) 1.
e) 0.

11 - (EBMSP BA/2018) Muita gente não consegue começar o dia sem uma xícara de café e até mesmo há quem se refira ao café como "o combustível do homem moderno". Uma xícara de café contém vitamina B12, vitamina B5, magnésio e potássio, e outros nutrientes.

Para preparar um café instantâneo adiciona-se água em ebulição, 100°C, à mistura do café.

A uma temperatura ambiente de 30°C, a temperatura do café, em °C, após t minutos, pode ser calculada pela função

$$f(t) = 30 + 70\left(\frac{5}{7}\right)^{\frac{t}{2}}.$$

Passados quatro minutos, após o preparo do café, a temperatura da bebida é, aproximadamente,

a) 64°C
b) 66°C
c) 68°C
d) 70°C
e) 72°C

12 - (Unipê PB/2018) A concentração C (em mg/l) de certo medicamento no sangue de um paciente variou, em função do tempo t, em horas, de acordo com $C(t) = C_0 \cdot 2^{-kt}$, em que C_0 é a concentração inicial e k é uma constante real não nula.

Se em 12 horas a concentração diminuiu 87,5%, então o valor de k é

01) 0,25
02) 0,50
03) 0,75
04) 1,00
05) 1,25

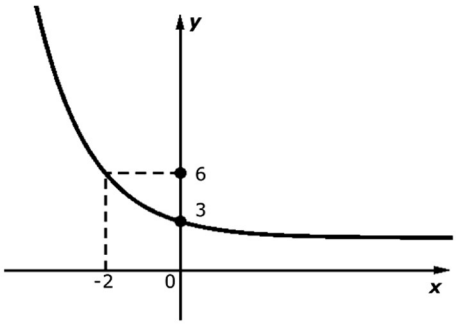
13 - (UNITAU SP/2018) Em pesquisa realizada, constatou-se que a população (P), em milhares de pessoas, de uma determinada cidade, cresce segundo a expressão $P(t) = 10 \cdot 3^t$, em que t representa o tempo em anos.

Podemos afirmar CORRETAMENTE que, para atingir uma população de 270 mil pessoas, será necessário um tempo de

a) 2 anos
b) 3 anos
c) 4 anos

d) 5 anos
e) 6 anos

14 - (EsPCEx SP/2018) A figura mostra um esboço do gráfico da função $f(x) = a^x + b$, com a e b reais, $a > 0$, $a \neq 1$ e $b \neq 0$. Então, o valor de $f(2) - f(-2)$ é igual a



Desenho Ilustrativo Fora de Escala

a) $-\frac{3}{4}$.
b) $-\frac{15}{4}$.
c) $-\frac{1}{4}$.
d) $-\frac{7}{6}$.
e) $-\frac{35}{6}$.

15 - (UFGD MS/2018) Um grupo de estudantes verificou que o crescimento de uma determinada população de bactérias é dado pela função $P(t) = 200 \cdot 3^{\frac{3}{2}t}$, na qual P identifica a população e a variável t indica o tempo em anos. Considerando as condições apresentadas, qual o tempo mínimo para que a população de bactérias seja o triplo da população inicial?

a) 3 meses.
b) 4 meses.
c) 6 meses.
d) 8 meses.
e) 12 meses.

16 - (IFRS/2018) Sabendo que $f(x) = 2^x$ e $g(x) = 2^{-x}$, considere as afirmações abaixo.

I. $f(x) + g(x) \geq 2$, para todo x número real.
II. $f(x) + g(x) = f(-x) + g(-x)$, para todo x número real.
III. se $x > y$, então $g(x) > g(y)$.

Assinale a alternativa correta.

a) É verdadeira somente a afirmação I.
b) É verdadeira somente a afirmação II.
c) São verdadeiras somente as afirmações I e II.
d) São verdadeiras somente as afirmações I e III.

e) São verdadeiras somente as afirmações II e III.

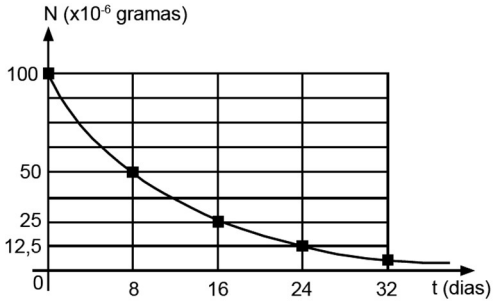
17 - (Unemat MT/2018) Certa substância se desintegra obedecendo à seguinte expressão: $Q(t) = k \cdot 2^{-0,5t}$, em que t é o tempo (em horas), k é uma constante real e Q(t) é a quantidade da substância (em gramas), no tempo t.

Considerando que no instante inicial, t = 0, a quantidade de substância é de 800g, assinale a alternativa que corresponde ao tempo necessário para que a quantidade dessa substância esteja reduzida a 25% do seu valor inicial.

a) 2 h
b) 4 h
c) 6 h
d) 8 h
e) 10 h

18 - (PUC RS/2018) Em hospitais de grande porte das principais cidades do país são realizados tratamentos que utilizam radioisótopos emissores de radiações alfa, beta e gama.

O iodo 131, por exemplo, é um radioisótopo utilizado no tratamento de hipertireoidismo. O gráfico abaixo representa a massa residual de iodo 131 (N) presente em uma amostra em função do tempo (t).



A função que melhor descreve a massa residual de iodo 131 presente na amostra, em função do tempo, é $N(t) = N_0e^{kt}$, onde

a) $N_0 > 0$ e $k > 0$
b) $N_0 < 0$ e $k > 0$
c) $N_0 > 0$ e $k < 0$
d) $N_0 < 0$ e $k < 0$

19 - (IFBA/2018) A meia-vida é a quantidade de tempo característica de um decaimento exponencial. Se a quantidade que decai possui um valor no início do processo, na meia-vida a quantidade terá metade deste valor.

Nos processos radioativos, meia-vida ou período de semi-desintegração de um radioisótopo é o tempo necessário para desintegrar a metade da massa deste isótopo, que pode ocorrer em segundos ou em bilhões de anos, dependendo do grau de instabilidade do radioisótopo. Ou seja, se tivermos 100kg de um material, cuja meia-vida é de 100 anos; depois desses 100 anos, teremos 50kg deste material. Mais 100 anos e teremos 25kg, mais 100 anos e teremos 12,5 kg, mais 100 anos 6,25 kg, mais

100 anos 3,125 kg, mais 100 anos 1,5625 kg, mais 100 anos 0,78125 kg e assim sucessivamente.

No caso do carbono-14, a meia-vida é de 5.730 anos, ou seja, este é o tempo necessário para uma determinada massa deste isótopo instável decair para a metade da sua massa, transformando-se em nitrogênio- 14 pela emissão de uma partícula beta.

Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Meia--Vida>. Acesso em 7 ago. 2017.

Um laboratório identificou determinada substância que possui meia vida de 150 anos, e que a massa M, em quilogramas, é uma função do tempo t, em anos, e é dada pela expressão $M(t) = M_0 \cdot 2^{-kt}$ onde M_0 é a massa inicial e k é uma constante positiva. O tempo, em anos, necessário para a massa cair para $\frac{1}{4}$ da massa inicial é:

a) 300
b) 50
c) 100
d) 200
e) 250

20 - (UNITAU SP/2018) O valor V(t), expresso em reais, de uma máquina adquirida por R$ 54.000,00, varia em função do tempo t, expresso em anos, através da função $V(t) = C \cdot K^{0,5\,t}$, em que C e K são constantes positivas. Considere que essa máquina valerá, daqui a 4 anos, a terça parte do valor de aquisição.

Qual será seu valor daqui a 8 anos?

a) R$ 6.000,00
b) R$ 7.500,00
c) R$ 9.000,00
d) R$ 12.000,00
e) R$ 18.000,00

21 - (Famema SP/2018) Os gráficos das funções $f(x) = 1 + 2^{(x-k)}$ e g(x) = 2x + b, com k e b números reais, se intersectam no ponto (3, 5). Sabendo que k e b são as raízes de uma função do 2º grau, a abscissa do vértice do gráfico dessa função é

a) $\frac{1}{2}$
b) −1
c) 0
d) 1
e) 2

22 - (Uncisal AL/2018) Um pesquisador observou que os indivíduos de uma determinada espécie apresentam um decréscimo exponencial regido pela função $f(t) = a^{2-bt}$, em que a e b são constantes e a variável t é dada em anos. No início da pesquisa, ou seja, quando t = 0, foram registrados 1 024 indivíduos. Esse pesquisador estimou que, após 30 anos, essa população estará reduzida a 128 indivíduos. Nessas condições, o tempo necessário para que essa população se reduza a um único indivíduo é

a) 60 anos.
b) 80 anos.
c) 90 anos.
d) 100 anos.
e) 120 anos.

23 - (USF SP/2018) Em um experimento, o número de bactérias presentes nas culturas A e B, no instante t, em horas, é dado, respectivamente, por: $A(t) = 10 \cdot 2^{t-1} + 238$ e $B(t) = 2^{t+2} + 750$. De acordo com essas informações, o tempo decorrido, desde o início desse experimento, necessário para que o número de bactérias presentes na cultura A seja igual ao da cultura B é

a) 5 horas.
b) 6 horas.
c) 7 horas.
d) 9 horas.
e) 12 horas.

24 - (IFPR/2019) Alguns objetos de uso contínuo sofrem desvalorização comercial, devido ao uso e desgaste ao longo do tempo. Ao comprar uma moto, temos que o valor de venda V(t) da mesma, em função do tempo t de uso em anos, é dado pela seguinte função: $V(t) = 10000 \times (0,9)^t$. Dessa forma, essa moto poderá ser vendida por R$ 8.100,00, após quanto tempo de uso?

a) 2 anos.
b) 1 ano.
c) 18 meses.
d) 36 meses.

25 - (Unit AL/2019) A população, em uma cultura bacteriana, aumenta 44% a cada 2 horas. Se a população inicial for P_0, então a população t, horas depois, será dada por

a) $P(t) = P_0 + (0,44)^{2t}$
b) $P(t) = P_0 + (1,2)^{\frac{1}{2}}$
c) $P(t) = P_0 \cdot (0,44)^{\frac{1}{2}}$
d) $P(t) = P_0 \cdot (1,2)^t$
e) $P(t) = P_0 \cdot (1,44)^{2t}$

26 - (ENEM MEC/2019) Em um laboratório, cientistas observaram o crescimento de uma população de bactérias submetida a uma dieta magra em fósforo, com generosas porções de arsênico. Descobriu-se que o número de bactérias dessa população, após t horas de observação, poderia ser modelado pela função exponencial $N(t) = N_0e^{kt}$, em que N_0 é o número de bactérias no instante do início da observação ($t = 0$) e representa uma constante real maior que 1, e k é uma constante real positiva.

Sabe-se que, após uma hora de observação, o número de bactérias foi triplicado.

Cinco horas após o início da observação, o número de bactérias, em relação ao número inicial dessa cultura, foi

a) $3N_0$
b) $15N_0$
c) $243N_0$
d) $360N_0$
e) $729N_0$

27 - (UCB DF/2019) O número V de computadores infectados por um vírus aumenta de acordo com o modelo $V(t) = 100 \cdot e^{kt}$, em que *e* é a base dos logaritmos naturais, k é uma constante real e t é o tempo em horas. Se, após 30 minutos do início da infecção, há 400 computadores infectados pelo vírus, após 2 horas, o número de computadores infectados será igual a

a) 25.600.
b) 20.000.
c) 14.400.
d) 23.000.
e) 31.000.

28 - (PUC GO/2019) Um crescimento de bactérias foi inibido pela ação de antibióticos. Depois de várias experiências, chegou-se à seguinte fórmula que dá a quantidade de bactérias ao longo do tempo: $f(x) = 1000e^{20x-x^2}$.

Assinale a alternativa que apresenta a resposta correta:

a) O ápice do crescimento bacteriano ocorre quando x = 8h.
b) O ápice do crescimento bacteriano ocorre quando x = 10h.
c) O ápice do crescimento bacteriano ocorre quando x = 12h.
d) O ápice do crescimento bacteriano ocorre quando x = 14h.

29 - (PUC GO/2019) Uma curva de aprendizagem é um gráfico de uma função utilizada para relacionar a eficiência de trabalho de uma pessoa, em função de sua experiência. Admita que a expressão matemática dessa função é $f(x)=A+Be^{kx}$, em que x representa o tempo de experiência, $f(x)$ a eficiência e A, B e k representam constantes que dependem de dados do problema em questão e $e \cong 2{,}7$ (número de Euler).

Sabendo que a curva de aprendizagem de uma criança em um curso de inglês, após x dias de experiência é $f(x) = 70+65e^{0,1x}$ e em que $f(x)$ representa o número de palavras que consegue memorizar por dia, marque a alternativa que corretamente aponta o resultado de memorização do aluno ao final de 20 dias:

a) 543 palavras.
b) 533 palavras.
c) 523 palavras.
d) 513 palavras.

30 - (USCS SP/2019) Em um plano cartesiano, os gráficos das funções $f(x) = x^2 - bx + 6$ e $g(x) = 1 + 2^{\frac{x-1}{k}}$, com b e k números inteiros, se intersectam no ponto (1, 2). Sabendo que g(3) = 3, o valor de f(g(b) – k) é

a) 3.
b) 1.
c) 2.
d) –1.
e) 0.

31 - (FCM MG/2019) Em um laboratório, adotou-se a lei $y(t) = P \cdot C^{kt}$ para simular um modelo matemático de crescimento de determinada população ao longo de tempo t, onde y(t) representa a quantidade de indivíduos da população no instante (t), P a população presente no instante inicial, C e k constantes que variam de acordo com a espécie de população.
Para o procedimento de validação da lei, considerou-se C = 2. Se no início do experimento a população era composta por 30 indivíduos, após 1 hora, identificou-se a presença de 240 indivíduos.

A partir do instante inicial, para este cenário, pode-se estimar que a população alcance o total de 61.440 indivíduos após

a) 37 minutos.
b) 4 horas e 7 minutos.
c) 3 horas e 40 minutos.
d) 2 horas e 30 minutos.

32 - (Famema SP/2019) Os gráficos das funções $f(x) = 2^{x+k}$ e $g(x) = ax^2 + bx$, com k, a e b números inteiros, se intersectam no ponto (1, 1). Sabendo que g(2) = 0, o valor de g(f(3)) é

a) –8.
b) 16.
c) –16.
d) –3.
e) 8.

33 - (Fac. Pequeno Príncipe PR/2019) Os antibióticos, desde a descoberta da penicilina em 1928 por Sir Alexander Fleming, pareciam ser a resposta para o tratamento das infecções bacterianas. Percebe-se, no entanto, uma dificuldade cada vez maior na sua utilização. Por isso, às vezes é necessário realizar um exame para determinar qual antibiótico é mais eficaz para uma determinada infecção, esse exame chama-se antibiograma. Antibiograma é um exame laboratorial de urocultura (da urina / antibiograma urinário) ou cultura (de outro tipo de secreção) ou mesmo das fezes com posterior uso de antibióticos para determinar qual ou quais dos antibióticos será mais eficaz para eliminar determinada bactéria. Sejam as funções $f: A \subset \mathbb{R} \to B \subset \mathbb{R}$, tal que $y_1 = e^{-3t}$ e $y_2 = {}^{-4t+1}$ descrevem o comportamento de uma cultura de bactérias submetidas aos antibióticos A_1 e A_2, respectivamente. Onde o tempo t é medido em dias e y_1 e y_2 é o número de bactérias nessa cultura. A respeito dessa situação, assinale a alternativa correta.

a) O antibiótico A_2 é menos eficiente que o antibiótico A_1.

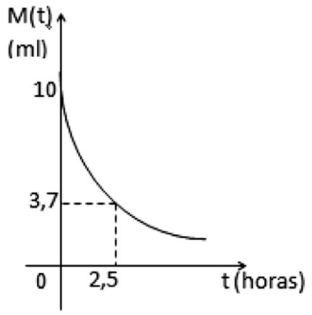
b) O antibiótico A_1 é menos eficiente que o antibiótico A_2.
c) Os gráficos de y_1 e y_2 nunca se interceptam.
d) Os gráficos de y_1 e y_2 interceptam o eixo das abscissas para t = 2 dias.
e) As funções y_1 e y_2 são bijetoras.

34 - (UFPR/2019) Um tanque contém uma solução de água e sal cuja concentração está diminuindo devido à adição de mais água. Suponha que a concentração Q(t) de sal no tanque, em gramas por litro (g/l), decorridas t horas após o início da diluição, seja dada por
$Q(t) = 100 \times 5^{-0,3t}$

Assinale a alternativa que mais se aproxima do tempo necessário para que a concentração de sal diminua para 50 g/l. (Use log 5 = 0,7)

a) 4 horas e 45 minutos.
b) 3 horas e 20 minutos.
c) 2 horas e 20 minutos.
d) 1 hora e 25 minutos.
e) 20 minutos.

35 - (UNITAU SP/2019) O gráfico a seguir ilustra o processo de eliminação de 10 ml de determinado medicamento injetado em um paciente no instante inicial de observação. Observa-se que, decorridas 2,5 horas, havia 3,7 ml do medicamento no organismo do paciente.



Considerando que a representação analítica para esse gráfico é a função exponencial cuja base é o número de Euler e dada por $M(t) = k.e^{-at}$, sendo k e a constantes reais, e dados os logaritmos naturais ln 2 = 0,69, ln 5 = 1,61 e ln 0,37 = −1, é CORRETO afirmar que o tempo necessário para que o organismo do paciente retenha 10% da quantidade inicial do medicamento é de

a) 1h 05 min
b) 2h 15 min
c) 3h 25 min
d) 4h 35 min
e) 5h 45 min

36 - (UCB DF/2019) A cólera é uma doença infectocontagiosa do intestino delgado, geralmente transmitida por meio de alimento ou água contaminados, cujo agente causador é a bactéria *Vibrio cholerae*. A quantidade de bactérias cresce exponencialmente pela divisão celular e é modelada pela função $N(t) = N_0e^{kt}$, em que *N*

é o número de bactérias após t horas, N_0 é o número de bactérias quando $t = 0$, e k é uma constante. Sabe-se que, em um intervalo de 5 horas, o número de bactérias multiplica-se por 1.000.

Nessas condições, é correto afirmar que, após 1h40, o número de bactérias ficará multiplicado por

a) 10.
b) 20.
c) 100.
d) 50.
e) 30.

37 - (UEG GO/2019) A intersecção dos gráficos das funções f(x) = 3^x e g(x) = $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ é

a) um ponto sobre o eixo das abscissas
b) um ponto de ordenada negativa
c) um ponto no 1º quadrante
d) a origem do sistema
e) o ponto (0,1)

38 - (IFPI/2020) Uma população de bactérias desenvolve- se de acordo com a função f dada por $f(T) = K_0 \cdot 2{,}5^{0{,}1T}$, onde K_0 é a quantidade inicial de bactérias da amostra e T, o tempo em horas. Sabendo que, após 20 horas do início do desenvolvimento da população de bactérias, ela contém 200000 indivíduos. Qual a população inicial de bactérias dessa população?

a) 20000 bactérias
b) 23000 bactérias
c) 28000 bactérias
d) 30000 bactérias
e) 32000 bactérias

39 - (IFBA/2020) Após estudos sobre a variação da população de determinada cidade, técnicos chegaram a um modelo matemático capaz de estimar, com boa precisão, seu número de habitantes. A fórmula matemática obtida foi P(x) = $1000 \cdot (20 - 1/2^x)$, sendo P o número de habitantes daqui a x anos. Estima-se que, durante o 3º ano, essa população:

a) se manterá constante.
b) aumentará em 125 habitantes.
c) aumentará em 250 habitantes.
d) diminuirá de 125 habitantes.
e) diminuirá de 250 habitantes.

40 - (Fac. Cesgranrio RJ/2020) Considere as funções exponenciais g(x) = 2^{6x-10} e h(x) = 8^{x-4}, ambas de domínio real.

Se g(2) = m e h(m) = k, qual é o valor de k?

a) 0

b) $\frac{5}{3}$
c) 1
d) $\frac{14}{3}$
e) 8

41 - (ENEM MEC/2020) Um laboratório realizou um teste para calcular a velocidade de reprodução de um tipo de bactéria. Para tanto, realizou um experimento para observar a reprodução de uma quantidade x dessas bactérias por um período de duas horas. Após esse período, constava no habitáculo do experimento uma população de 189 440 da citada bactéria. Constatou-se, assim, que a população de bactérias dobrava a cada 0,25 hora.

A quantidade inicial de bactérias era de

a) 370.
b) 740.
c) 1 480.
d) 11 840.
e) 23 680.

42 - (Unifor CE/2020) Em uma colônia de formigas, observou-se que, no instante t = 0, o número de formigas era de 1000 e que o crescimento desse formigueiro é dado pela função f definida por $f(t) = 1000 \cdot 2^{3t/5}$, onde t é o tempo decorrido em dias.

Supondo que não haja morte de formigas nesse formigueiro, então, em quantos dias, no mínimo, esse formigueiro atingirá 64.000 formigas?

a) 10 dias.
b) 12 dias.
c) 13 dias.
d) 14 dias.
e) 15 dias.

43 - (UFRGS RS/2020) A concentração de alguns medicamentos no organismo está relacionada com a meia-vida, ou seja, o tempo necessário para que a quantidade inicial do medicamento no organismo seja reduzida pela metade.

Considere que a meia-vida de determinado medicamento é de 6 horas. Sabendo que um paciente ingeriu 120 mg desse medicamento às 10 horas, assinale a alternativa que representa a melhor aproximação para a concentração desse medicamento, no organismo desse paciente, às 16 horas do dia seguinte.

a) 2,75 mg.
b) 3 mg.
c) 3,75 mg.
d) 4 mg.
e) 4,25 mg.

44 - (UCB DF/2020) Suponha que um paciente deva tomar uma pílula de 50 mg de um determinado medicamento todas as manhãs. Sabe-se que o corpo elimina 40% da droga a cada 24 horas. Se A_n é a quantidade do medicamento presente no corpo do paciente após tomar a n-ésima pílula, então, é correto afirmar que

a) $A_n = 25(1 - 0{,}6^n)$.
b) $A_n = 100(1 - 0{,}6^n)$.
c) $A_n = 75(1 - 0{,}6^n)$.
d) $A_n = 50(1 - 0{,}6^n)$.
e) $A_n = 125(1 - 0{,}6^n)$.

45 - (IFPR/2020) A função $L(t) = 2000 \times (1{,}5)^t$ representa o lucro mensal de uma empresa. O lucro dessa empresa, após 3 meses, em reais, será de:

a) 9000.
b) 8750.
c) 7500.
d) 6750.

46 - (FGV /2020) Estima-se que em cada um dos próximos 5 anos o PIB de um país cresça 5%. Qual deverá ser a taxa de crescimento x constante, em cada um dos 5 anos seguintes, para que o PIB dobre daqui a 10 anos, em relação ao deste ano?

a) 8,7% aproximadamente
b) 10,4% aproximadamente
c) 9,5% aproximadamente
d) 9,1% aproximadamente
e) 9,9% aproximadamente

Use a tabela:

m	0	1/2	1/3	1/4	1/5
2^m	1,00	1,41	1,26	1,19	1,15

47 - (Fac. Santo Agostinho BA/2020) Na tabela abaixo, o domínio da função são os valores de x, e a imagem da função, os valores de f(x) = y.

x	f(x)
-3	1/8
-2	1/4
-1	1/2
0	1
1	2
2	4
3	8

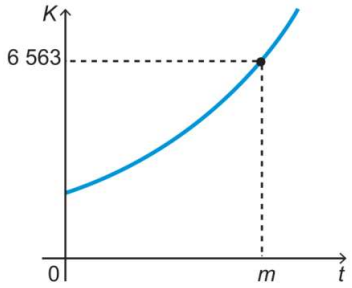
O valor de x cresce e os valores correspondentes de y também. Podemos dizer que os valores da tabela representam a função

a) linear.
b) quadrática.
c) exponencial.
d) logarítmica.
e) modular.

48 - (Unicamp SP/2020) Tendo em vista que a e b são números reais positivos, $a \neq b$, considere a função $f(x) = ab^x$, definida para todo número real x. Logo, f(2) é igual a

a) $\sqrt{f(1)f(3)}$.
b) f(3)/f(0).
c) f(0)f(1).
d) $f(0)^3$.

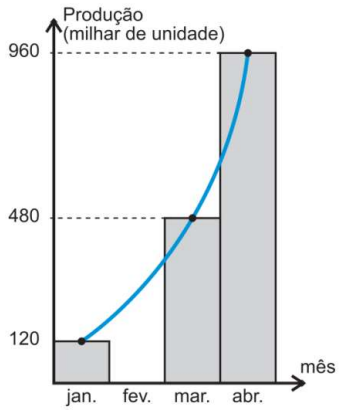
49 - (ENEM MEC/2021) O crescimento de uma população de microrganismos é descrito pela expressão $K(t) = 81 \cdot 3^{\frac{1}{3}t} + 2$, em que K(t) indica a quantidade de microrganismos em um meio de cultura em função do tempo t. O gráfico representa a evolução de K em relação ao tempo t.



Com base nos dados, o valor de m é

a) $\frac{4}{3}$
b) $\frac{7}{5}$
c) $\frac{24}{5}$
d) 12
e) 81

50 - (ENEM MEC/2021) O gráfico informa a produção registrada por uma indústria nos meses de janeiro, março e abril.



Por problemas logísticos, não foi feito o levantamento sobre a produção no mês de fevereiro. Entretanto, as informações dos outros três meses sugerem que a produção nesse quadrimestre cresceu exponencialmente, conforme aponta a curva de tendência traçada no gráfico.

Assumindo a premissa de que o crescimento nesse período foi exponencial, pode-se inferir que a produção dessa indústria no mês de fevereiro, em milhar de unidade, foi

a) 0.
b) 120.
c) 240.
d) 300.
e) 400.

51 - (PUC RS/2021) Em novembro de 2019, foi diagnosticado, na China, o primeiro caso da infecção conhecida por COVID-19. No Brasil, os primeiros casos surgiram no final da segunda quinzena de fevereiro de 2020. No dia 23/03/2020, foram diagnosticados, no Brasil, 1.960 casos. Supondo que a evolução prevista para o número de pessoas infectadas pelo novo coronavírus é dada por $P = 1.960 \cdot 2^{t/5}$, em que t é o número de dias corridos, a partir do dia 23/03/2020, e P o total de pessoas infectadas, quantos dias são previstos para que o número de pessoas infectadas seja 15.680?

a) 25
b) 20
c) 15
d) 5

52 - (UEMA/2021) Numa concessionária de caminhões zero, o vendedor informou ao comprador que a lei matemática que permite estimar a depreciação do veículo comprado é $v(t) = 65000 \cdot 4^{-0,04t}$, em que $v(t)$ é o valor, em reais, do caminhão, t anos após a aquisição como zero na concessionária.

Segundo a lei da depreciação indicada, o caminhão valerá um oitavo do valor de aquisição com

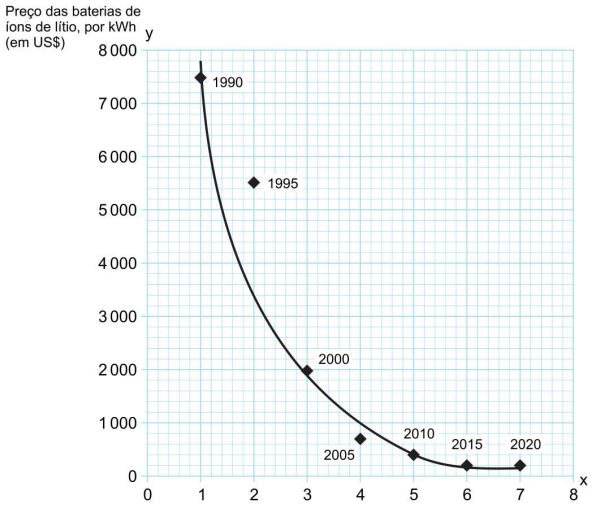
a) 37,5 anos.
b) 7,5 anos.
c) 25 anos.

d) 8 anos.
e) 27,5 anos.

53 - (UnirG TO/2021) Um grupo de amigos faz um investimento em uma aplicação financeira, de modo que após t meses o montante é dado por $M(t) = C \cdot 2^{0,01t}$, em que C é uma constante positiva. Qual o tempo mínimo para duplicar seu investimento inicial?

a) 8 anos e 10 meses.
b) 8 anos e 8 meses.
c) 8 anos e 6 meses.
d) 8 anos e 4 meses.

54 - (Unesp SP/2022) A expansão global da internet tem sido possível em virtude do barateamento dos eletrônicos portáteis e das baterias de alta capacidade que os alimentam. O gráfico indica a vertiginosa queda no preço médio das baterias de íons de lítio desde sua introdução, nos anos 90, até 2020. O modelo exponencial $y = 15649 \cdot e^{-0,687x}$, com valores de x e y indicados nos eixos do gráfico, prevê razoavelmente bem a relação entre essas variáveis.



Micah S. Ziegler e Jessika E.Trancik "Re-examining rates of lithium-ion battery technology improvement and cost decline". https://pubs.rsc.org. Adaptado.)

Adotando nos cálculos $e^{5,053} = 156,49$ e $e^{0,443} = 1,56$, o modelo exponencial utilizado prevê que, em 2025, o preço por kWh das baterias de íons de lítio será de, aproximadamente,

a) US$ 82.
b) US$ 64.
c) US$ 98.
d) US$ 56.
e) US$ 48.

55 - (ENEM MEC/2023) Um tipo de célula se reproduz constantemente por divisão celular, triplicando sua quantidade a cada duas horas, sob condições ideais de

proliferação. Suponha uma quantidade inicial Q_0 dessas células sob as condições ideais de proliferação durante um certo período.

Qual a representação algébrica da quantidade Q dessas células em função do tempo t, em hora, nesse período?

a) $Q(t) = Q_0 \cdot 3^t$

b) $Q(t) = Q_0 \cdot 3^{2t}$

c) $Q(t) = Q_0 \cdot 2^{\frac{t}{3}}$

d) $Q(t) = Q_0 \cdot 3^{\frac{t}{2}}$

e) $Q(t) = Q_0 \cdot 3^{\frac{t}{2}-1}$

56 - (ENEM MEC/2023) Um agricultor é informado sobre um método de proteção para sua lavoura que consiste em inserir larvas específicas, de rápida reprodução. A reprodução dessas larvas faz com que sua população multiplique-se por 10 a cada 3 dias e, para evitar eventuais desequilíbrios, é possível cessar essa reprodução aplicando-se um produto X. O agricultor decide iniciar esse método com 100 larvas e dispõe de 5 litros do produto X, cuja aplicação recomendada é de exatamente 1 litro para cada população de 200 000 larvas. A quantidade total do produto X de que ele dispõe deverá ser aplicada de uma única vez.

Quantos dias após iniciado esse método o agricultor deverá aplicar o produto X?

a) 2
b) 4
c) 6
d) 12
e) 18

Logaritmo e Função Logarítmica

Logaritmo

Dados os números reais e positivos a e b, com $a \neq 1$, o logaritmo de b na base a é o expoente no qual se deve elevar a base a para que a potência obtida seja igual a b.

Assim, $log_a b = x \iff a^x = b$, em que a é a base do logaritmo, b é o logaritmando e x é o logaritmo.

Exemplos:

a) $log_2 16 = 4 \iff 2^4 = 16$.

b) $log_3 \frac{1}{27} = -3 \iff 3^{-3} = \frac{1}{27}$.

c) $log_{\frac{1}{5}} 125 = -3 \iff \left(\frac{1}{5}\right)^{-3} = 125$.

d) $log_7 1 = 0 \iff 7^0 = 1$.

e) $log_{\sqrt{3}} 3 = 2 \iff \left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$.

Observação: Quando a base do logaritmo for igual a 10 (logaritmo decimal), ela pode ser omitida. Desse modo, $log_{10} 5 = log\ 5$.

Atenção!

A partir da definição de logaritmo conclui-se que:

1) $log_a 1 = 0 \Leftrightarrow a^0 = 1$.

2) $log_a a = 1 \Leftrightarrow a^1 = a$.

3) $log_a a^n = n \Leftrightarrow a^n = a^n$.

4) $a^{log_a N} = N$

$$log_a N = x \iff a^x = N$$

Portanto: $a^{log_a N} = N$.

5) $log_a x = log_a y \iff x = y$.

Propriedades dos Logaritmos

- **Logaritmo de um Produto**

O logaritmo do produto de dois números positivos – na mesma base – é igual à soma dos logaritmos de cada um desses números:

$$log_a(M \cdot N) = log_a M + log_a N.$$

Exemplos:

a) $log_5(3 \cdot 4) = log_5 3 + log_5 4$.

b) $log\ 200 = log\ log\ (2 \cdot 100) = log\ 2 + log\ 100$.

c) $log_3 21 = log_3(3 \cdot 7) = log_3 3 + log_3 7$.

- **Logaritmo de um Quociente**

O logaritmo do quociente de dois números positivos – na mesma base – é igual à diferença entre os logaritmos de cada um desses números:

$$log_a \frac{M}{N} = log_a M - log_a N.$$

Exemplos:

a) $log_2 \left(\frac{5}{2}\right) = log_2 5 - log_2 2.$

b) $log \left(\frac{12}{7}\right) = log\ 12 - log\ 7.$

c) $log_3 \left(\frac{1}{9}\right) = log_3 1 - log_3 9.$

- **Logaritmo de uma Potência**

O logaritmo de uma potência com base positiva é igual à multiplicação do expoente pelo logaritmo da base da potência:

$$log_a M^N = N.log_a M.$$

Exemplos:

a) $log_2 2^3 = 3 \cdot log_2 2.$

b) $log_3 27^4 = 4 \cdot log_3 27.$

c) $log \sqrt[2]{5} = log\ (5)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot log\ 5.$

Observação: Quando a base do logaritmo for uma potência admite-se que $log_{a^b} M = \frac{1}{b} \cdot log_a M.$

- **Mudança de Base do Logaritmo**

Para expressar $log_b N$ utilizando logaritmos na base a, aplicamos a mudança de base da seguinte forma:

$$log_b N = \frac{log_a N}{log_a b}.$$

Exemplos:

a) $log_4 2$, para a base 2: $log_4 2 = \frac{log_2 2}{log_2 4}.$

b) $log_2 3$, para a base 10: $log_2 3 = \frac{log_{10} 3}{log_{10} 2}.$

c) $log_7 25$, para a base 5: $log_7 25 = \frac{log_5 25}{log_5 7}.$

Observação: A partir da propriedade de mudança da base do logaritmo conclui-se que $log_b a = \frac{1}{log_a b}.$

Calculando Logaritmos

Exemplo 1: Considerando que $log_{10}2 = 0,301$ e que $log_{10}3 = 0,477$, determine $log_{10}60$.

Usando o fato que $60 = 2 \cdot 3 \cdot 10$ e as propriedades do logaritmo, temos que:

$$log_{10}\,60 = log\,(2 \cdot 3 \cdot 10) = log\,2 + log\,3 + log\,10 = 0,301 + 0,477 + 1 = 1,778.$$

Portanto, $log_{10}\,60 = 1,778$.

Exemplo 2: Considerando que $log_{10}2 = 0,301$, determine $log\sqrt[2]{1,28}$.

Representando o número decimal $1,28$ como fração e usando as propriedades do logaritmo, obtemos que:

$$log\sqrt[2]{1,28} = log\,(1,28)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot log\,(1,28) = \frac{1}{2}\,.log\,\frac{128}{100} = \frac{1}{2}\,.log\,\frac{2^7}{10^2}$$

Utilizando as propriedades do quociente e a potência, temos

$$log\sqrt[2]{1,28} = \frac{1}{2} \cdot (log\,2^7 - log\,10^2) = \frac{1}{2} \cdot (7 \cdot log\,2 - 2 \cdot log\,10)$$

Continuando os cálculos, segue que

$$log\sqrt[2]{1,28} = \frac{1}{2} \cdot (7 \cdot 0,301 - 2 \cdot 1) = \frac{1}{2}\,.0,107$$

Portanto, $log\sqrt[2]{1,28} = 0,0535$.

Exemplo 3: Considerando que $log_{10}2 = 0,301$, $log_{10}3 = 0,477$ e que $log_{10}5 = 0,699$, determine $log_2\,15$.

Usando a propriedade do produto para logaritmos, obtemos que:

$$log_2\,15 = log_2\,(3 \cdot 5) = log_2\,3 + log_2\,5.$$

Continuando com a propriedade da mudança de base, trocando a base 2 para a base 10, temos

$$log_2\,15 = \frac{log\,3}{log\,2} + \frac{log\,5}{log\,2} = \frac{0,477}{0,301} + \frac{0,699}{0,301} = \frac{1,176}{0,301}.$$

Portanto, $log_2\,15 \cong 3,90$.

Exemplo 4: Usando as propriedades do logaritmo, determine $log_{25}\,5$.

Utilizando a observação da propriedade do logaritmo de uma potência, temos que

$$log_{25}\,5 = log_{5^2}\,5 = \frac{1}{2}\,.log_5\,5 = \frac{1}{2} \cdot 1$$

Portanto, $log_{25}\,5 = \frac{1}{2}$.

Atenção!

É importante conhecer os valores dos logaritmos decimais de 2, 3 e 5:

- $log\,2 \cong 0,301$.
- $log\,3 \cong 0,477$.
- $log\,5 \cong 0,699$.

Logaritmo Natural (ln)

O logaritmo natural é o logaritmo de um número na base e .

O logaritmo natural de um número x pode ser escrito das seguintes maneiras:

- $log_e\ x$.
- $ln\ x$.

Observação: O número irracional e é chamado de número de Euler e vale, aproximadamente, $2{,}71$.

Todas as propriedades dos logaritmos se aplicam ao logaritmo natural. Logo, a maneira de resolver as questões é a mesma.

Exemplo: **Resolver a expressão $\boldsymbol{ln\ e^2 + 3.ln\ 1 - 5.ln\ \sqrt[5]{e}}$.**

Utilizando a definição do logaritmo natural e a propriedade de uma potência, temos

$$ln\ e^2 + 3 \cdot ln\ 1 - 5 \cdot ln\ \sqrt[5]{e} = log_e e^2 + 3 \cdot log_e 1 - 5 \cdot log_e \sqrt[5]{e}$$
$$= 2 \cdot log_e e + 3 \cdot log_e 1 - log_e \left(\sqrt[5]{e}\right)^5$$

Calculando os logaritmos conhecidos, temos

$$ln\ e^2 + 3 \cdot ln\ 1 - 5 \cdot ln\ \sqrt[5]{e} = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 - log_e e\ = 2 + 0 - 1 = 1$$

Portanto, $ln\ e^2 + 3 \cdot ln\ 1 - 5 \cdot ln\ \sqrt[5]{e} = 1$.

Função Logarítmica

Dado um número real a $(0 < a \neq 1)$, caracteriza-se função logarítmica de base a aquela em que cada número real positivo x é associado a um logaritmo de x na base a $(log_a\ x)$.

Exemplos:

a) $f(x) = log_3\ x$.

b) $f(x) = log_{10}\ x$.

c) $f(x) = log_{\frac{1}{2}}\ x$.

d) $f(x) = log_e\ x$.

Gráfico da Função Logarítmica

O gráfico da função logarítmica passa pelo ponto $(1{,}0)$, isto é, $log_a\ 1 = 0$, e nunca toca o eixo $0y$ nem possui pontos nos quadrantes II e III.

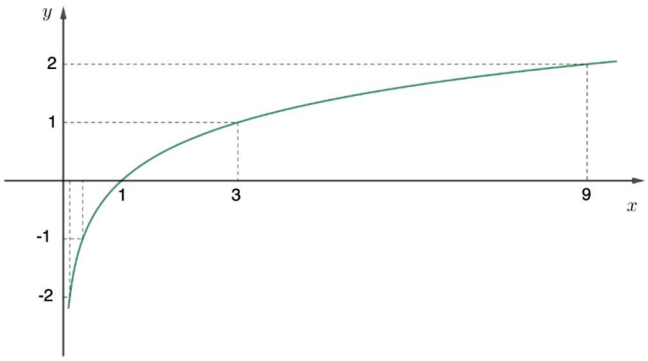
Observação: Apenas números positivos possuem logaritmo real.

A função logarítmica $f(x) = log_a\ x$ é crescente quando $a > 1$.

Exemplo: **Construir gráfico da função $\boldsymbol{f(x) = log_3\ x}$.**

Para $x = \frac{1}{9}$, obtemos que $f\left(\frac{1}{9}\right) = log_3 \frac{1}{9} = -2$;
Para $x = \frac{1}{3}$, obtemos que $f\left(\frac{1}{3}\right) = log_3 \frac{1}{3} = -1$;
Para $x = 1$, obtemos que $f(1) = log_3\ 1 = 0$;
Para $x = 3$, obtemos que $f(3) = log_3\ 3 = 1$;

Para $x = 9$, obtemos que $f(9) = log_3 9 = 2$.



A função logarítmica $f(x) = log_a x$ é decrescente quando $0 < a < 1$.

Exemplo: Construir gráfico da função $f(x) = log_{\frac{1}{3}} x$.

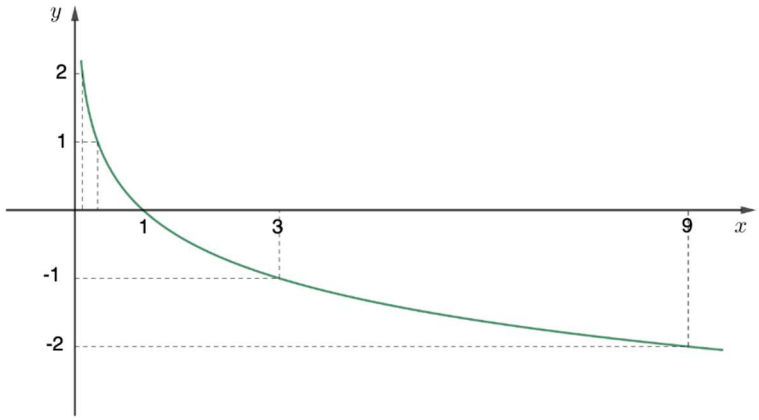
Para $x = \frac{1}{9}$, obtemos que $f\left(\frac{1}{9}\right) = log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9} = 2$;

Para $x = \frac{1}{3}$, obtemos que $f\left(\frac{1}{3}\right) = log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} = 1$;

Para $x = 1$, obtemos que $f(1) = log_{\frac{1}{3}} 1 = 0$;

Para $x = 3$, obtemos que $f(3) = log_{\frac{1}{3}} 3 = -1$;

Para $x = 9$, obtemos que $f(9) = log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$.



Atenção!

Observações:

1) A função logarítmica é ilimitada superior e inferiormente.

2) Diferente da função exponencial (com $a > 1$), que cresce rapidamente, a função logarítmica (com $a > 1$) cresce lentamente.

3) Tanto na função logarítmica crescente como na decrescente, o eixo das ordenadas se comporta como assíntota vertical do gráfico. Isto quer dizer que, à medida que o valor de x tende a zero, o valor da função cresce ou decresce de maneira ilimitada.

Equações Logarítmicas

As equações logarítmicas são aquelas cuja incógnita está presente no logaritmando ou na base do logaritmo.

São exemplos de equações logarítmicas:
a) $log_2\ x = 8$.
b) $log_3\ 3x + log_3\ (x-1) = 2$.
c) $log_{x-2}\ 5 = 3$.
d) $log\ x - log\ 2 = 3 \cdot log\ x$.

Para resolvermos equações logarítmicas devemos utilizar as propriedades dos logaritmos estudadas anteriormente. Além disso, pode ser necessária a conversão do logaritmo para a sua forma exponencial.

Exemplo 1: Determine o valor de x que satisfaça a equação $log_2\ x = 4$.

Pela definição de logaritmo, temos que:

$$2^4 = x.$$

Logo, $x = 16$.

Exemplo 2: Determine o valor de x que satisfaça a equação $log\ x + log\ (2x-1) = 1$.

Usando a definição e a propriedade do produto, temos que:

$$log\ [x(2x-1)] = 1 \Leftrightarrow 10^1 = x(2x-1) \Leftrightarrow 2x^2 - x - 10 = 0.$$

Deste modo,

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-10) \Rightarrow \Delta = 81,$$

e, assim

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{81}}{2.2} \Rightarrow x_1 = \frac{1+9}{4} = \frac{5}{2} \text{ e } x_2 = \frac{1-9}{4} = -2.$$

Uma vez que, pela condição de existência, o logaritmando não pode ser negativo, o único valor possível é $x = \frac{5}{2}$.

Exemplo 3: Determine o valor de x que satisfaça a equação $log_{x-1}\ x^2 = 2$.

Usando a definição de logaritmo, obtemos que:

$$(x-1)^2 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = x^2 \Leftrightarrow -2x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2x = 1$$

Portanto, $x = \frac{1}{2}$.

Exemplo 4: Determine o valor de x que satisfaça a equação $log_2\ 5x - log_2\ 1 = 3 \cdot log_2\ x$.

Usando a definição e as propriedades do quociente e potência dos logaritmos, segue que:

$$log_2\left(\frac{5x}{1}\right) = 3 \cdot log_2\ x \Rightarrow log_2\ 5x = 3 \cdot log_2\ x \Rightarrow log_2\ 5x = log_2\ x^3 \Rightarrow 5x = x^3.$$

Como o logaritmando é sempre maior que 0, podemos dividir ambos os lados da igualdade por x, ou seja,

$$x^2 = 5 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5}.$$

Portanto, de acordo com a condição de existência do logaritmo, $x = +\sqrt{5}$.

Exercícios

01 - (ENEM MEC/2019) A *Hydrangea macrophylla* é uma planta com flor azul ou cor-de-rosa, dependendo do pH do solo no qual está plantada. Em solo ácido (ou seja, com pH < 7) a flor é azul, enquanto que em solo alcalino (ou seja, com pH > 7) a flor é rosa. Considere que a *Hydrangea* cor-de-rosa mais valorizada comercialmente numa determinada região seja aquela produzida em solo com pH inferior a 8. Sabe-se que pH = $-\log_{10} x$, em que x é a concentração de íon hidrogênio (H^+).

Para produzir a *Hydrangea* cor-de-rosa de maior valor comercial, deve-se preparar o solo de modo que x assuma

a) qualquer valor acima de 10^{-8}.
b) qualquer valor positivo inferior a 10^{-7}.
c) valores maiores que 7 e menores que 8.
d) valores maiores que 70 e menores que 80.
e) valores maiores que 10^{-8} e menores que 10^{-7}.

02 - (UECE/2020) No país das comunicações, cuja população é x (em milhões de habitantes), uma notícia de interesse nacional foi divulgada e, t horas após a divulgação, o número de pessoas que tomaram conhecimento da notícia é dado por $f(t) = \frac{x}{1 + 5.2^{\frac{-x}{2}t}}$.

Sabendo que, uma hora após a divulgação, a metade da população já tinha conhecimento da notícia, é correto afirmar que a população desse país, em milhões de habitantes, é, aproximadamente,

Considere o logaritmo de cinco na base dois, aproximadamente, igual a 2,32.

a) 4,64.
b) 8,32.
c) 6,62.
d) 3,68.

03 - (ENEM MEC/2021) Um casal decidiu aplicar em um fundo de investimentos que tem uma taxa de rendimento de 0,8% ao mês, num regime de capitalização composta.

O valor final F a ser resgatado, depois de n meses, a uma taxa de rendimento mensal x, é dado pela expressão algébrica $F = C(1 + x)^n$, em que C representa o capital inicial aplicado.

O casal planeja manter a aplicação pelo tempo necessário para que o capital inicial de R$ 100 000,00 duplique, sem outros depósitos ou retiradas.

Fazendo uso da tabela, o casal pode determinar esse número de meses.

Y	Log *Y*
1,008	0,003
1,08	0,03
1,8	0,20
2	0,30
3	0,47

Para atender ao seu planejamento, o número de meses determinado pelo casal é

a) 156.
b) 125.
c) 100.
d) 10.
e) 1,5.

04 - (UESB BA/2017) Uma pesquisa realizada na primeira década do século XXI revelou que, a partir do ano 2000, em determinada região do Brasil, a expectativa de vida, em anos, sofreu modificação e é dada pela função E(t) = 12[150 log t – 491], sendo t o ano do nascimento da pessoa. Considerando-se log 2000 = 3,32, pode-se afirmar que uma pessoa dessa região que tenha nascido no ano 2000, tem expectativa de viver, aproximadamente,

01. 68 anos.
02. 72 anos.
03. 76 anos.
04. 84 anos.
05. 92 anos.

05 - (ENEM MEC/2017) Em 2011, a costa nordeste do Japão foi sacudida por um terremoto com magnitude de 8,9 graus na escala Richter. A energia liberada E por esse terremoto, em kWh, pode ser calculada por $R = \frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{E_0}\right)$, sendo $E_0 = 7 \cdot 10^{-3}$ kWh e R a magnitude desse terremoto na escala Richter. Considere 0,84 como aproximação para log 7.

Disponível em: http://oglobo.globo.com. Acesso em: 2 ago. 2012.

A energia liberada pelo terremoto que atingiu a costa nordeste do Japão em 2011, em kWh, foi de

a) $10^{10,83}$
b) $10^{11,19}$
c) $10^{14,19}$
d) $10^{15,51}$
e) $10^{17,19}$

06 - (ENEM MEC/2017) Nas informações veiculadas nos órgãos de comunicação quando da ocorrência de um terremoto, faz-se referência à magnitude (M), que se refere a quantos graus o fenômeno atingiu na escala Richter. Essa medida quantifica a

energia liberada no epicentro do terremoto, e em seu cálculo utilizam-se como parâmetros as medidas da amplitude sísmica (A), em micrômetro, e da frequência (f), em hertz. Esses parâmetros são medidos por aparelhos especiais chamados sismógrafos, e relacionam-se segundo a função $M = \log (A \times f) + 3{,}3$. Pela magnitude do terremoto na escala Richter, pode-se estimar seus efeitos de acordo com o quadro, onde não estão considerados terremotos de magnitudes superiores a 7,9.

Magnitude (Grau)	Efeitos do terremoto segundo a escala Richter
$M \leq 3{,}5$	Registrado (pelos aparelhos), mas não perceptível pelas pessoas.
$3{,}5 < M \leq 5{,}4$	Percebido, com pequenos tremores notados pelas pessoas.
$5{,}4 < M \leq 6{,}0$	Destrutivo, com consequências significativas em edificações pouco estruturadas.
$6{,}0 < M \leq 6{,}9$	Destrutivo, com consequências significativas para todo tipo de edificação.
$6{,}9 < M \leq 7{,}9$	Destrutivo, retiram os edifícios de suas fundações, causam fendas no solo e danificam as tubulações contidas no subsolo.

Um terremoto teve sua amplitude e frequências medidas e obteve-se A = 1 000 micrômetros e f = 0,2 hertz. Use –0,7 como aproximação para log(0,2).

Disponível em: www.mundoeducacao.com.br.
Acesso em: 11 jul. 2012 (adaptado).

Considerando o quadro apresentado, e analisando o resultado da expressão que fornece a magnitude desse terremoto, conclui-se que ele foi

a) registrado, mas não percebido pelas pessoas.
b) percebido, com pequenos tremores notados pelas pessoas.
c) destrutivo, com consequências significativas em edificações pouco estruturadas.
d) destrutivo, com consequências significativas para todo tipo de edificação.
e) destrutivo, com consequências nas fundações dos edifícios, fendas no solo e tubulações no subsolo.

07 - (FMABC SP/2017) Em um experimento de laboratório sobre esterilização de bactérias pelo calor, constatou-se que as bactérias morrem à medida que a temperatura aumenta, obedecendo à seguinte lei: $T = \log_a \left(\frac{B}{B - x} \right)^{10}$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, sendo T o tempo em minutos em que as bactérias são submetidas ao calor, B o número de bactérias vivas antes do início da esterilização e x o número de bactérias que morreram após T minutos do início da esterilização.

Supondo que nesse experimento B = 1.500.000 e utilizando $\log_a 10 = 2{,}3$ e $\log_a 2 = 0{,}7$, é correto afirmar que o tempo T, necessário para que o número de bactérias mortas seja igual a 80% do número de bactérias vivas antes do início da esterilização, é

a) 16 minutos.
b) 20 minutos.
c) 28 minutos.
d) 32 minutos.

08 - (ENEM MEC/2017) Para realizar a viagem dos sonhos, uma pessoa precisava fazer um empréstimo no valor de R$ 5 000,00. Para pagar as prestações, dispõe de, no máximo, R$ 400,00 mensais. Para esse valor de empréstimo, o valor da prestação (P) é calculado em função do número de prestações (n) segundo a fórmula

$$P = \frac{5000 \times 1{,}013^n \times 0{,}013}{(1{,}013^n - 1)}$$

Se necessário, utilize 0,005 como aproximação para log 1,013; 2,602 como aproximação para log 400; 2,525 como aproximação para log 335.

De acordo com a fórmula dada, o menor número de parcelas cujos valores não comprometem o limite definido pela pessoa é

a) 12.
b) 14.
c) 15.
d) 16.
e) 17.

09 - (FCM MG/2019) Uma das formas de caracterizar uma substância relaciona-se com o conhecimento de seu pH que, matematicamente, pode ser obtido a partir de operações com logaritmos decimais. Ao categorizar um grupo de substâncias, um estudante deparou-se com a necessidade de solução da equação logarítmica $\log_2(9^x + 3^x) + 29 = 30$.

Resolvendo adequadamente o problema, ele chegará ao resultado

a) $x = 10^{-2}$
b) $x = 10^{-1}$
c) $x = 1$
d) $x = 0$

10 - (ENEM MEC/2020) A Lei de Zipf, batizada com o nome do linguista americano George Zipf, é uma lei empírica que relaciona a frequência (f) de uma palavra em um dado texto com o seu ranking (r) . Ela é dada por

$$f = \frac{A}{r^B}$$

O ranking da palavra é a sua posição ao ordenar as palavras por ordem de frequência. Ou seja, r = 1 para a palavra mais frequente, r = 2 para a segunda palavra mais frequente e assim sucessivamente. A e B são constantes positivas.

Diponível em: http://klein.sbm.org.br. Acesso em: 12 ago. 2020 (adatpado).

Com base nos valores de X = log (r) e Y = log (f) , é possível estimar valores para A e B.

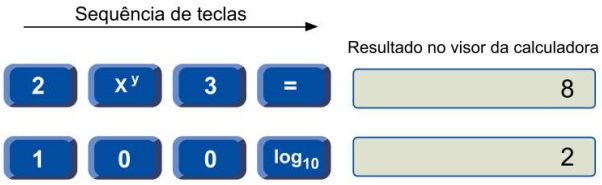
No caso hipotético em que a lei é verificada exatamente, a relação entre Y e X é

a) $Y = \log(A) - B \cdot X$
b) $Y = \frac{\log(A)}{X + \log(B)}$
c) $Y = \frac{\log(A)}{B} - X$

d) $Y = \frac{\log(A)}{B \cdot X}$

e) $Y = \frac{\log(A)}{X^B}$

11 - (Unesp SP/2023) Analise duas sequências de teclas digitadas por Tales em uma calculadora científica e os respectivos resultados apresentados em seu visor.



Tales digitou nessa mesma calculadora, que também possui teclas de parênteses para a separação das operações, a seguinte sequência de teclas:



O resultado obtido por Tales no visor da calculadora foi

a) 1,5.
b) 3.
c) 2.
d) 0,75.
e) 2,5.

12 - (Uncisal AL/2019) A Escala Richter, utilizada para medir a magnitude dos terremotos, foi proposta em 1935 pelo sismólogo Charles Francis Richter, que pretendia, inicialmente, empregá-la apenas para medir abalos que ocorressem no sul da Califórnia. A equação proposta por Richter pode ser formulada de várias formas, conforme as variáveis que se adotem para compor a equação. No caso da energia mecânica liberada por um terremoto – E –, em kWh, a magnitude do terremoto – M – é expressa por $M = \frac{2}{3}\log_{10}\left(\frac{E}{E_0}\right)$, em que $E_0 = 7 \times 10^{-3}$ kWh.

Disponível em: http://brasilescola.uol.com.br.
Acesso em: 3 nov. 2018 (adaptado).

Sabendo-se que, em 2014, um terremoto de magnitude 8 foi registrado no litoral do Alasca, qual é o valor da energia mecânica liberada nesse terremoto?

a) 7×10^4 kWh
b) 7×10^9 kWh
c) 7×10^{10} kWh
d) 7×10^{14} kWh
e) 7×10^{15} kWh

13 - (UFMS/2018) A Escala Richter é utilizada para medir a magnitude dos terremotos, permitindo-nos ter uma noção exata sobre o potencial dos abalos sísmicos que ocorrem na litosfera.

A Escala Richter é um sistema de medição elaborado por Charles Richter e Beno Gutenberg utilizado para quantificar a intensidade dos terremotos conforme a sua manifestação na superfície terrestre. Seu limite, teoricamente, não existe, mas é comum a convenção de que não haja terremotos que ultrapassem o grau 10.

De modo geral, podemos considerar que os abalos sísmicos acima de 6 podem ser considerados graves. Confira a seguir uma relação comparativa entre a intensidade dos terremotos e os seus efeitos:

A) Magnitude menor que 2: tremores captados apenas por sismógrafos.
B) Magnitude entre 2 e 4: impacto semelhante à passagem de um veículo grande e pesado.
C) Magnitude entre 4 e 6: quebra vidros, provoca rachaduras nas paredes e desloca móveis.
D) Magnitude entre 6 e 7: danos em edifícios e destruição de construções frágeis.
E) Magnitude entre 7 e 8: danos graves em edifícios e grandes rachaduras no solo.
F) Magnitude entre 8 e 9: destruição de pontes, viadutos e quase todas as construções.
G) Magnitude maior que 9: destruição total com ondulações visíveis.

A magnitude pode ser calculada pela seguinte equação:

$$M = \frac{2}{3}\log_{10}\frac{E}{E_0},$$

em que E_0 é constante e vale 7×10^{-3} kWh, e E é a energia liberada no terremoto em kWh.

Se um terremoto teve E = 1 000 kWh, de energia liberada, a magnitude do terremoto está no intervalo de:

a) E.
b) D.
c) C.
d) B.
e) A.

14 - (FGV /2018) Em determinado estado, a quantidade máxima de álcool no sangue, permitida para dirigir, é 0,06 miligrama por ml de sangue.

Logo após ingerir um copo cheio de certa bebida alcoólica, a quantidade de álcool no sangue de uma pessoa sobe para 0,3 miligrama por ml de sangue.

Suponha que a quantidade de álcool no sangue desta pessoa decresça exponencialmente com o tempo de forma que, a cada hora, a quantidade de álcool por ml se reduza à metade, isto é, $Q(x) = 0{,}3 \cdot (0{,}5)^x$, em que x é a variável tempo medido em horas a partir de zero (momento da ingestão da bebida) e Q(x) é a quantidade de álcool no sangue no momento x.

Depois de quanto tempo, após o consumo da bebida, a pessoa poderá voltar a dirigir? Adote para log 2 o valor 0,3.

a) 125 minutos.
b) 130 minutos.

c) 140 minutos.
d) 120 minutos.
e) 135 minutos.

15 - (Santa Casa SP/2018) O Nível de Pressão Sonora (NPS) é uma medida que determina o grau de potência de uma onda sonora, sendo o decibel (dB) sua unidade de medida mais usual. O infográfico traz dados do NPS de alguns sons:



(http://noticias.r7.com. Adaptado.)

O NPS, em dB, de um som emitido está relacionado à sua Intensidade Sonora (I), em W/m^2, pela seguinte lei:

$$NPS = 120 + 10 \cdot \log I$$

Desse modo, a razão entre a intensidade sonora do ronco mais alto já registrado e a do ronco moderado, nessa ordem, é um valor entre

a) 10 e 100.
b) 1 e 10.
c) 100 e 1 000.
d) 10 000 e 100 000.
e) 1 000 e 10 000.

16 - (UNITAU SP/2018) Em um laboratório, o custo de produção de x doses de um determinado tipo de vacina é dado pela função $C(x) = 12.000 + \log x^{40}$ reais. Se o planejado é que sejam fabricadas x = 90t doses durante t dias de trabalho, qual o custo para se produzir as vacinas nos 30 primeiros dias de trabalho? (Adotar $10^{0,48} = 3$)

a) R$ 12.137,60
b) R$ 12.059,60
c) R$ 12.219,20
d) R$ 12.099,20
e) R$ 12.326,20

17 - (ENEM MEC/2018) Em março de 2011, um terremoto de 9,0 graus de magnitude na escala Richter atingiu o Japão matando milhares de pessoas e causando grande destruição. Em janeiro daquele ano, um terremoto de 7,0 graus na escala Richter atingiu a cidade de Santiago Del Estero, na Argentina. A magnitude de um terremoto, medida pela escala Richter, é $R = \log\left(\frac{A}{A_0}\right)$, em que A é a amplitude do movimento vertical do solo, informado em um sismógrafo, A_0 é uma amplitude de referência e log representa o logaritmo na base 10.

Disponível em: http://earthquake.usgs.gov.
Acesso em: 28 fev. 2012 (adaptado).

A razão entre as amplitudes dos movimentos verticais dos terremotos do Japão e da Argentina é

a) 1,28
b) 2,0
c) $10^{\frac{9}{7}}$
d) 100
e) $10^9 - 10^7$

18 - (UFRGS RS/2018) Leia o texto abaixo, sobre terremotos.

Magnitude é uma medida quantitativa do tamanho do terremoto. Ela está relacionada com a energia sísmica liberada no foco e também com a amplitude das ondas registradas pelos sismógrafos. Para cobrir todos os tamanhos de terremotos, desde os microtremores de magnitudes negativas até os grandes terremotos com magnitudes superiores a 8.0, foi idealizada uma escala logarítmica, sem limites. No entanto, a própria natureza impõe um limite superior a esta escala, já que ela está condicionada ao próprio limite de resistência das rochas da crosta terrestre. Magnitude e energia podem ser relacionadas pela fórmula descrita por Gutenberg e Richter em 1935:

log(E) = 11,8 + 1,5M onde: E = energia liberada em *Erg* ; M = magnitude do terremoto.

Disponível em: <http://www.iag.usp.br/siae98/terremoto/terremotos.htm>.
Acesso em: 20 set. 2017.

Sabendo que o terremoto que atingiu o México em setembro de 2017 teve magnitude 8,2, assinale a alternativa que representa a melhor aproximação para a energia liberada por esse terremoto, em *Erg*.

a) 13,3
b) 20
c) 24
d) 10^{24}
e) 10^{28}

19 - (UEL PR/2018) Um pesquisador estuda uma população e determina que a equação $N = t^9 10^{-15}$ descreve a incidência de câncer, representada por N, em função do tempo t. Ele observa que N cresce rapidamente, o que dificulta a análise gráfica dessa relação. Por isso, o pesquisador decide operar simultaneamente com as variáveis N e t a fim de

representá-las como uma semirreta no plano cartesiano $x \times y$. Para esse fim, suponha que o pesquisador escolha uma base b, positiva e distinta de 1, e que ele considere as seguintes operações para N >0 e t > 0:

$$\begin{cases} x = \log_b(t) \\ y = \log_b(N) \end{cases}$$

Supondo que y = 9x + 1 seja a equação que descreve a semirreta que o pesquisador obteve no plano cartesiano $x \times y$, e recordando que 1 = $\log_b(b)$, assinale a alternativa que apresenta, corretamente, a escolha da base b feita pelo pesquisador.

a) 1
b) 9
c) 9^{15}
d) 10^{-9}
e) 10^{-15}

20 - (Unifor CE/2018) Desde tempos imemoriais, o homem vem buscando formas de medir e quantificar fenômenos naturais. Nesse processo, desenvolveu ferramentas físicas e abstratas para auxiliá-lo. Uma dessas ferramentas desenvolvidas foi o logaritmo na base 10, representado aqui por log. A medida da magnitude R de um terremoto, medido pela escala Richter, é $R = \log\frac{a}{T} + B$, onde a é a amplitude (em micrômetros) do movimento vertical do solo, que é informado em um sismógrafo; T é o período do abalo sísmico em segundo; e B é a amplitude do abalo sísmico, com distância crescente partindo do centro do terremoto. Em 16 de setembro de 2015, um terremoto de magnitude 8,3 atingiu o Chile, próximo a região de Valparaíso, deixando várias vítimas. Em 08 de setembro de 2017, um terremoto de magnitude 5,3 atingiu a região norte do Japão.

Sabendo que os dois terremotos acima tiveram a mesma amplitude B e período T, podemos afirmar que o terremoto no Chile foi

a) 2 vezes mais forte que o do Japão.
b) 3 vezes mais forte que o do Japão.
c) 10 vezes mais forte que o do Japão.
d) 100 vezes mais forte que o do Japão.
e) 1000 vezes mais forte que o do Japão.

21 - (UniCerrado GO/2019) O decibel (dB) é uma ordem de grandeza usada para avaliar o nível de intensidade do som (N), calculado pela expressão: $N = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$, na qual I é a intensidade do som (em W/m^2) que se quer avaliar e I_0 corresponde à intensidade sonora mínima percebida pelo ouvido humano:
$I_0 = 10^{-12} W/m^2$.

Sabendo que o nível de intensidade sonora máximo suportado pelo ouvido humano é de 120 dB, qual é a intensidade do som correspondente?

a) 0
b) 1

c) 2
d) 3
e) 4

22 - (FGV /2019) Em uma máquina fotográfica, a abertura na lente, pela qual passa a luz, é indicada pela letra f. Admita que a fórmula que fornece a medida da luz (S) que passa pela abertura, em função do valor de f, para uma câmera de lente 35 mm, seja dada por $S = \log_2 f^2$.



A imagem indica uma lente 35 mm de abertura máxima igual a 1,4. Adotando log 2 = 0,301 e log 7 = 0,845, o valor de S para a abertura máxima dessa lente é, aproximadamente,

a) 0,91.
b) 0,93.
c) 0,95.
d) 0,97.
e) 0,99.

23 - (FGV /2019) Estima-se que o número de elementos de uma população cresça exponencialmente a uma taxa anual de 20% a partir de hoje.

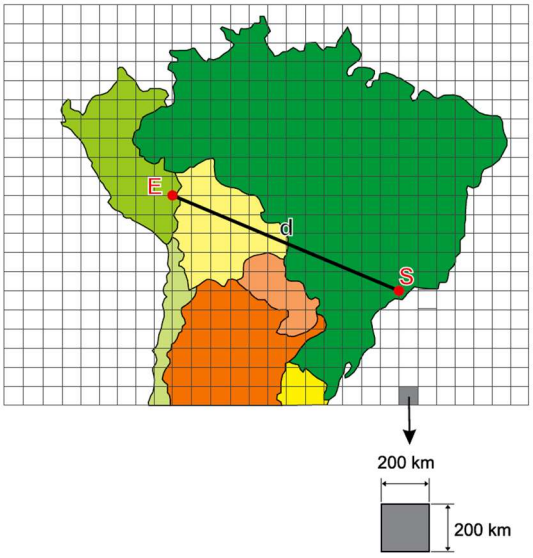
Daqui a quantos anos ela terá crescido 900% em relação ao número de elementos de hoje?

Observação: Uma população cresce exponencialmente, a uma taxa anual t, quando daqui a x anos o seu número de elementos é $Y = N (1 + t)^x$, em que N é o número de elementos de hoje.

Resolva adotando para log 2 e log 3 os valores 0,30 e 0,48, respectivamente.

a) 12,1
b) 12,5
c) 13,3
d) 12,9
e) 13,7

24 - (Santa Casa SP/2019) Apoiado em uma malha quadriculada, o mapa apresenta a posição do epicentro de um sismo, indicado por S, e a posição de uma estação de medição, indicada por E.



A magnitude (M) de um sismo, na escala Richter, é obtida a partir da análise de um sismograma e da distância (d), em km, entre o epicentro do sismo e a estação onde foi realizada a medição.

Para o caso indicado no mapa, considere que a relação entre a magnitude do sismo e a distância entre a estação e o epicentro seja descrita por:

$$M = M(d) = -5{,}02 + 2{,}8 \cdot \log d$$

Usando log 2 = 0,3 e log 13 = 1,1 a magnitude desse sismo foi igual a

a) 4,5.
b) 5,6.
c) 1,2.
d) 3,6.
e) 7,5.

25 - (ENEM MEC/2019) Um jardineiro cultiva plantas ornamentais e as coloca à venda quando estas atingem 30 centímetros de altura. Esse jardineiro estudou o crescimento de suas plantas, em função do tempo, e deduziu uma fórmula que calcula a altura em função do tempo, a partir do momento em que a planta brota do solo até o momento em que ela atinge sua altura máxima de 40 centímetros. A fórmula é $h = 5 \cdot \log_2 (t + 1)$, em que t é o tempo contado em dia e h, a altura da planta em centímetro.

A partir do momento em que uma dessas plantas é colocada à venda, em quanto tempo, em dia, ela alcançará sua altura máxima?

a) 63
b) 96
c) 128
d) 192
e) 255

26 - (UECE/2019) Para cada número natural n, defina $x_n = \log(2^n)$, onde log(z) representa logaritmo de z na base 10. Assim, pode-se afirmar corretamente que $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_8$ é igual a

a) $6x_8$.
b) $8x_4$.
c) $8x_6$.
d) $9x_4$.

27 - (ENEM MEC/2019) Charles Richter e Beno Gutenberg desenvolveram a escala Richter, que mede a magnitude de um terremoto. Essa escala pode variar de 0 a 10, com possibilidades de valores maiores. O quadro mostra a escala de magnitude local (M_s) de um terremoto que é utilizada para descrevê-lo.

Descrição	Magnitude local (M_s) ($\mu m \cdot Hz$)
Pequeno	$0 \leq M_s \leq 3,9$
Ligeiro	$4,0 \leq M_s \leq 4,9$
Moderado	$5,0 \leq M_s \leq 5,9$
Grande	$6,0 \leq M_s \leq 9,9$
Extremo	$M_s \geq 10,0$

Para se calcular a magnitude local, usa-se a fórmula $M_s = 3,30 + \log(A.f)$, em que A representa a amplitude máxima da onda registrada por um sismógrafo em micrômetro (μm) e f representa a frequência da onda, em hertz (Hz). Ocorreu um terremoto com amplitude máxima de 2 000 μm e frequência de 0,2 Hz.

Disponível em: http://cejarj.cecierj.edu.br.
Acesso em: 1 fev. 2015 (adaptado).

Utilize 0,3 como aproximação para log 2.

De acordo com os dados fornecidos, o terremoto ocorrido pode ser descrito como

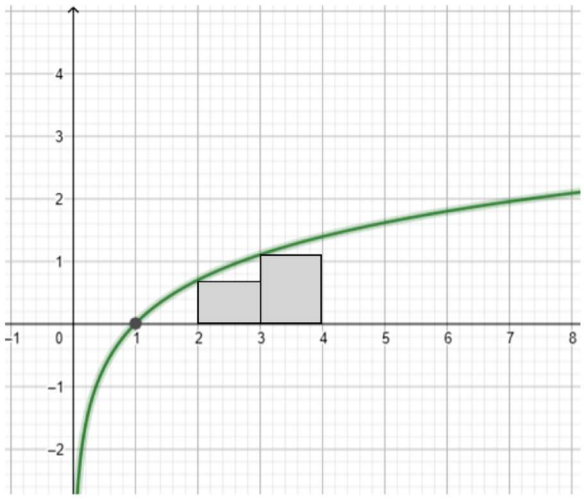
a) Pequeno.
b) Ligeiro.
c) Moderado.
d) Grande.
e) Extremo.

28 - (Fac. São Francisco de Barreiras BA/2019) Um grupo de estudantes do primeiro ano do ensino médio teve a sua capacidade de memorização de determinadas informações avaliada através de um teste. Durante os dois anos seguintes, o mesmo grupo foi reavaliado mês a mês e, com base nos resultados obtidos, sua pontuação média foi modelada pela expressão matemática $P(t) = 87 - 16\log(t + 1)$, $0 \leq t \leq 24$, sendo t o tempo em meses.

Nessas condições e considerando, se necessário, log 2 = 0,30, é correto afirmar que do nono até o décimo nono mês de avaliação, verifica-se, na pontuação média do grupo,

a) aumento de 3,2 pontos.
b) aumento de 4,8 pontos.
c) redução de 3,2 pontos.
d) redução de 4,8 pontos.
e) redução de 6,5 pontos.

29 - (Fac. Pequeno Príncipe PR/2019) O logaritmo natural é o logaritmo de base ***e***, em que ***e*** é um número irracional aproximadamente igual a 2,718281828459045... chamado de número de Euler. O logaritmo natural ou neperiano é definido para todos os números reais estritamente positivos. O gráfico da função y = ln x é representado abaixo. O valor da soma das áreas dos dois retângulos hachurados é:



Dados: log 2 ≅ 0,3
log 3 ≅ 0,5 e $\log_{10} e$ = 0,4

a) 2
b) *ln*2
c) 1,6
d) 1
e) 0,4

30 - (FGV /2020) Considere a equação $\log_{(3x+1)}(3) = \log_{16x}(9)$, sendo x positivo e diferente de $\frac{1}{16}$. A soma dos valores de x que satisfazem essa equação é

a) 1
b) $\frac{13}{9}$
c) $\frac{4}{9}$
d) $\frac{10}{9}$
e) $\frac{1}{9}$

31 - (IFBA/2019) A classificação do som como forte ou fraco está relacionada ao nível de intensidade sonora, medida em watt/m^2. A menor intensidade sonora audível ou limiar de audibilidade possui intensidade $I_0 = 10^{-12}$W/m^2. A relação entre as intensidades sonoras permite calcular o nível sonoro do ambiente que é dado em decibéis. Em virtude dos valores das intensidades serem muito pequenos ou muito grandes, utiliza-se as noções de logaritmos na seguinte fórmula capaz de calcular níveis sonoros:

$$NS = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

onde:

NS = Nível sonoro

I = Intensidade de som considerada

I_0 = Limiar de audibilidade

Disponível em: <https://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/medindo-intensidade-dos-sons>. Acessado em 08 de agosto de 2018.

Com base no texto acima, podemos afirmar que o nível sonoro em uma avenida de tráfego intenso com intensidade de som I = 10^8, em W/m^2, é igual a:

a) 200
b) 300
c) 50
d) 400
e) 100

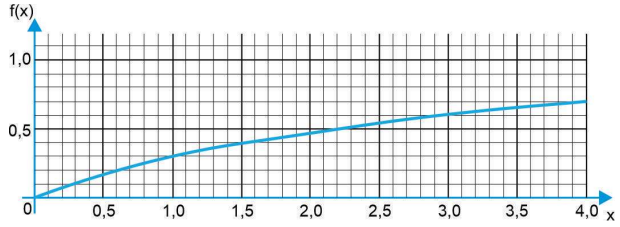
32 - (FCM MG/2020) Um estudante acompanha duas reações químicas A e B que evoluem ao longo de t segundos, com velocidades $V_A(t)$ e $V_B(t)$, dadas por

$$V_A(t) = \log_2 (t + 4) \text{ e } V_B(t) = \log_4 (t^2 + 3t + 31).$$

Segundo orientações recebidas, determinado catalisador deve ser inserido no processo quando as velocidades das reações se igualarem. Iniciado o processo, essa ação será efetivada em:

a) 1s.
b) 3s.
c) 4s.
d) 7s.

33 - (Santa Casa SP/2021) Observe o gráfico da função logarítmica f(x) = log(x + 1) para valores reais de x tais que $0 \leq x \leq 4$.



Consultando o gráfico, o valor de log 13 – log 4 é, aproximadamente,

a) 0,5.
b) 0,3.
c) 0,4.
d) 0,6.
e) 0,2.

34 - (UFGD MS/2022) Em 1935, o geólogo americano Charles Richter (1900-1985) definiu a magnitude M de um terremoto como:

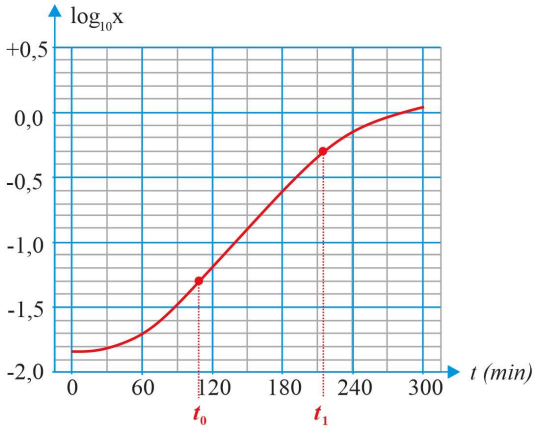
$$M = \log \frac{I}{S}$$

Em que I é a intensidade do terremoto, medida pela amplitude da leitura de um sismógrafo tomado a 100 km do epicentro do terremoto, e S é a intensidade de um terremoto "padrão".

O terremoto de São Francisco (EUA) de 1906 teve uma magnitude estimada de 8,3 na escala de Richter. No mesmo ano, um forte terremoto ocorreu na fronteira entre a Colômbia e o Equador, que foi quatro vezes mais intenso. Assim, qual foi a magnitude do terremoto entre a Colômbia e o Equador na escala Richter? (**Dado**: log 2 = 0,3)

a) 33,2 graus.
b) 16,6 graus.
c) 12,1 graus.
d) 10,7 graus.
e) 8,9 graus.

35 - (Fuvest SP/2022) A quantidade de bactérias em um líquido é diretamente proporcional à medida da *turbidez* desse líquido. O gráfico mostra, em escala logarítmica, o crescimento da turbidez x de um líquido ao longo do tempo t (medido em minutos), isto é, mostra $\log_{10} x$ em função de t. Os dados foram coletados de 30 em 30 minutos, e uma curva de interpolação foi obtida para inferir valores intermediários.



Disponível em https://fankhauserblog.wordpress.com/.

Com base no gráfico, em quantas vezes a população de bactérias aumentou, do instante t_0 para o instante t_1?

a) 2
b) 4
c) 5
d) 10
e) 100

36 - (ENEM MEC/2023) A exposição a alguns níveis sonoros pode causar lesões auditivas. Por isso, em uma indústria, são adotadas medidas preventivas de acordo com

a máquina que o funcionário opera e o nível N de intensidade do som, medido em decibel (dB), a que o operário é exposto, sendo $N = \log_{10} I^{10} - \log_{10} I_0^{10}$, I a intensidade do som e $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2.

Disponível em: www.sofisica.com.br. Acesso em: 8 jul. 2015 (adaptado).

Quando o som é considerado baixo, ou seja, $N =$ 48 dB ou menos, deve ser utilizada a medida preventiva I. No caso de o som ser moderado, quando N está no intervalo (48 dB, 55 dB), deve ser utilizada a medida preventiva II. Quando o som é moderado alto, que equivale a N no intervalo (55 dB, 80 dB), a medida preventiva a ser usada é a III. Se N estiver no intervalo (80 dB, 115 dB), quando o som é considerado alto, deve ser utilizada a medida preventiva IV. E se o som é considerado muito alto, com N maior que 115 dB, deve-se utilizar a medida preventiva V.

Uma nova máquina, com $I = 8 \times 10^{-8}$ W/m^2, foi adquirida e será classificada de acordo com o nível de ruído que produz.

Considere 0,3 como aproximação para $\log_{10} 2$.

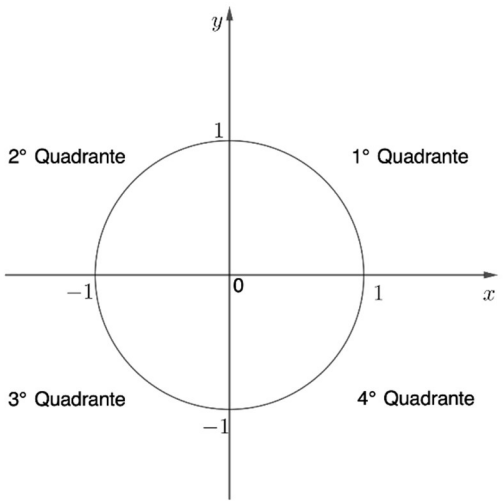
O funcionário que operará a nova máquina deverá adotar a medida preventiva

a) I.
b) II.
c) III.
d) IV.
e) V.

Trigonometria Circular e Funções Trigonométricas

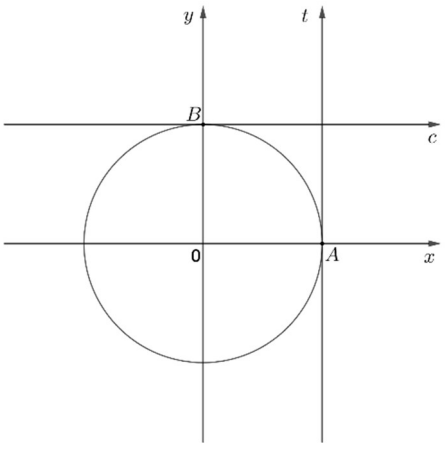
Círculo Trigonométrico

O círculo trigonométrico é uma circunferência de raio unitário com centro na origem do sistema cartesiano ortogonal.



Para o estudo das relações trigonométricas na circunferência, vamos considerar os quatro eixos:

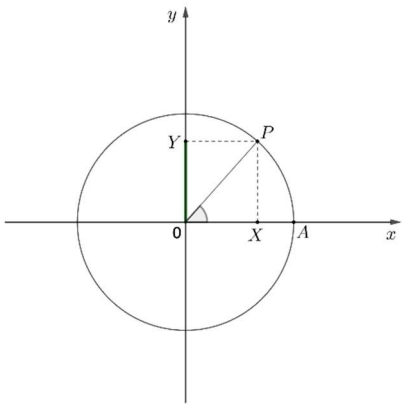
- O eixo dos senos (O_y).
- O eixo dos cossenos (O_x).
- O eixo das tangentes é o eixo que é tangente ao círculo trigonométrico no ponto $A = (1, 0)$, representado por t.
- O eixo das cotangentes é o eixo que é tangente ao círculo no ponto $B = (0, 1)$, representado por c.

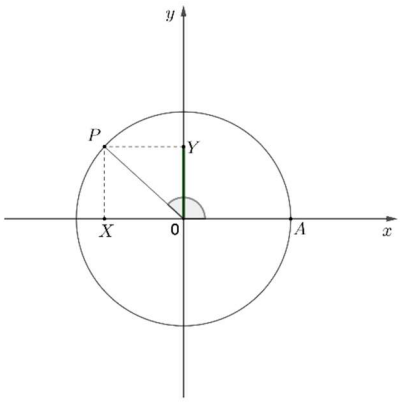


Seno

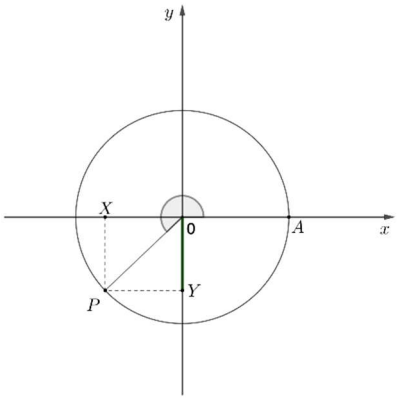
Dado um ponto P no círculo trigonométrico, seja $\theta \in [0, 2\pi]$ o ângulo correspondente ao arco $\widehat{AP}$. Denominamos seno de θ, e indicamos por $sen(\theta)$, o seguimento vertical $\overline{OY}$.

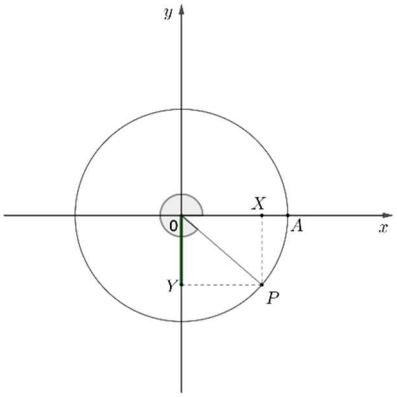
- Se θ está no primeiro ou no segundo quadrante, então $sen(\theta)$ será positivo.





– Se θ está no terceiro ou no quarto quadrante, então $sen(\theta)$ será negativo.

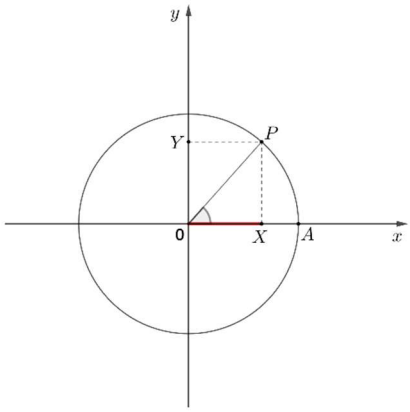


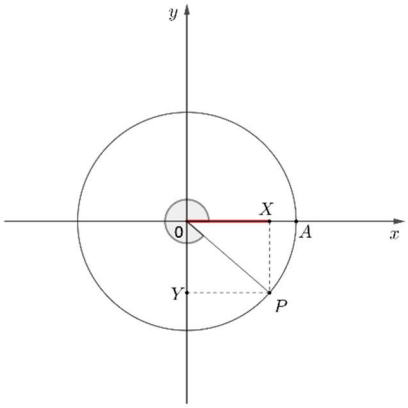


Cosseno

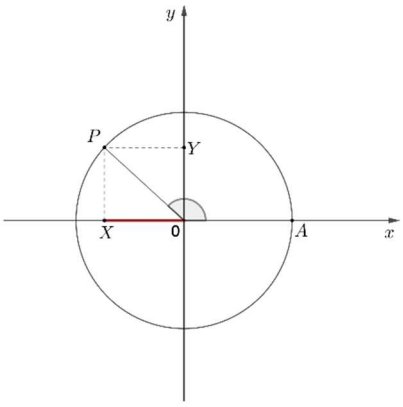
Dado um ponto P no círculo trigonométrico, seja $\theta \in [0, 2\pi]$ o ângulo correspondente ao arco $\widehat{AP}$. Denominamos cosseno de θ, e indicamos por $cos(\theta)$, o seguimento horizontal $\overline{OX}$.

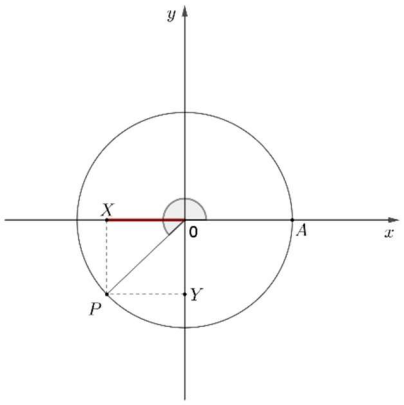
– Se θ está no primeiro ou no quarto quadrante, então $cos(\theta)$ será positivo.





– Se θ está no segundo ou no terceiro quadrante, então $cos(\theta)$ será negativo.

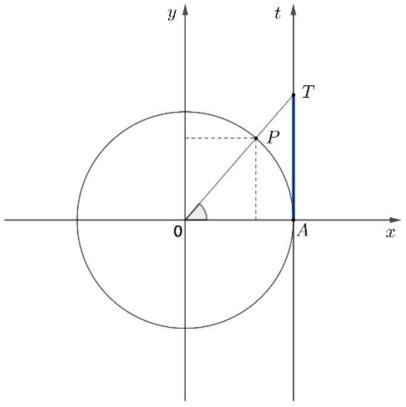


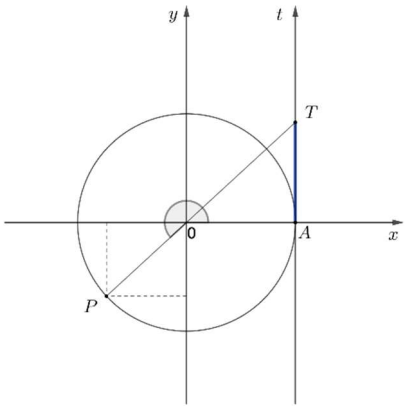


Tangente

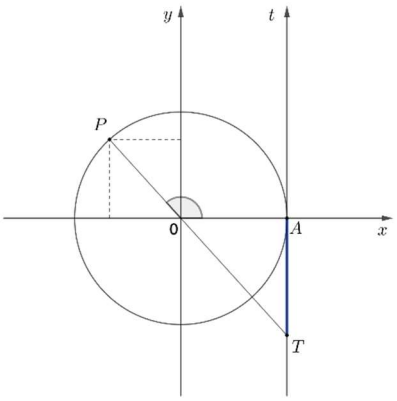
Dado um ponto P no círculo trigonométrico, seja $\theta \in [0, 2\pi]$ o ângulo correspondente ao arco $\overset{\frown}{AP}$. Denominamos tangente de θ, e indicamos por $tan(\theta)$, o seguimento vertical $\overline{AT}$.

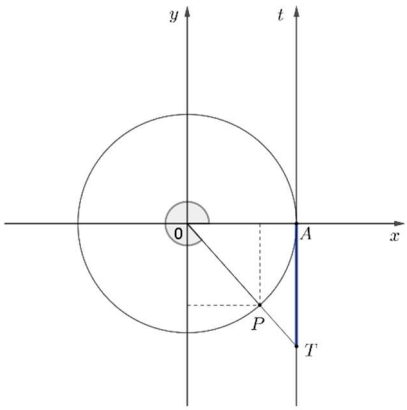
- Se θ está no primeiro ou no terceiro quadrante, então $tan(\theta)$ será positivo.





- Se θ está no segundo ou no quarto quadrante, então $tan(\theta)$ será negativo.



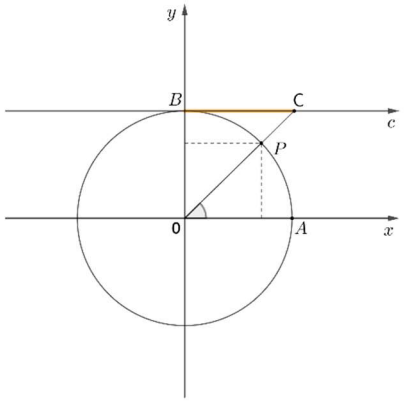


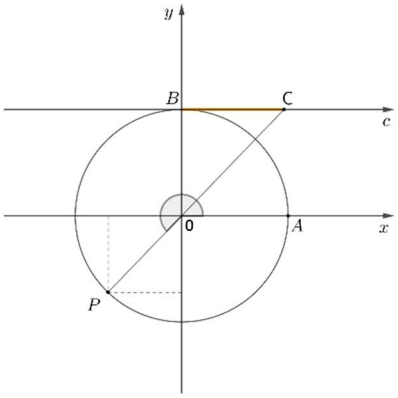
Observação: Notemos que se $\theta = \frac{\pi}{2}$, ou $\theta = \frac{3\pi}{2}$, então $\overline{OP}$ será paralelo ao eixo das tangentes. Como nestes casos não existe o ponto T, a $tan(\theta)$ não está definida.

Cotangente

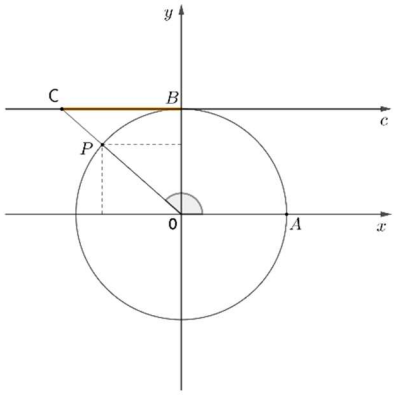
Dado um ponto P no círculo trigonométrico, seja $\theta \in [0, 2\pi]$ o ângulo correspondente ao arco $\widehat{AP}$. Denominamos cotangente de θ, e indicamos por $cot(\theta)$, o seguimento horizontal $\overline{BC}$.

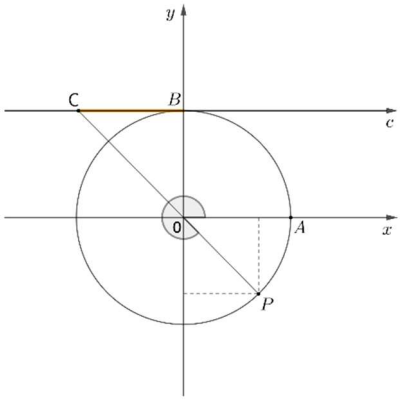
- Se θ está no primeiro ou no terceiro quadrante, então $cot(\theta)$ será positivo.





- Se θ está no segundo ou no quarto quadrante, então $cot(\theta)$ será negativo.



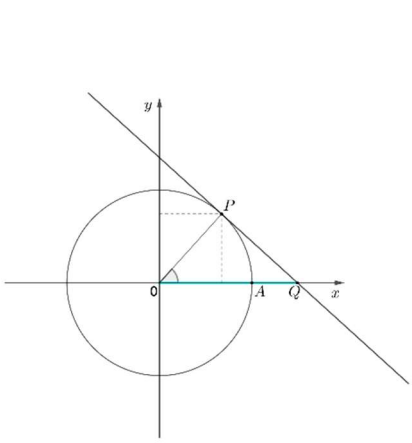


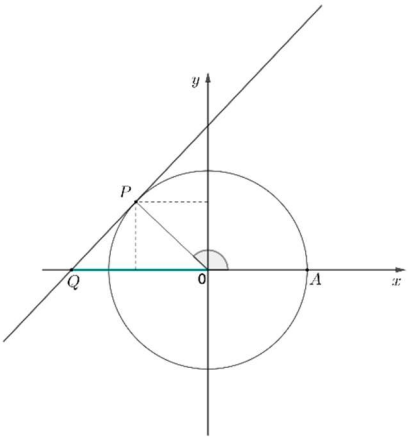
Observação: Notemos que se $\theta = 0$, ou $\theta = \pi$, então $\overline{OP}$ será paralelo ao eixo das cotangentes. Como nestes casos não existe o ponto C, a $cot(\theta)$ não está definida.

Secante

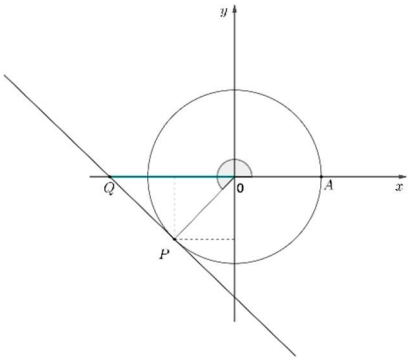
Dado um ponto P no círculo trigonométrico, seja $\theta \in [0, 2\pi]$ o ângulo correspondente ao arco $\widehat{AP}$. Denominamos secante de θ, e indicamos por $sec(\theta)$, o seguimento horizontal $\overline{OQ}$.

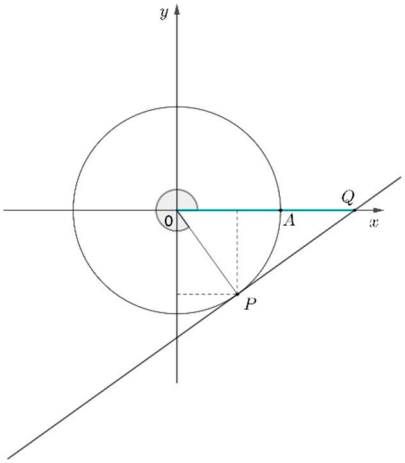
- Se θ está no primeiro ou no segundo quadrante, então $sec(\theta)$ será positivo.





- Se θ está no terceiro ou no quarto quadrante, então $sec(\theta)$ será negativo.



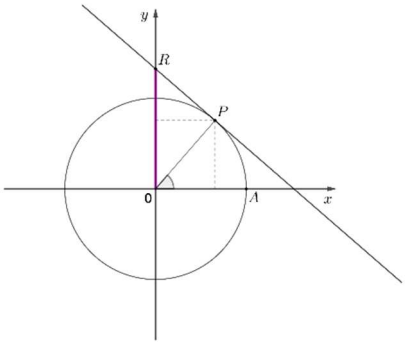


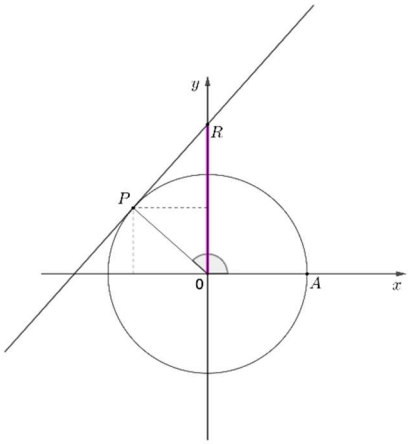
Observação: Notemos que se $\theta = \frac{\pi}{2}$, ou $\theta = \frac{3\pi}{2}$, então a reta q será paralela ao eixo O_x. Como nestes casos não existe o ponto Q, a $sec(\theta)$ não está definida.

Cossecante

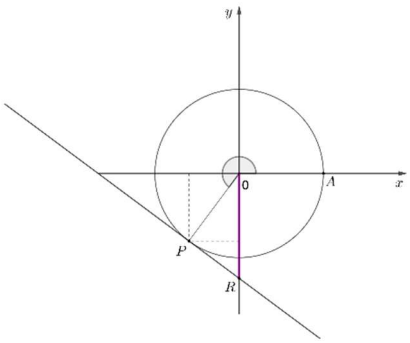
Dado um ponto P no círculo trigonométrico, seja $\theta \in [0, 2\pi]$ o ângulo correspondente ao arco $\widehat{AP}$. Denominamos secante de θ, e indicamos por $sec(\theta)$, o seguimento horizontal $\overline{OQ}$.

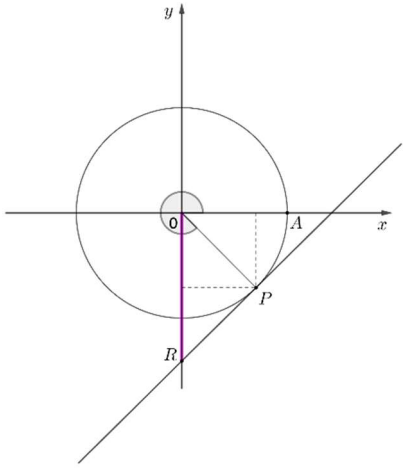
- Se θ está no primeiro ou no segundo quadrante, então $sec(\theta)$ será positivo.





– Se θ está no terceiro ou no quarto quadrante, então $sec(\theta)$ será negativo.





Observação: Notemos que se $\theta = \frac{\pi}{2}$, ou $\theta = \frac{3\pi}{2}$, então a reta q será paralela ao eixo O_x. Como nestes casos não existe o ponto Q, a $sec(\theta)$ não está definida.

Relações Fundamentais

Para todo $\theta \in [0, 2\pi]$, vale a relação:

$$sen^2(\theta) + cos^2(\theta) = 1.$$

Além disso, dividindo $sen^2(\theta) + cos^2(\theta) = 1$ por $sen^2(\theta)$ obtemos que:

$$1 + tan^2(\theta) = sec^2(\theta).$$

Por outro lado, dividindo $sen^2(\theta) + cos^2(\theta) = 1$ por $cos^2(\theta)$ obtemos que:

$$1 + cot^2(\theta) = cossec^2(\theta).$$

Atenção!

Podemos definir as funções cossecante, secante e cotangente, respectivamente, como:

$$cossec(\theta) = \frac{1}{sen(\theta)};$$

$$sec(\theta) = \frac{1}{cos(\theta)};$$
$$cot(\theta) = \frac{1}{tan(\theta)}.$$

Fórmulas da Soma, da Subtração de Arcos e do Arco Duplo

Podemos calcular as relações trigonométricas da soma $(a + b)$ e da diferença $(a - b)$ de dois números reais quaisquer a e b, conhecendo as relações trigonométricas circulares de a e de b, por meio das seguintes fórmulas:

- **Seno**

$$sen(a + b) = sen(a) \cdot cos(b) + sen(b) \cdot cos(a).$$
$$sen(a - b) = sen(a) \cdot cos(b) - sen(b) \cdot cos(a).$$

Considerando $a = b$ na fórmula da soma de arcos, obtemos a fórmula do arco duplo:

$$sen(2a) = 2sen(a) \cdot cos(a).$$

Exemplo 1: Calcular seno do ângulo $\theta = 75°$.

Perceba que $75° = 30° + 45°$.

Logo,

$$sen(75°) = sen(30° + 45°) \Rightarrow sen(75°) = sen(30°) \cdot cos(45°) + sen(45°) \cdot cos(30°) \Rightarrow$$
$$sen(75°) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow sen(75°) = \frac{\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})}{4}.$$

Exemplo 2: Calcular seno do ângulo $\theta = 120°$.

Considerando $\theta = 2\alpha$, concluímos que

$$\theta = 2\alpha \Rightarrow 120 = 2 \Rightarrow \alpha\alpha = 60°.$$

Aplicando a fórmula do seno para arco duplo, temos

$$sen(2a) = 2sen(a) \cdot cos(a) \Rightarrow sen(\theta) = 2sen(60°) \cdot cos(60°) \Rightarrow sen(120°) = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

Portanto,

$$sen(120°) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

- **Cosseno**

$$cos(a + b) = cos(a) \cdot cos(b) - sen(a) \cdot sen(b).$$
$$cos(a - b) = cos(a) \cdot cos(b) + sen(a) \cdot sen(b).$$

Considerando $a = b$ na fórmula da soma de arcos, obtemos a fórmula do arco duplo:

$$cos(2a) = cos^2(a) - sen^2(a).$$

Exemplo 1: Calcular cosseno do ângulo $\theta = 75°$.

Perceba que $75° = 30° + 45°$.

Logo,

$$cos(75°) = cos(30° + 45°) \Rightarrow cos(75°) = cos(30°)cos(45°) - sen(30°)sen(45°) \Rightarrow$$
$$cos(15°) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow cos(75°) = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)}{4}.$$

Exemplo 2: Calcular cosseno do ângulo $\theta = 120°$.

Considerando $\theta = 2\alpha$, concluímos que

$$\theta = 2\alpha \Rightarrow 120 = 2\alpha \Rightarrow \alpha = 60°.$$

Aplicando a fórmula do cosseno para arco duplo, temos

$$cos(2a) = cos^2(a) - sen^2(a) \Rightarrow cos(\theta) = cos^2(60°) - sen^2(60°) \Rightarrow cos(120°) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

Desse modo,

$$cos(120°) = -\frac{1}{2}.$$

- **Tangente**

$$tan(a + b) = \frac{tan(a) + tan(b)}{1 - tan(a) \cdot tan(b)}.$$

$$tan(a - b) = \frac{tan(a) - tan(b)}{1 + tan(a) \cdot tan(b)}.$$

Considerando $a = b$ na fórmula da soma de arcos, obtemos a fórmula do arco duplo:

$$tan(2a) = \frac{2tan(a)}{1 - tan^2(a)}.$$

Exemplo 1: Calcular tangente do ângulo $\theta = 15°$.

Perceba que $15° = 45° - 30°$.

Logo,

$$tan(15°) = tan(45° - 30°) \Rightarrow tan(15°) = \frac{tan(45°) - tan(30°)}{1 + tan(45°) \cdot tan(30°)} \Rightarrow$$
$$tan(15°) = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} \Rightarrow tan(15°) = \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}}.$$

Exemplo 2: Calcular tangente do ângulo $\theta = 120°$.

Considerando $\theta = 2\alpha$, concluímos que

$$\theta = 2\alpha \Rightarrow 120 = 2\alpha \Rightarrow \alpha = 60°.$$

Aplicando a fórmula da tangente para arco duplo, temos

$$tan(2a) = \frac{2tan(a)}{1 - tan^2(a)} \Rightarrow tan(\theta) = \frac{2tan(60°)}{1 - tan^2(60°)} \Rightarrow tan(120°) = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{1 - \left(\sqrt{3}\right)^2}$$

Assim,

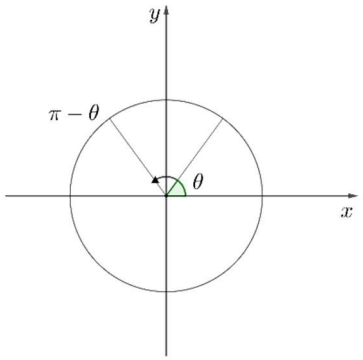
$$tan(120°) = -\sqrt{3}.$$

Redução ao 1° Quadrante

- **Arcos no 2° Quadrante**

Quando um ângulo x pertence ao 2° quadrante a redução para 1° quadrante é feita comparando x com o seu correspondente no 1° quadrante.

Assim,



$$sen(\theta) = sen(\pi - \theta).$$
$$cos(\theta) = -cos(\pi - \theta).$$
$$tan(\theta) = -tan(\pi - \theta).$$
$$cossec(\theta) = cossec(\pi - \theta).$$
$$sec(\theta) = -sec(\pi - \theta).$$
$$cot(\theta) = -cot(\pi - \theta).$$

Exemplo: Calcular seno do ângulo $\frac{5\pi}{6}$ radianos.

O primeiro passo para calcularmos o seno de um ângulo no 2° quadrante é reduzi-lo para o 1° quadrante. Desse modo,

$$(\pi - \theta) = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \theta = \pi - \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}.$$

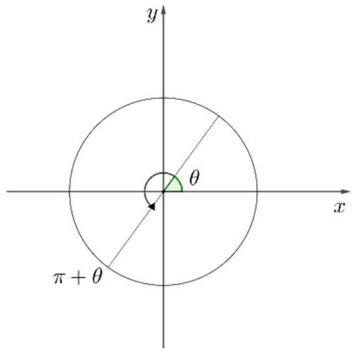
Depois, aplicamos a relação entre o seno do ângulo dado (2° quadrante) e do seu correspondente no 1° quadrante:

$$sen(\theta) = sen(\pi - \theta) \Rightarrow sen\left(\frac{\pi}{6}\right) = sen\left(\frac{5\pi}{6}\right) \Rightarrow sen\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.$$

- **Arcos no 3° Quadrante**

Quando um ângulo x pertence ao 3° quadrante a redução para 1° quadrante é feita comparando x com o seu correspondente no 1° quadrante.

Assim,



$$sen(\theta) = -sen(\theta + \pi).$$
$$cos(\theta) = -cos(\theta + \pi).$$
$$tan(\theta) = tan(\theta + \pi).$$
$$cossec(\theta) = -cossec(\theta + \pi).$$
$$sec(\theta) = -sec(\theta + \pi).$$
$$cot(\theta) = cot(\theta + \pi).$$

Exemplo: Calcular tangente do ângulo $\frac{5\pi}{4}$ radianos.

O primeiro passo para calcularmos a tangente de um ângulo no 3° quadrante é reduzi-la para o 1° quadrante. Desse modo,

$$(\theta + \pi) = \frac{5\pi}{4} \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{4} - \pi \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}.$$

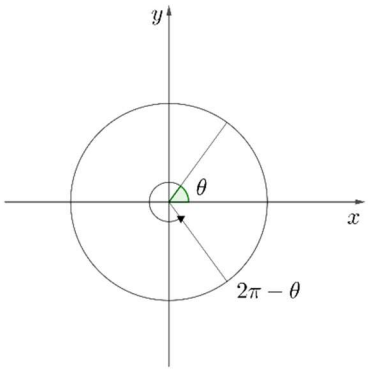
Depois, aplicamos a relação entre a tangente do ângulo dado (3° quadrante) e do seu correspondente no 1° quadrante:

$$tan(\theta) = tan(\theta + \pi) \Rightarrow tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = tan\left(\frac{5\pi}{4}\right) \Rightarrow tan\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 1.$$

- **Arcos no 4° Quadrante**

Quando um ângulo x pertence ao 4° quadrante a redução para 1° quadrante é feita comparando x com o seu correspondente no 1° quadrante.

Assim,



$$sen(\theta) = -sen(2\pi - \theta).$$
$$cos(\theta) = cos(2\pi - \theta).$$
$$tan(\theta) = -tan(2\pi - \theta).$$
$$cossec(\theta) = -cossec(2\pi - \theta).$$
$$sec(\theta) = -sec(2\pi - \theta).$$
$$cot(\theta) = -cot(2\pi - \theta).$$

Exemplo: Calcular secante do ângulo $\frac{5\pi}{3}$ radianos.

O primeiro passo para calcularmos a secante de um ângulo no 4° quadrante é reduzi-la para o 1° quadrante. Desse modo,

$$(2\pi - \theta) = \frac{5\pi}{3} \Rightarrow \theta = 2\pi - \frac{5\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}.$$

Depois, aplicamos a relação entre a secante do ângulo dado (4° quadrante) e do seu correspondente no 1° quadrante:

$$sec(\theta) = -sec(2\pi - \theta) \Rightarrow sec\left(\frac{\pi}{3}\right) = -sec\left(\frac{5\pi}{3}\right) \Rightarrow sec\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -2.$$

Funções Trigonométricas

A Função Seno

A função seno é a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = sen(x)$.

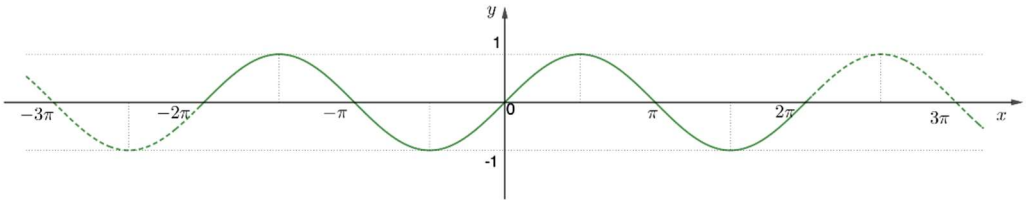
A função seno é limitada e periódica, sendo:

- A imagem da função seno $Im(f) = [-1, 1]$;
- O período da função seno igual a 2π.

Crescimento, decrescimento e sinais variando conforme o quadrante:

Quadrante	1°	2°	3°	4°
Sinal	+	+	-	-
Crescimento	Cresce	Decresce	Decresce	Cresce

- **Gráfico da Função Seno:**



- **Casos Particulares de Funções Envolvendo Seno**

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = a + b \cdot sen(cx + d)$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

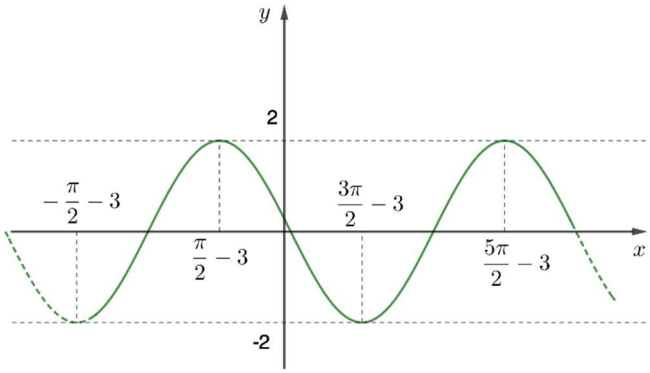
Neste caso, temos que:

- A imagem da função seno $Im(f) = [a - b, a + b]$;
- O período da função seno igual a $\frac{2\pi}{c}$.

Além disso, os valores de a, b, c e d influenciam a função da seguinte forma:

- a translada a função verticalmente;
- b determina o valor da amplitude da função;
- c varia o período da função;
- d translada a função horizontalmente.

Exemplo: Seja f a função $2 \cdot sen(x + 3)$,



Neste caso, temos que

- A imagem da função é $Im(f) = [-2, 2]$;
- O período da função é 2π;
- O gráfico é igual ao gráfico da função $2 \cdot sen(x)$ transladado 3 unidades para a esquerda.

A Função Cosseno

A função cosseno é a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = cos(x)$.

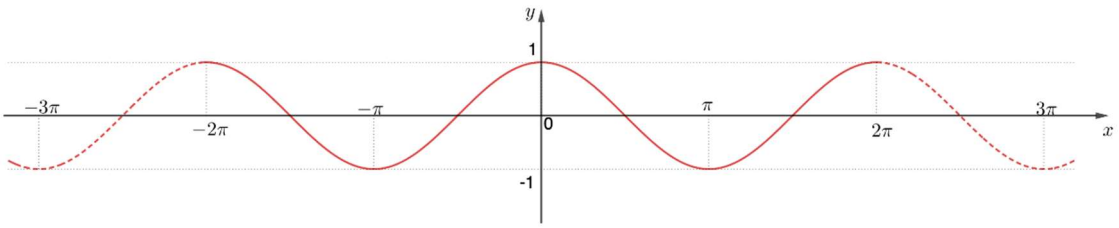
Assim como a função seno, a função cosseno também é limitada e periódica, sendo:

- A imagem da função cosseno $Im(f) = [-1, 1]$;
- O período da função cosseno igual a 2π.

Crescimento, decrescimento e sinais variando conforme o quadrante:

Quadrante	1°	2°	3°	4°
Sinal	+	-	-	+
Crescimento	Decresce	Decresce	Cresce	Cresce

- **Gráfico da Função Cosseno:**



- **Casos Particulares de Funções Envolvendo Cosseno**

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = a + b \cdot cos(cx + d)$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

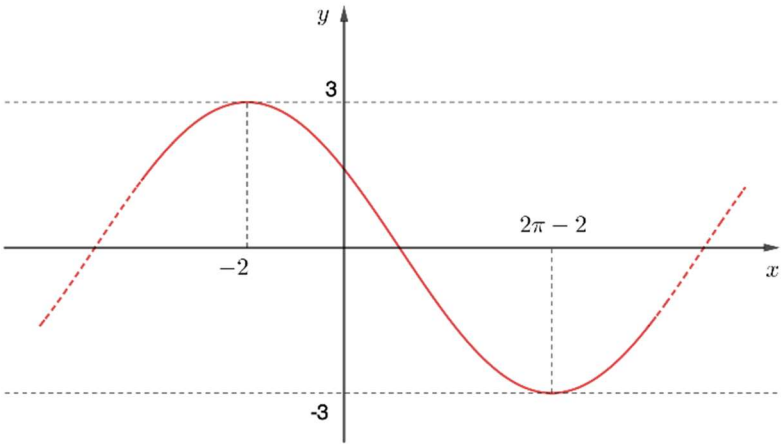
Neste caso, temos que:

- A imagem da função cosseno $Im(f) = [a - b, a + b]$;
- O período da função cosseno igual a $\frac{2\pi}{c}$.

Além disso, os valores de a, b, c e d influenciam a função da seguinte forma:

- a translada a função verticalmente;
- b determina o valor da amplitude da função;
- c varia o período da função;
- d translada a função horizontalmente.

Exemplo: Seja f a função $3 \cdot cos\left(\frac{x}{2} + 1\right)$,



Neste caso, temos que

- A imagem da função é $Im(f) = [-3, 3]$;
- O período da função é 4π;

- O gráfico é igual ao gráfico da função $3 \cdot cos\left(\frac{x}{2}\right)$ transladado 1 unidade para a esquerda.

A Função Tangente

A função tangente é a função definida por $f(x) = tan(x)$.

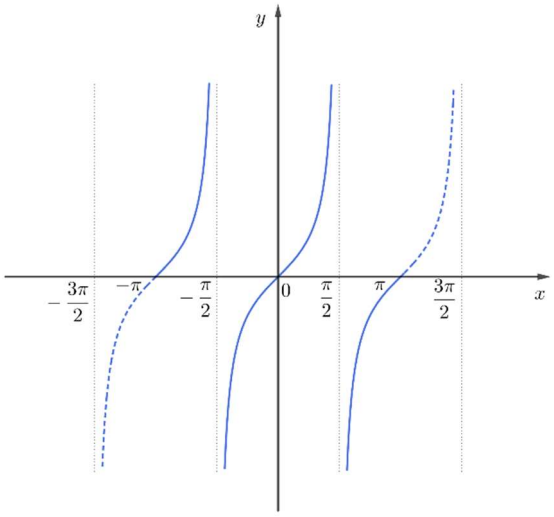
A função tangente não é limitada, mas é periódica. Além disso, a função tangente não está definida para todo $x \in \mathbb{R}$. De fato, temos que:

- O domínio da função tangente $Dom(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}\right\}$;
- A imagem da função tangente $Im(f) = \mathbb{R}$;
- O período da função tangente igual a π.

Crescimento, decrescimento e sinais variando conforme o quadrante:

Quadrante	1°	2°	3°	4°
Sinal	+	-	+	-
Crescimento	Cresce	Cresce	Cresce	Cresce

- **Gráfico da Função Tangente**



- **Casos Particulares de Funções Envolvendo Tangente**

Consideremos a seguinte $f(x) = a + b \cdot tan(cx + d)$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

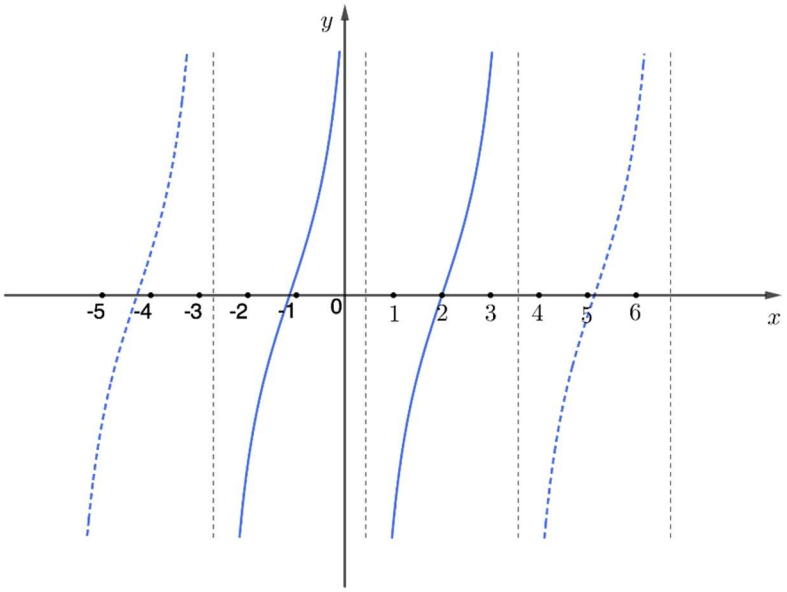
Neste caso, temos que:

- O domínio da função tangente $Dom(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2c} - \frac{d}{c} + \frac{n\pi}{c},\ n \in \mathbb{Z}\right\}$;
- A imagem da função tangente $Im(f) = \mathbb{R}$;
- O período da função tangente igual a $\frac{\pi}{c}$.

Além disso, os valores de a, b, c e d influenciam a função da seguinte forma:

- a translada a função verticalmente;
- c varia o período da função;
- d translada a função horizontalmente.

Exemplo: Seja f a função $3 \cdot tan(x-2)$,

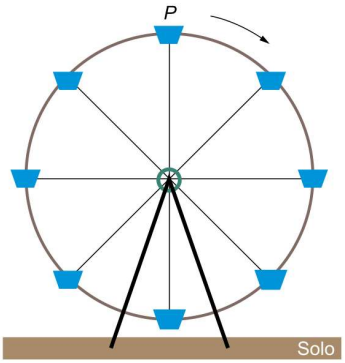


Neste caso, temos que

- O domínio da função é $Dom(f) = \left\{x \in \mathbb{R} | x \neq \frac{\pi}{2} + 2 + n \cdot \pi, \ \ n \in \mathbb{Z}\right\}$;
- O período da função é π;
- O gráfico é igual ao gráfico da função $3 \cdot tan(x)$ transladado 2 unidades para a direita.

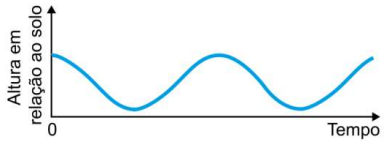
Exercícios

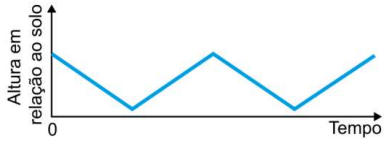
01 - (ENEM MEC/2023) A figura ilustra uma roda-gigante no exato instante em que a cadeira onde se encontra a pessoa *P* está no ponto mais alto dessa roda-gigante.

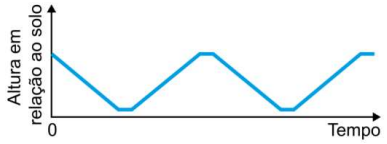


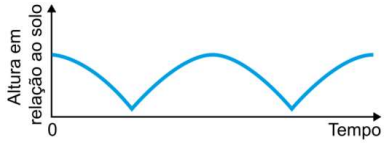
Com o passar do tempo, à medida que a roda-gigante gira, com velocidade angular constante e no sentido horário, a altura da cadeira onde se encontra a pessoa *P*, em relação ao solo, vai se alterando.

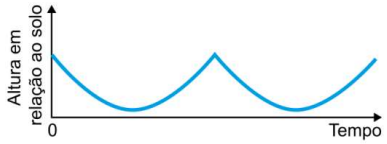
O gráfico que melhor representa a variação dessa altura, em função do tempo, contado a partir do instante em que a cadeira da pessoa *P* se encontra na posição mais alta da roda-gigante, é

a)


b)


c)


d)


e)


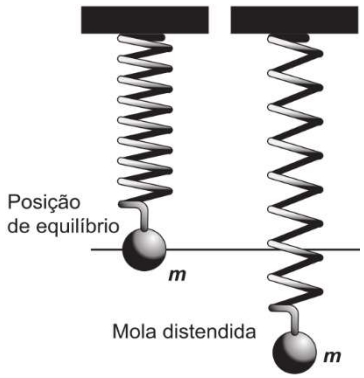
02 - (ENEM MEC/2023) Na modelagem e no estudo de fenômenos periódicos, em geral, os modelos associados fazem uso de funções trigonométricas. Nesse sentido, considere um experimento, realizado em laboratório, em que uma planta foi colocada em uma estufa, onde a temperatura é controlável. O experimento consiste em observar alterações nas características dessa planta ao ser submetida a variações de temperatura. Durante 24 horas, a temperatura T(x) da estufa variou de acordo com a função $T(x) = 20 - 10\text{sen}\left(\pi \cdot \frac{x}{4}\right)$, em que x é medido em hora, variando no intervalo $0 \leq x \leq 24$.

Durante esse experimento, quantas vezes a temperatura na estufa atingiu o seu valor mínimo?

a) 1
b) 3
c) 4
d) 5
e) 7

03 - (ENEM MEC/2021) Uma mola é solta da posição distendida conforme a figura. A figura à direita representa o gráfico da posição P (em cm) da massa m em função do tempo t (em segundo) em um sistema de coordenadas cartesianas. Esse movimento periódico é descrito por uma expressão do tipo

$P(t) = \pm A\cos(\omega t)$ ou $P(t) = \pm A\text{sen}(\omega t)$, em que A > 0 é a amplitude de deslocamento máximo e ω é a frequência, que se relaciona com o período T pela fórmula $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

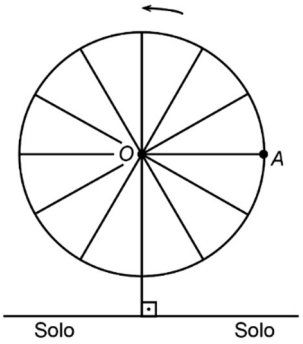


Considere a ausência de quaisquer forças dissipativas.

A expressão algébrica que representa as posições P(t) da massa m, ao longo do tempo, no gráfico, é

a) –3 cos (2t)
b) –3 sen (2t)
c) 3 cos (2t)
d) –6 cos (2t)
e) 6 sen (2t)

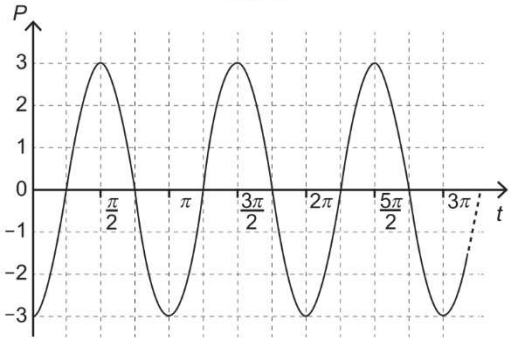
04 - (ENEM MEC/2018) Em 2014 foi inaugurada a maior roda-gigante do mundo, a *High Roller*, situada em Las Vegas. A figura representa um esboço dessa roda-gigante, no qual o ponto A representa uma de suas cadeiras:



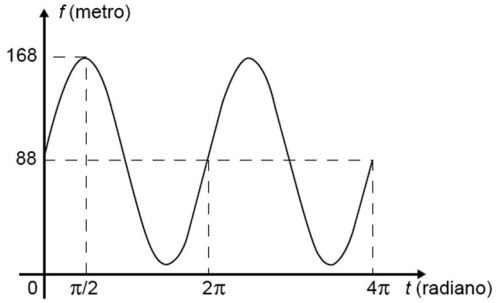
Disponível em: http://en.wikipedia.org.
Acesso em: 22 abr. 2014 (adaptado).

A partir da posição indicada, em que o segmento OA se encontra paralelo ao plano do solo, rotaciona-se a *High Roller* no sentido anti-horário, em torno do ponto O. Sejam t o ângulo determinado pelo segmento OA em relação à sua posição inicial, e f a função que descreve a altura do ponto A, em relação ao solo, em função de t.

Gráfico



Após duas voltas completas, f tem o seguinte gráfico:

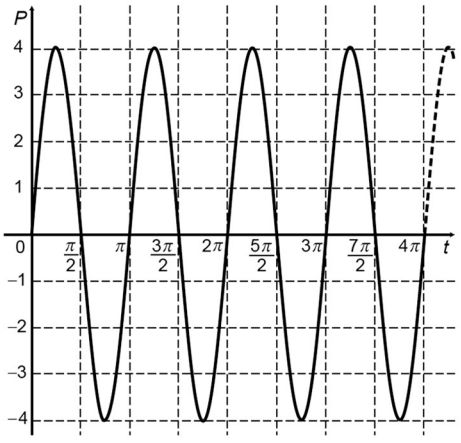


A expressão da função altura é dada por

a) f(t) = 80sen(t) + 88
b) f(t) = 80cos(t) + 88
c) f(t) = 88cos(t) + 168
d) f(t) = 168sen(t) + 88cos(t)
e) f(t) = 88sen(t) + 168cos(t)

05 - (ENEM MEC/2019) Os movimentos ondulatórios (periódicos) são representados por equações do tipo $\pm A\text{sen}(wt+\theta)$, que apresentam parâmetros com significados físicos importantes, tais como a frequência $w=\frac{2\pi}{T}$, em que T é o período; *A* é a amplitude ou deslocamento máximo; θ é o ângulo de fase $0\le\theta<\frac{2\pi}{w}$, que mede o deslocamento no eixo horizontal em relação à origem no instante inicial do movimento.

O gráfico representa um movimento periódico, P = P(t), em centímetro, em que P é a posição da cabeça do pistão do motor de um carro em um instante *t*, conforme ilustra a figura.



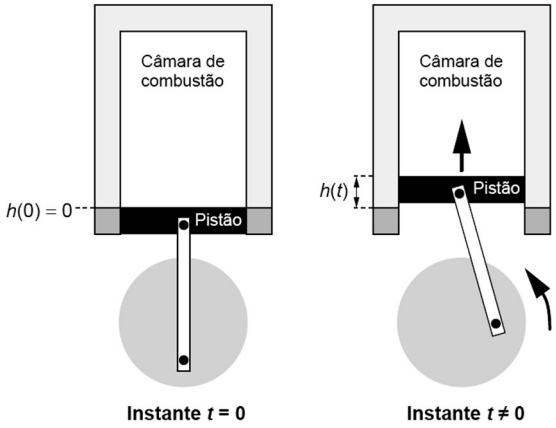
A expressão algébrica que representa a posição *P*(*t*), da cabeça do pistão, em função do tempo *t* é

a) P(t) = 4sen(2t)
b) P(t) = −4sen(2t)
c) P(t) = −4sen(4t)

d) $P(t) = 4\text{sen}\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$

e) $P(t) = 4\text{sen}\left(4t + \frac{\pi}{4}\right)$

06 - (ENEM MEC/2019) Um grupo de engenheiros está projetando um motor cujo esquema de deslocamento vertical do pistão dentro da câmara de combustão está representado na figura.

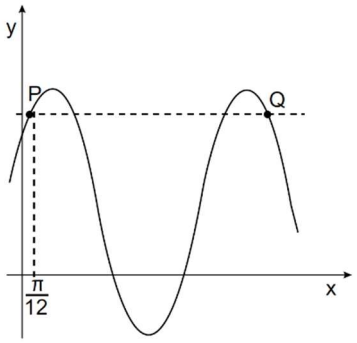


A função $h(t) = 4 + 4\text{sen}\left(\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$ definida para $t \geq 0$ descreve como varia a altura h, medida em centímetro, da parte superior do pistão dentro da câmara de combustão, em função do tempo t, medido em segundo. Nas figuras estão indicadas as alturas do pistão em dois instantes distintos.
O valor do parâmetro β, que é dado por um número inteiro positivo, está relacionado com a velocidade de deslocamento do pistão. Para que o motor tenha uma boa potência, é necessário e suficiente que, em menos de 4 segundos após o início do funcionamento (instante $t = 0$), a altura da base do pistão alcance por três vezes o valor de 6 cm. Para os cálculos, utilize 3 como aproximação para π.

O menor valor inteiro a ser atribuído ao parâmetro β, de forma que o motor a ser construído tenha boa potência, é

a) 1.
b) 2.
c) 4.
d) 5.
e) 8.

07 - (EBMSP BA/2018) A forma de onda senoidal ocorre, naturalmente, na natureza, como se pode observar nas ondas do mar, na propagação do som e da luz, no movimento de um pêndulo, na variação da pressão sanguínea do coração etc.



Um determinado fenômeno periódico é modelado através da função $f(x) = 1 + 2\text{sen}\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$, parcialmente representada no gráfico.

Sendo P e Q pontos desse gráfico, é correto afirmar que o par ordenado que representa Q é

a) $\left(\frac{25\pi}{24}, 1+\sqrt{2}\right)$

b) $\left(\frac{13\pi}{12}, 1+\sqrt{3}\right)$

c) $\left(\frac{7\pi}{6}, 3+\sqrt{2}\right)$

d) $\left(\frac{5\pi}{4}, 1+\sqrt{3}\right)$

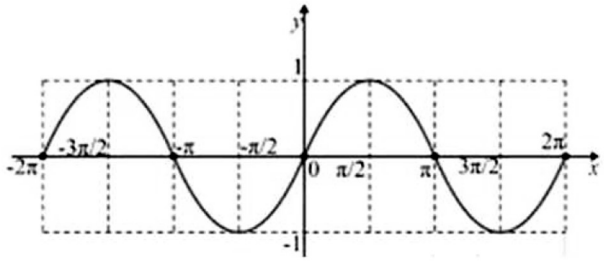
e) $\left(\frac{17\pi}{12}, 1+\sqrt{2}\right)$

08 - (UNITAU SP/2018) Para analisar a influência de determinado medicamento, a pressão P do sangue expressa em mmHg, em função do tempo t, expresso em segundos, $0 \le t \le 600$ contados a partir do instante inicial da aplicação do remédio, em um paciente monitorado, pode ser modelada pela função $P(t) = 110 + 30\text{sen}\left(\frac{7\pi}{1800} \cdot t\right)$.

Utilizando, se necessário, as aproximações $\sqrt{2} = 1{,}4$ e $\sqrt{3} = 1{,}7$, é CORRETO afirmar:

a) Ao aplicar o remédio, a pressão do paciente era de 140 mmHg.
b) Ao aplicar o remédio, a pressão do paciente era de 80 mmHg.
c) Ao término do período de avaliação, a pressão era superior à verificada aos 5 minutos de aplicação do remédio.
d) Aos 5 minutos de aplicação, a pressão atingiu seu valor máximo, que é de 140 mmHg.
e) Aos 5 minutos de aplicação, a pressão atingiu seu valor mínimo, que é de 80 mmHg.

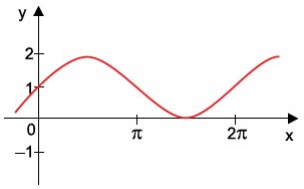
09 - (UFAL/2018)

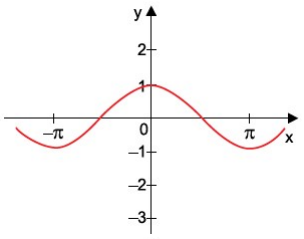


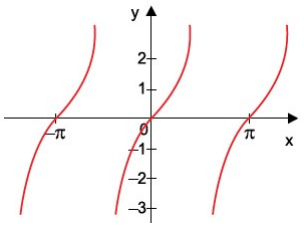
A função cujo gráfico está representado na figura é

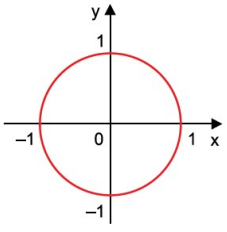
a) $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$.
b) $y = ax + b$, com $a \neq 0$.
c) $y = a$, com $a \neq 0$.
d) $y = \text{sen } x$.
e) $y = \frac{1}{x}$.

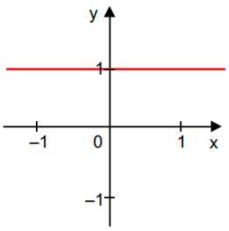
10 - (UEFS BA/2018) Assinale a alternativa em que o gráfico da função $f(x) = \cos(2x) + 2\text{sen}^2(x)$, com $x \in \mathbb{R}$, está melhor representado.

a)


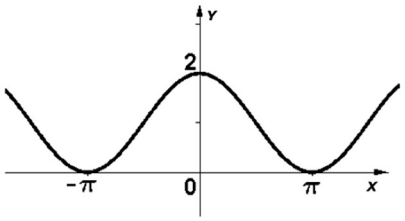
b)


c)


d)


e)


11 - (EsPCEx SP/2018) Dentre as alternativas a seguir, aquela que apresenta uma função trigonométrica de período 2π, cujo gráfico está representado na figura abaixo é



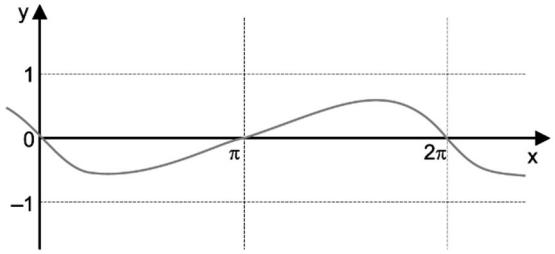
Desenho Ilustrativo Fora de Escala

a) f(x) = 1 – sen(π – x).
b) f(x) = 1 + cos(π – x).
c) f(x) = 2 – cos(π + x).
d) f(x) = 2 – sen(π + x).
e) f(x) = 1 – cos(π – x).

12 - (UFRGS RS/2018) Um ponto A, que se movimenta sobre uma circunferência, tem sua posição p(t), considerada na vertical, no instante t, descrita pela relação $p(t) = 100 - 20\text{sen}(t)$, para $t \geq 0$. Nesse caso, a medida do diâmetro dessa circunferência é

a) 30.
b) 40.
c) 50.
d) 80.
e) 120.

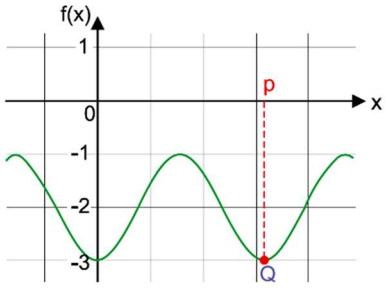
13 - (UEFS BA/2018) A figura mostra parte do gráfico da função $f(x) = \dfrac{\text{sen}(x)}{\cos(x) - 2}$.



No intervalo aberto (0, 2π), a solução de sen (x) > f(x) é o conjunto

a) $\left\{x \in IR \mid 0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right\}$
b) $\left\{x \in IR \mid \dfrac{\pi}{2} < x < \pi\right\}$
c) $\{x \in IR \mid 0 < x < \pi\}$
d) $\{x \in IR \mid \pi < x < 2\pi\}$
e) $\{x \in IR \mid 0 < x < 2\pi\}$

14 - (FGV /2018) Observe o gráfico de uma função trigonométrica cosseno, dada pela expressão f(x) = m + ncos(2x), sendo m, n e p números reais, com ponto de mínimo em x = p, que é a abscissa do ponto Q.



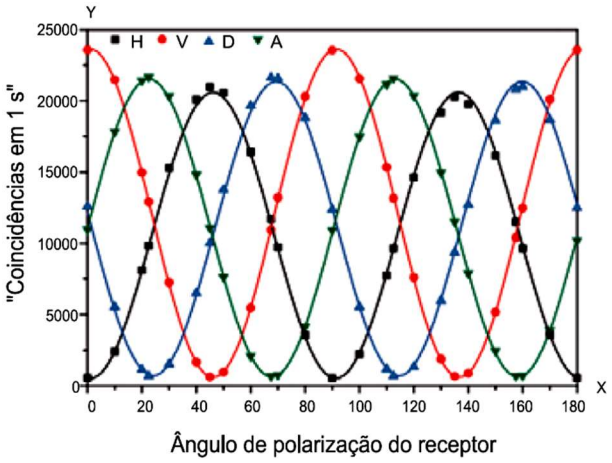
O valor de p^{mn} é igual a

a) $\frac{1}{4\pi^2}$
b) $\frac{1}{\pi^2}$
c) $\frac{\pi^2}{4}$
d) π^2
e) $4\pi^2$

15 - (UCB DF/2018) A largura da faixa de areia de uma praia, em metros, oscila com a maré segundo a função $F(t)=10\,\mathrm{sen}(\pi t/12)+20$, em que t é medido em horas. O tamanho médio, em metros, da faixa e o período da função, em horas, são, respectivamente, iguais a

a) 10 e 12.
b) 5 e 12.
c) 20 e 24.
d) 20 e 12.
e) 10 e 24.

16 - (IBMEC SP Insper/2018) Em estudo divulgado recentemente na *The Optical Society of America*, pesquisadores da Tong University revelaram uma forma de transmitir dados de comunicação de forma segura utilizando as águas dos mares como meio de transporte das informações. No artigo, os cientistas apresentam o seguinte gráfico como parte dos resultados.



(www.osapublishing.org. Adaptado)

Uma função trigonométrica que modela razoavelmente bem a curva indicada por A no gráfico do artigo, com x em graus e y em "coincidências em 1 s", é

a) y = 22 000 + cos (x).
b) y = 22 000 + 10 000 cos (2x).
c) y = 22 000 + sen (4x).
d) y = 11 000 + sen (2x).
e) y = 11 000 + 10 000 sen (4x).

17 - (Uncisal AL/2018) Várias doenças de relevância epidemiológica apresentam padrões temporais e periódicos relativos à transmissão de doenças na comunidade. A sazonalidade é o tipo mais comum de força periódica que influencia na dinâmica da população. Dentre as doenças sazonais, a dengue é bastante conhecida e o maior número de casos ocorre no período do ano que apresenta elevada temperatura e chuvas regulares. Um cientista apresentou um modelo matemático para o número de casos de dengue, para uma região específica do país, dado pela função $f(t) = 5930 + 4600\cos\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{\pi}{2}\right)$, com $t \in N$, tal que $1 \le t \le 12$ corresponde, respectivamente, aos meses de janeiro a dezembro. Considerando esse modelo, em qual mês ocorreu o maior número de casos?

a) Novembro.
b) Dezembro.
c) Janeiro.
d) Fevereiro.
e) Março.

18 - (Unioeste PR/2018) Em uma área de proteção ambiental existe uma população de coelhos. Com o aumento natural da quantidade de coelhos, há muita oferta de alimento para os predadores. Os predadores com a oferta de alimento também aumentam seu número e abatem mais coelhos. O número de coelhos volta então a cair. Forma-se assim um ciclo de oscilação do número de coelhos nesta reserva. Considerando-se que a população p(t) de coelhos fica bem modelada por $p(t) = 1000 - 250\text{sen}\left(\frac{2\pi t}{360}\right)$, sendo

$t \geq 0$ a quantidade de dias decorridos, e o argumento da função seno é medido em radianos, pode-se afirmar que

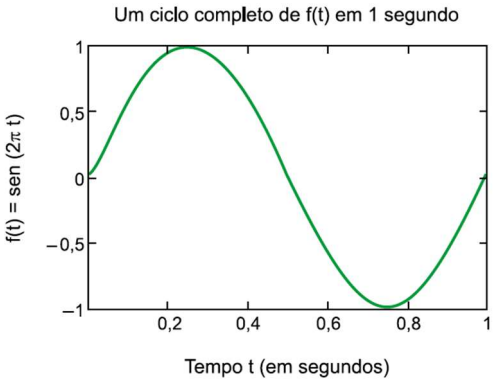
a) a população de coelhos é sempre menor ou igual a 1000 indivíduos.
b) em quatro anos a população de coelhos estará extinta.
c) a população de coelhos dobrará em 3 anos.
d) a quantidade de coelhos só volta a ser de 1000 indivíduos depois de 360 dias.
e) a população de coelhos atinge seu máximo em 1250 indivíduos.

19 - (UFRGS RS/2019) Considere a função real de variável real f(x) = 3 – 5sen(2x + 4). Os valores de máximo, mínimo e o período de f(x) são, respectivamente,

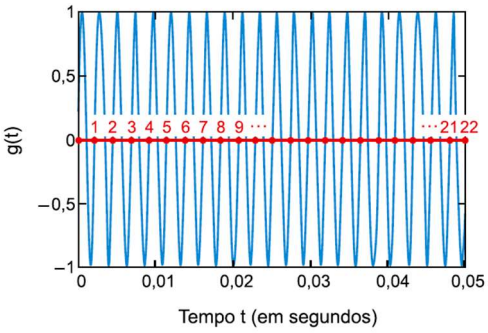
a) –2, 8, π
b) 8, –2, π
c) π, –2, 8
d) π, 8, –2
e) 8, π, –2

20 - (IFPR/2019) Uma pequena indústria produz ração para cachorro. A previsão da sua produção mês a mês para o ano de 2019, em quilogramas, é dada pela função $P(t) = 800 + 20\text{sen}\left(\frac{\pi t}{6}\right)$, onde t representa o mês do ano, ou seja, t é um número natural tal que $1 \leq t \leq 12$. Sendo assim, a maior e a menor produção prevista para o ano de 2019 se darão respectivamente nos meses:

a) 3 e 4.



b) 6 e 12.



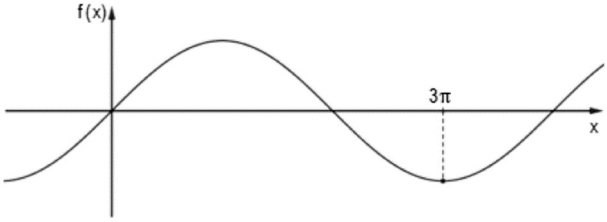
c) 4 e 12.
d) 3 e 9.

21 - (IBMEC SP Insper/2019) Os sons que ouvimos são causados por vibrações que enviam ondas de pressão pelo ar. Nossos ouvidos respondem a essas ondas de pressão e sinalizam para o cérebro sobre sua amplitude e frequência, e o cérebro interpreta esses sinais como som. As senoides indicadas nos gráficos de f(t) e g(t) representam sons de diferentes frequências.

Se g(t) = sen (k · t), então k é igual a

a) 440π.
b) 20π.
c) 40π.
d) $0{,}1\pi$.
e) 880π.

22 - (Fac. Pequeno Príncipe PR/2019) Observe a curva esboçada a seguir.



É **CORRETO** afirmar que existe a possibilidade de que essa curva seja a representação gráfica da função

a) f(x) = 2 · sen(0,5x)
b) f(x) = 3 · cos(0,5x)
c) f(x) = sen(x)
d) f(x) = cos(x)
e) f(x) = sen(2x)

23 - (IBMEC SP Insper/2019) Uma empresa que fabrica um produto de venda sazonal tem sua produção mensal P(n), em unidades, modelada pela seguinte função:

$$P(n) = 35500 + 25000 \cdot tg\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{n \cdot \pi}{18}\right), \text{ com } 1 \le n \le 12$$

Para essa função, n = 1 corresponde a janeiro, n = 2 corresponde a fevereiro, n = 3 corresponde a março, e assim sucessivamente.

A partir do mês em que a produção mensal atinge 50 000 unidades, essa empresa contrata funcionários temporários. Nesse caso, a contratação ocorrerá no mês de

Dados: adote:
tg 10° = 0,18 tg 40° = 0,84
tg 20° = 0,36 tg 50° = 1,19
tg 30° = 0,58 tg 60° = 1,73

a) novembro.
b) maio.
c) março.
d) julho.
e) setembro.

24 - (UEM PR/2019) O preço dos produtos no mercado varia de acordo com a procura. A função que descreve o preço P (em reais) de uma bermuda em função do mês t do ano é dada por $P(t) = 80 + 20\text{sen}\left(\frac{\pi t}{4}\right)$. Suponha que os meses sejam enumerados de 1 a 12, e que janeiro é o mês 1. Assinale o que for **correto**.

01. Dom(P) = {1, 2,3,..,11,12}.
02. Em fevereiro a bermuda custa R$80,00.
04. Existem três meses no ano em que a bermuda custa R$80,00.
08. O preço mínimo de uma bermuda ocorre no mês de junho.
16. O melhor preço de venda ocorre em apenas um mês do ano.

25 - (UNITAU SP/2020) A quantidade S(t) de sangue expressa em litros e que fica disponível no dia t no hemonúcleo de um hospital em determinado período do ano é dada pela função

$$S(t) = 81 + 54\text{sen}\left[\frac{2\pi}{60}(t-10)\right].$$

O sangue sempre é acondicionado em bolsas com capacidade de 450 ml cada.
Adotar, se necessário, $\sqrt{3} = 1,7$ e $\sqrt{2} = 1,4$

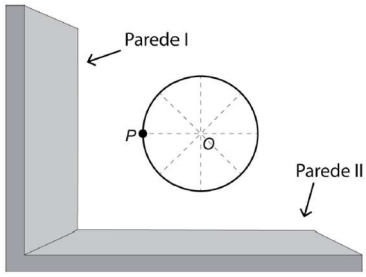
Considerando as informações acima, é CORRETO afirmar:

a) Quando a quantidade de litros de sangue disponível é máxima, a quantidade mínima de bolsas necessárias para acondicionar o sangue é de 135.
b) Quando a quantidade de litros de sangue disponível é mínima, a quantidade mínima de bolsas necessárias para acondicionar o sangue é de 27.
c) Quando t = 45, a quantidade de litros de sangue disponível é 108.
d) A quantidade mínima de bolsas necessárias para acondicionar o sangue quando t = 15 é de 240.
e) A quantidade mínima de bolsas necessárias para acondicionar o sangue quando t = 10 é de 200.

26 - (IFPR/2020) Em uma determinada região litorânea, a maré oscila segundo a função $h(t) = 3 - 2\text{sen}\left(\pi t/12\right)$, sendo h a altura em metros, que a maré atinge no tempo t em horas, medido a partir de 6h da manhã. Uma embarcação, que se encontra encalhada às 11h da manhã, precisa de uma profundidade mínima de 2 metros para navegar. Assinale a alternativa que apresenta quantas horas os tripulantes dessa embarcação ainda terão que esperar para prosseguirem viagem.

a) 4h.
b) 5h.
c) 6h.
d) 7h.

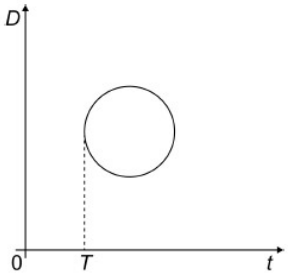
27 - (ENEM MEC/2020) A figura ilustra a vista superior de um brinquedo gira-gira em um parque de diversões, no qual a linha contínua, em formato circular tendo *O* como seu centro, indica o assento onde as crianças se posicionam no brinquedo. O ponto *P* indica a posição ocupada por uma criança, em um instante de tempo *T,* quando o brinquedo está girando continuamente no sentido anti-horário (com *O* fixo), e velocidade constante por várias voltas.



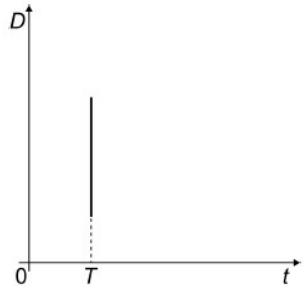
O brinquedo está situado nas proximidades de duas paredes verticais e perpendiculares entre si. Seja *D* a distância de *P* até a parede I.

O gráfico que melhor representa, em função do tempo *t* a partir do instante *T*, a distância *D* é

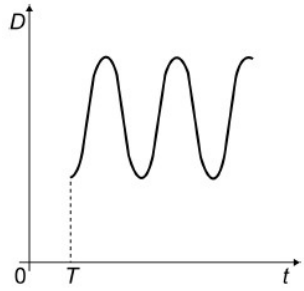
a)



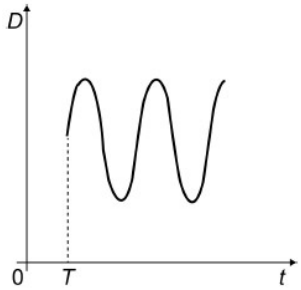
b)



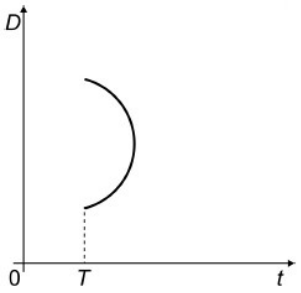
c)



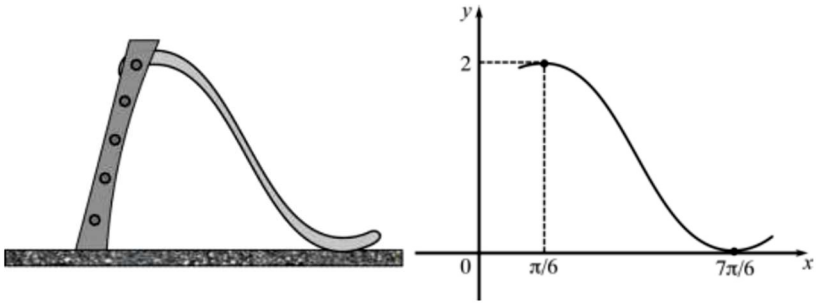
d)



e)



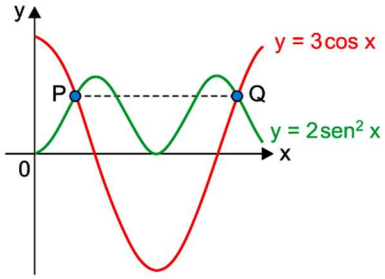
28 - (UFU MG/2020) As imagens abaixo ilustram o projeto de um escorregador infantil (à esquerda) e sua representação sobre o sistema de coordenadas cartesianas (à direita), dada pelo gráfico da função f(x) = a + cos(x + b), em que *a* e *b* são constantes reais, com $-\pi/2 \leq b \leq \pi/2$.



Se as alturas máxima e mínima desse escorregador ocorrem nos pontos de coordenadas $(\pi/6, 2)$ e $(7\pi/6, 0)$, respectivamente, então $a+b$ é igual a

a) $1 - \pi/6$.
b) $2 - \pi/6$.
c) $2 + \pi/6$.
d) $1 + \pi/6$.

29 - (Santa Casa SP/2020) Observe o gráfico de duas funções trigonométricas, de IR em IR, cujas duas primeiras intersecções positivas estão indicadas pelos pontos P e Q.



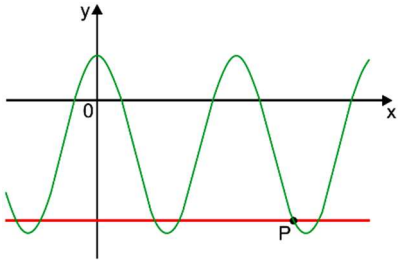
A medida de $\overline{PQ}$, na unidade dos eixos do plano cartesiano, é igual a

a) $\frac{5\pi}{6}$
b) $\frac{5\pi}{3}$
c) $\frac{2\pi}{3}$

d) $\frac{4\pi}{3}$

e) 2π

30 - (FGV /2020) A figura indica os gráficos das funções reais definidas por y = –1 + 2cos (2x) e y + 1 + $\sqrt{3}$ = 0 no plano cartesiano de eixos ortogonais, sendo P um dos pontos de intersecção dos gráficos.



O valor da abscissa do ponto P é igual a

a) $\frac{4\pi}{3}$

b) $\frac{17\pi}{12}$

c) $\frac{5\pi}{3}$

d) $\frac{8\pi}{3}$

e) $\frac{17\pi}{6}$

31 - (FGV /2020) Para o ano de 2020, uma empresa prevê os seguintes valores (em milhares de reais) das receitas de venda de um de seus produtos:

$$V = 50 + 0{,}2x + 0{,}5 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}x\right)$$

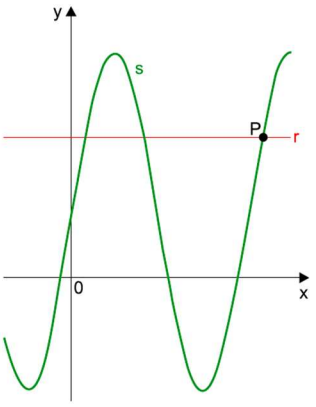
Considere que x = 1 representa janeiro de 2020, x = 2 representa fevereiro de 2020 e assim por diante.

Qual a previsão de vendas totais, em milhares de reais, para o 1º trimestre de 2020?

a) 151,625
b) 152,125
c) 151,875
d) 152,375
e) 152,625

Adote para $\sqrt{3}$ o valor 1,7

32 - (Famerp SP/2020) A figura indica os gráficos de uma reta r e uma senoide s, de equações $y = \frac{5}{2}$ e y = 1 + 3 sen (2x), em um plano cartesiano de eixos ortogonais.



Sendo P um ponto de intersecção dos gráficos, conforme mostra a figura, sua abscissa, convertida para graus, é igual a

a) 275°
b) 240°
c) 225°
d) 210°
e) 195°

33 - (UFPR/2020) A maior variação de maré do Brasil ocorre na baía de São Marcos, no estado do Maranhão. A diferença entre o nível mais alto e o nível mais baixo atingidos pela maré pode chegar a 8 metros em algumas épocas do ano. Suponha que em determinado dia do ano o nível da maré da baía de São Marcos possa ser descrito pela expressão

$$n(t) = 3\text{sen}((t - 5)\,\pi/6) + 4, \text{ com } t \in [0, 24]$$

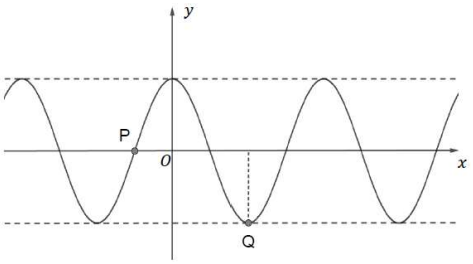
sendo t o tempo (medido em horas) e n(t) o nível da maré no instante t (dado em metros). Com base nessas informações, considere as seguintes afirmativas:

1. O nível mais alto é atingido duas vezes durante o dia.
2. Às 11 h é atingido o nível mais baixo da maré.
3. Às 5 h é atingido o nível mais alto da maré.
4. A diferença entre o nível mais alto e o nível mais baixo é de 3 metros.

Assinale a alternativa correta.

a) Somente a afirmativa 1 é verdadeira.
b) Somente as afirmativas 1 e 4 são verdadeiras.
c) Somente as afirmativas 2 e 3 são verdadeiras.
d) Somente as afirmativas 2, 3 e 4 são verdadeiras.
e) As afirmativas 1, 2, 3 e 4 são verdadeiras.

34 - (UFU MG/2023) Considere a função real de variável real definida por $y = g(x) = \cos\left(\frac{x}{4}\right)$, representada graficamente no sistema de coordenadas cartesianas $x0y$, em que estão demarcados os pontos P e Q, como ilustrado abaixo.



A reta, passando pelos pontos P e Q, tem uma equação cartesiana dada por

a) $x+10\pi y=-4\pi$
b) $x+4\pi y=-2\pi$
c) $x-10\pi y=-4\pi$
d) $x+6\pi y=-2\pi$

35 - (UFGD MS/2024)

TEXTO I

A Matemática e a Física são responsáveis pela explicação de inúmeros fatos ocorridos na natureza. Um processo vital para o ser humano é a circulação de sangue pelo corpo. Ao bater, o coração impulsiona o sangue oxigenado pelas artérias para todas as partes do corpo, retornando ao próprio coração carregado de gás carbônico (orientado pelas veias), que, por sua vez, é bombeado ao pulmão visando às trocas gasosas.
Ao circular, o sangue encontra o atrito das paredes arteriais, por isso o coração bate sistematicamente em intervalos regulares. Temos dois tipos de pressão, uma decorrente da força imposta pelo coração e outra imposta pelo calibre arterial. A força realizada pelo coração para impulsionar o sangue é denominada de sistólica (pressão máxima) e a resistência oferecida pelas paredes arteriais ao sangue impulsionado é chamada de diastólica (pressão mínima).
Quando medimos nossa pressão arterial com o aparelho conhecido como esfigmomanômetro, e detectamos, por exemplo, o valor de 11 por 7, estamos sendo informados que nossa pressão máxima é de 110 mmHg (milímetros de mercúrio) e a pressão mínima é de 70 mmHg. O coração impulsiona o sangue a uma força de 110 e a resistência da parede arterial é de 70.

Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/pressao-sanguinea.htm. Acesso em: 20 jul. 2023.

TEXTO II

Aceita-se como normal para indivíduos adultos (com mais de 18 anos de idade) cifras inferiores a 85 mmHg de pressão diastólica e inferiores a 130 mmHg de pressão sistólica.
Disponível em: http://departamentos.cardiol.br/dha/consenso3/capitulo1.asp. Acesso em: 20 jul. 2023.

A partir das informações apresentadas e supondo que as pressões sanguíneas (sistólica e diastólica) de uma determinada pessoa com mais de 18 anos foi modelada pela seguinte função:

$$P(t) = \begin{cases} 140 + 9\cos(30\pi t), \text{ para pressão sistólica,} \\ 90 + 4\cos(30\pi t), \text{para pressão diastólica,} \end{cases}$$

em que, *P* representa os pares de valores das pressões (com medida em mmHg) e *t* é o tempo (em segundos), então, para essa pessoa, é correto afirmar que

a) a pressão sistólica está acima da considerada normal e a diastólica está dentro da normalidade.
b) a pressão sistólica está dentro da normalidade e a diastólica está acima do normal.
c) ambas as pressões, sistólica e diastólica, estão dentro da normalidade.
d) a pressão sistólica está abaixo da considerada normal e a diastólica acima da considerada normal.
e) ambas as pressões, sistólica e diastólica, estão acima da normalidade.

Progressão Aritmética (PA)

Definição

Uma progressão aritmética (PA) é uma sequência de números em que cada termo possui uma diferença constante em relação ao termo anterior. Essa constante é conhecida como razão da progressão e é simbolizada pela letra r.

São exemplos de progressões aritméticas:

Exemplo 1: $(\mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{5}, \mathbf{7}, \mathbf{9}, \cdots)$.
PA com razão $r = 2$.

Exemplo 2: $(-\mathbf{10}, -\mathbf{5}, \mathbf{0}, \mathbf{5}, \mathbf{10}, \cdots)$.
PA com razão $r = 5$.

Exemplo 3: $(\mathbf{7}, \mathbf{7}, \mathbf{7}, \mathbf{7}, \cdots)$.
PA com razão $r = 0$.

Exemplo 4: $\left(\mathbf{2}, \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}, \mathbf{3}, \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{2}}, \mathbf{4}, \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{2}}, \mathbf{5}, \cdots\right)$.
PA com razão $r = \frac{1}{2}$.

Exemplo 5: $(\mathbf{11}, \mathbf{4}; \mathbf{10}, \mathbf{1}; \mathbf{8}, \mathbf{8}; \mathbf{7}, \mathbf{5}; \cdots)$.
PA com razão $r = 1{,}3$.

Exemplo 6: $(\mathbf{8}, \mathbf{5}, \mathbf{2}, -\mathbf{1}, -\mathbf{4}, \cdots)$.
PA com razão $r = -3$.

De acordo com a razão r, uma PA pode ser classificada em crescente, decrescente ou constante.

- **PA Crescente:** a razão r é positiva, ou seja, cada termo – a partir do segundo – é maior que o seu termo anterior.
  Exemplo: $(2, 4, 6, 8, 10, \cdots)$.

- **PA Decrescente:** a razão r é negativa, ou seja, cada termo – a partir do segundo – é menor que o termo anterior.
  Exemplo: $(12, 9, 6, 3, 0, \cdots)$.

- **PA Constante:** a razão r é nula, ou seja, todos os termos da PA são iguais.
  Exemplo: $(5, 5, 5, 5, 5, \cdots)$.

Termo Geral de uma Progressão Aritmética (a_n)

O termo geral de uma PA é o termo de ordem n da sequência. Portanto, para encontrar um determinado termo da PA (termo geral) utiliza-se a seguinte fórmula:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

Nessa fórmula, as incógnitas significam:
a_n: Termo geral.

a_1: Termo inicial.
n: Número de termos.
r: Razão.

Exemplo 1: Paula emprestou $R\$\,200,00$ para Patrícia com a condição do valor ser devolvido após três meses. Além disso, ao final de cada mês, seria acrescentado um valor de $R\$\,5,00$ ao débito de Patrícia. Quanto deverá ser pago a Paula após os três meses combinados?

Débito no momento do empréstimo	Débito ao final do primeiro mês	Débito ao final do segundo mês	Débito ao final do terceiro mês
200,00	$200{,}00 + 5{,}00$	$200{,}00 + 5{,}00 + 5{,}00$	$200{,}00 + 5{,}00 + 5{,}00 + 5{,}00$

Perceba que, por ser uma sequência de poucos termos, é possível determinar o valor final recebido por Paula sem a necessidade de aplicar a fórmula do termo geral. No entanto, caso precisássemos aplicar a fórmula, faríamos da seguinte maneira:

Primeiramente, identificarmos o valor inicial, o número de termos da PA e a razão dela.

$$a_1 = 200{,}00$$

$$n = 4$$

$$r = 5{,}00$$

Em seguida, substituímos na fórmula do termo geral $a_n = a_1 + (n-1)\cdot r$ os valores dados no exemplo.

$$a_4 = 200 + (4-1)\cdot 5 \;\Rightarrow\; a_4 = 200 + 15 \;\Rightarrow\; a_4 = 215 \text{ reais.}$$

Portanto, o valor pago a Paula após três meses será $R\$\,215{,}00$.

Exemplo 2: Seu João comprou um carro novo no valor de 100 mil reais. Sabendo que o carro foi comprado no ano de 1978 e que seu valor de venda diminui em $1300,00$ reais a cada ano, em relação ao valor de compra, quanto valerá o carro do seu João no ano de 2026?

Aplicando os mesmos passos do exemplo anterior, temos:

$$a_1 = 100.000$$

$$n = 49$$

$$r = -1.300$$

Em seguida, substituímos na fórmula do termo geral $a_n = a_1 + (n-1)\cdot r$ os valores dados no exemplo.

$$a_{49} = 100000 + (49-1)\cdot(-1300) \;\Rightarrow\; a_{49} = 100000 - 62400 \;\Rightarrow\; a_{49} = 37600 \text{ reais.}$$

Desse modo, em 2026, o carro de seu João valerá 37.600 reais.

Soma do Termos de uma Progressão Aritmética (S_n)

A soma dos termos de uma PA é obtida por meio da fórmula $S_n = \frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}$.

Exemplo 1: Após fazer o levantamento do número de produtos vendidos por mês nos últimos 2 anos, uma empresa percebeu que, de janeiro de 2023 a junho de 2024, o

número de produtos vendidos mensalmente obedecia a uma progressão aritmética. Sabendo que em janeiro de 2023 foram vendidos 100 produtos e em fevereiro de 2023 foram vendidos 130 produtos, quantos produtos a empresa vendeu de janeiro de 2023 a junho de 2024?

O primeiro passo para encontrarmos o número de produtos vendidos pela empresa é determinarmos os valores de a_1, a_n e n. Dessa maneira, $a_1 = 100$ e $n = 18$.

Para determinar o termo 18, utilizamos a fórmula do termo geral $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$, logo

$$a_{18} = 100 + (18-1) \cdot 30 \Rightarrow a_{18} = 100 + 510 \Rightarrow a_{18} = 610 \text{ produtos.}$$

A seguir, substituímos os valores encontrados na fórmula da soma dos termos de uma PA:

$$S_n = \frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2} \Rightarrow S_{18} = \frac{(100+610)\cdot 18}{2} \Rightarrow S_{18} = \frac{710\cdot 18}{2} \Rightarrow S_{18} = 6390 \text{ produtos.}$$

Portanto, a empresa vendeu 6.390 produtos de janeiro de 2023 a junho de 2024.

Exemplo 2: A fim de melhorar seu condicionamento físico, Míuria decidiu correr todos os dias, durante 30 dias. No $1°$ dia, correu uma distância de $1\ km$, no $2°$ dia $1,4\ km$, no $3°$ dia $1,8\ km$ e assim sucessivamente até o $30°$ dia. Quantos quilômetros Míuria correu ao longo desses 30 dias?

Seguindo os mesmos passos do exemplo anterior, temos $a_1 = 1$ e $n = 30$. Para determinar o termo 30, utilizamos a fórmula do termo geral $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$, logo

$$a_{30} = 1 + (30-1) \cdot 0{,}4 \Rightarrow a_{30} = 1 + 11{,}6 \Rightarrow a_{30} = 12{,}6\ km.$$

A seguir, substituímos os valores encontrados na fórmula da soma dos termos de uma PA

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2} \Rightarrow S_{30} = \frac{(1+12{,}6)\cdot 30}{2} \Rightarrow S_{30} = \frac{13{,}6 \cdot 30}{2} \Rightarrow S_{30} = 204\ km.$$

Desse modo, Míuria correu $204\ km$ ao longo dos trinta dias.

Exercícios

01 - (Fac. Cesgranrio RJ/2018) O mercado brasileiro de chocolates está em expansão, mas o consumo anual per capta ainda é pequeno, se comparado a alguns países europeus. Em 2018, estima- se que, na Alemanha, o consumo anual per capta seja de 12,0 kg e, no Brasil, de 2,5 kg.

Se, a partir de 2018, o consumo anual per capta dos brasileiros aumentar 0,5 kg por ano, em que ano este corresponderá à metade do consumo per capta dos alemães estimado para 2018?

a) 2021
b) 2025
c) 2028
d) 2032
e) 2036

02 - (ENEM MEC/2018) A prefeitura de um pequeno município do interior decide colocar postes para iluminação ao longo de uma estrada retilínea, que inicia em uma praça central e termina numa fazenda na zona rural. Como a praça já possui iluminação, o primeiro poste será colocado a 80 metros da praça, o segundo, a 100 metros, o terceiro, a 120 metros, e assim sucessivamente, mantendo-se sempre uma distância de vinte metros entre os postes, até que o último poste seja colocado a uma distância de 1 380 metros da praça.

Se a prefeitura pode pagar, no máximo, R$ 8 000,00 por poste colocado, o maior valor que poderá gastar com a colocação desses postes é

a) R$ 512 000,00.
b) R$ 520 000,00.
c) R$ 528 000,00.
d) R$ 552 000,00.
e) R$ 584 000,00.

03 - (Unifor CE/2018) Uma empresa da indústria de calçados localizada na região norte do estado do Ceará, em processo de restauração, propôs a seus funcionários uma indenização financeira para os que pedissem demissão, que variava em função do número de anos trabalhados. A tabela abaixo era utilizada para calcular o valor (i) da indenização, em função do tempo trabalhado (t).

Tempo trabalhado (em anos)	Valor da indenização (em reais)
1	470
2	1070
3	1670
4	2270

Baseado na tabela acima, podemos afirmar que um funcionário com 16 anos de trabalho nessa empresa receberia uma indenização em reais de:

a) 6.950
b) 7.520
c) 7.850
d) 8.100
e) 8.500

04 - (UEFS BA/2018) Uma progressão aritmética (PA) possui 17 termos, todos positivos. A diferença entre o maior termo (a_{17}) e o menor termo (a_1) dessa PA é igual a 48. Sabendo que, dentre os números primos que ocorrem nessa PA, 13 é o menor e 43 é o maior, o valor de $a_1 + a_{17}$ é

a) 59.
b) 62.
c) 65.
d) 68.
e) 71.

05 - (Unemat MT/2018) O vigésimo termo de uma progressão aritmética de números inteiros é o número 35, e o quinquagésimo primeiro termo desta sequência é o número 97.

Assinale a alternativa que equivale ao primeiro termo desta sequência.

a) –3
b) –1
c) 0
d) 4
e) 7

06 - (ESPM SP/2018) Em uma progressão aritmética (PA), sabe-se que o primeiro termo e o segundo termo são -2^{-2} e $(-2)^{-3}$, respectivamente. Podemos afirmar que o nono termo dessa PA é:

a) $-\frac{11}{4}$
b) $-\frac{1}{2}$
c) $\frac{2}{3}$
d) $\frac{3}{4}$
e) $\frac{5}{8}$

07 - (FGV /2018) Uma indústria colocou em produção um determinado produto X, de tal forma que, até o 10º mês, houve um aumento constante no número de unidades mensais produzidas, quando então a produção mensal se estabilizou. A soma das produções do 3º e do 5º mês foi de 50 unidades e a produção do 9º mês foi o dobro da produção do 4º mês. É possível concluir que

a) a produção do 1º mês foi de 5 unidades.
b) a produção do 7º mês foi de 50 unidades.
c) no 10º mês a produção foi de 150 unidades.
d) ao fim de cinco meses de produção a indústria já tinha produzido um total de 100 unidades.
e) o aumento mensal do número de unidades produzidas até o 10º mês foi de 10 unidades.

08 - (FGV /2019) Pensando em sua futura poupança, Roberto decidiu, no final de janeiro de 2018, investir no mercado de ações, adquirindo 100 ações da empresa VP. Seu plano foi, em cada um dos finais dos próximos 59 meses, comprar duas ações da mesma empresa a mais do que comprou no mês anterior.

Logo após sua última compra, a ser feita no final de dezembro de 2022, seu investimento resultará em um total de N ações.

Supondo que no período considerado não haja proventos que resultem em aumento no número de ações, pode-se afirmar que N é igual a:

a) 9 440
b) 9 640
c) 9 240
d) 9 540
e) 9 340

09 - (OBMEP/2019) Qual é a diferença entre a soma dos números ímpares e a soma dos números pares de 1 a 2019?

a) 1000
b) 1002
c) 1008
d) 1009
e) 1010

10 - (ENEM MEC/2019) Em uma corrida de regularidade, cada corredor recebe um mapa com o trajeto a ser seguido e uma tabela indicando intervalos de tempo e distâncias entre postos de averiguação. O objetivo dos competidores é passar por cada um dos postos de averiguação o mais próximo possível do tempo estabelecido na tabela. Suponha que o tempo previsto para percorrer a distância entre dois postos de verificação consecutivos seja sempre de 5 min 15 s, e que um corredor obteve os seguintes tempos nos quatro primeiros postos.

	1º posto	2º posto	3º posto
Tempo previsto	5 min 15 s	10 min 30 s	15 min 45 s
Tempo obtido pelo corredor	5 min 27 s	10 min 54 s	16 min 21 s

	4º posto	...	Último posto (final do trajeto)
Tempo previsto	21 min 00 s	...	1 h 55 min 30 s
Tempo obtido pelo corredor	21 min 48 s	...	

Caso esse corredor consiga manter o mesmo ritmo, seu tempo total de corrida será

a) 1 h 55 min 42 s.
b) 1 h 56 min 30 s.
c) 1 h 59 min 54 s.
d) 2 h 05 min 09 s.
e) 2 h 05 min 21 s.

11 - (Acafe SC/2019) O proprietário de um cinema está organizando as poltronas para um evento especial. Para atender a demanda desse evento, serão necessárias 540 poltronas.
Em função da estrutura da apresentação do evento, foi solicitado que as poltronas fossem distribuídas da seguinte forma: 8 poltronas na primeira fila, 12 poltronas na segunda fila, 16 na terceira fila, e assim por diante.

Com base nessas informações, é **correto** afirmar:

a) A soma das poltronas da primeira e oitava filas é diferente do número de poltronas da décima fila.
b) Seguindo a distribuição solicitada, a décima fila terá mais de 44 poltronas.
c) Serão necessárias 20 filas para organizar as 540 poltronas de acordo com a solicitação do evento.

d) Seguindo a distribuição solicitada, a última fila será composta de 64 poltronas.

12 - (UFT TO/2019) Um atleta fez um plano pessoal de treino de corrida para treze dias consecutivos. O planejamento consiste em, a cada dia, correr meio quilômetro a mais do que a distância percorrida no dia anterior. Sabendo-se que no primeiro dia ele correu quatro quilômetros, é CORRETO afirmar que, ao final do plano de treinamento, o atleta correu, em quilômetros, um total de:

a) 10
b) 50
c) 91
d) 182

13 - (UEG GO/2019) Uma concessionária vende um carro financiado em dois anos, e as parcelas mensais serão da seguinte maneira: a primeira parcela será de R$ 1.000,00, e as demais decrescerão R$ 20,00 ao mês. Ao final do financiamento esse carro terá custado ao comprador

a) R$ 18.480,00
b) R$ 18.240,00
c) R$ 18.000,00
d) R$ 17.760,00
e) R$ 17.520,00

14 - (Mackenzie SP/2019) Se 1+4+7+10+..+N = 925, então o valor de N é igual a

a) 69
b) 71
c) 73
d) 75
e) 77

15 - (UECE/2019) Considere a soma dos números inteiros ímpares positivos agrupados do seguinte modo:

$$1 + (3+5) + (7 + 9 + 11) + (13 + 15 + 17 + 19) + (21 + 23 + 25 + 27 + 29) + \cdots\cdots$$

O grupo de ordem n é formado pela soma de n inteiros positivos ímpares e consecutivos. Assim, pode-se afirmar corretamente que a soma dos números que compõem o décimo primeiro grupo é igual a

a) 1223.
b) 1331.
c) 1113.
d) 1431.

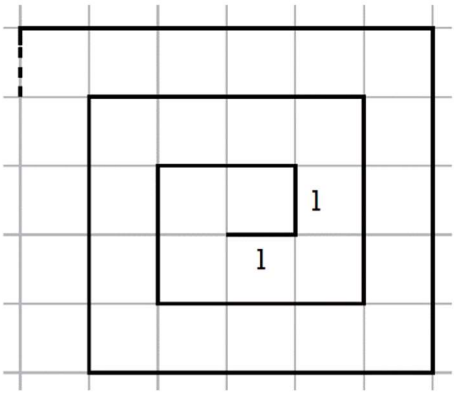
16 - (UECE/2020) Para cada número inteiro positivo n, as linhas do quadro abaixo são definidas segundo a estrutura lógica que segue:

L_1 1
L_2 1, 2
L_3 1, 2, 3
L_4 1, 2, 3, 4
.....
.....
L_n 1, 2, 3,....., n
.....

A soma dos números que compõem a linha L_{2020} é igual a

a) 2 041 210.
b) 2 441 120.
c) 2 121 020.
d) 2 241 210.

17 - (ESPM SP/2020) Uma espiral poligonal é formada por 50 segmentos de reta consecutivos cujos comprimentos variam como mostra a figura abaixo. Se cada quadrinho da malha mede 1cm × 1cm, o comprimento total dessa espiral é igual a:

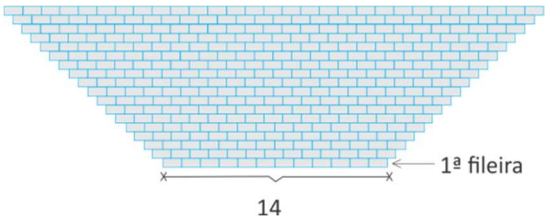


a) 7,0 m
b) 6,25 m
c) 7,5 m
d) 6,5 m
e) 7,25 m

18 - (PUC RS/2021) Na virada do ano de 2019 para 2020, um casal resolve iniciar uma conta corrente conjunta para realizar a tão sonhada viagem de 20 dias pela Europa. Para isso, os dois combinaram que cada um deveria depositar semanalmente uma certa quantia, iniciando com R$ 15,00, na primeira semana, e aumentando R$ 15,00, a cada semana, ou seja, depositando R$ 30,00 na segunda semana, R$ 45,00 na terceira e assim por diante. Considerando que o ano de 2020 tem 53 semanas, a quantia que cada um deverá depositar na última semana será de _____ e o saldo que o casal conseguirá juntar até o último dia de 2020 será _____.

a) R$ 780,00; R$ 20.670,00
b) R$ 780,00; R$ 42.900,00
c) R$ 795,00; R$ 21.465,00
d) R$ 795,00; R$ 42.930,00

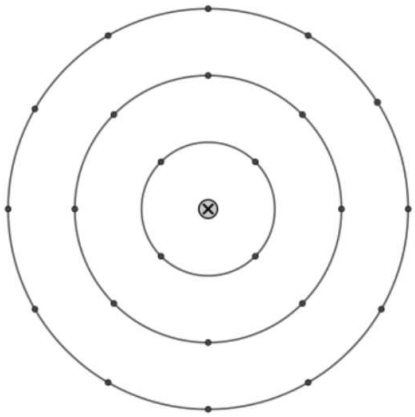
19 - (UCB DF/2021)



Um pátio de tijolos tem a forma de um trapézio, conforme a figura apresentada. O pátio tem 18 fileiras de tijolos, e cada tijolo de uma fileira, a partir da segunda, está encostado em dois tijolos da fileira seguinte. A primeira linha possui 14 tijolos e a 18ª linha possui 31 tijolos. Quantos tijolos existem no pátio?

a) 400
b) 410
c) 405
d) 415
e) 420

20 - (UFT TO/2023) Uma agricultora vai fazer um plantio circular de jiló, conforme imagem a seguir:



A agricultora instalou no centro do canteiro um aspersor (equipamento de irrigação) giratório. As linhas de plantio são circunferências concêntricas ao ponto onde está localizado o aspersor. Na primeira linha de plantio a agricultora plantou 4 pés de jiló, na segunda plantou 8 pés, na terceira plantou 12 e assim sucessivamente até o limite máximo de alcance do aspersor, que é um raio de 10 metros.

Conforme ilustrado na imagem, neste sistema de plantio, a primeira linha de plantio é uma circunferência com um metro de raio, a segunda tem dois metros de raio, a terceira tem 3 metros de raio e assim sucessivamente.

Com base nessas informações, é **CORRETO** afirmar que a quantidade de pés de jilós que podem ser plantados dentro do alcance do aspersor é:

a) 40
b) 80
c) 110

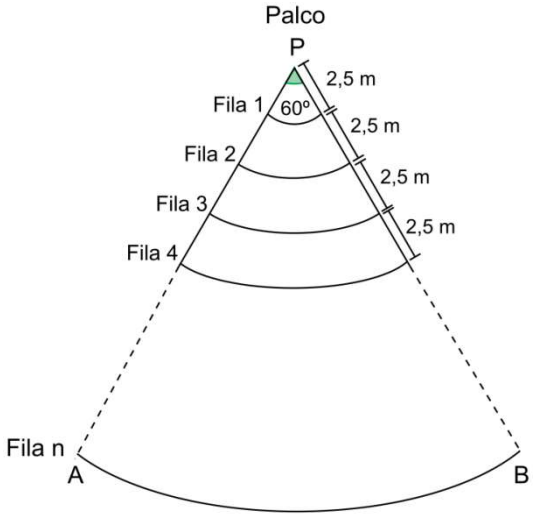
d) 220

21 - (UFU MG/2023) Um desenvolvedor de jogos virtuais está planejando um novo jogo. Nele, o personagem principal executará saltos ao longo de uma reta r até integralizar uma tarefa. Suponha que a reta r seja dada como gráfico da função polinomial y = p(x) = ax + b, cuja representação cartesiana é descrita a seguir, e que os pontos de coordenadas cartesianas A_n= (n, p(n)), n = 0, 1, 2, 3, ..., 32 representem as coordenadas da sequência das bases dos saltos executados.

A soma de todas as ordenadas dos pontos A_0, A_1, A_2, ..., A_{32} é igual a

a) 1600
b) 1650
c) 825
d) 1155

22 - (Famerp SP/2023) A figura representa as n filas de assentos de um teatro, com o palco em P. As filas estão igualmente espaçadas e são arcos de 60° de circunferência de centro P, sendo $\overset{\frown}{AB}$ o arco da n-ésima fila. Sabe-se, ainda, que a fila 1 tem 6 assentos, a fila 2 tem 10 assentos, a fila 3 tem 14 assentos, e assim sucessivamente em progressão aritmética até a n-ésima fila.



Se a área do teatro, correspondente ao setor circular de centro P e arco $\overset{\frown}{AB}$, é de 600 π m^2, sua capacidade máxima, em número de assentos, é igual a

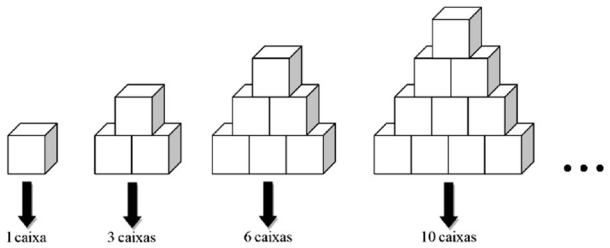
a) 1 440.
b) 2 112.
c) 1 760.
d) 2 496.
e) 1 248.

23 - (Fuvest SP/2023) Joana comprou um celular e dividiu o pagamento em 24 parcelas mensais que formam uma progressão aritmética crescente. As três primeiras parcelas foram de R$ 120,00, R$ 126,00 e R$ 132,00. Sabendo que, ao final, constatou-se que Joana não pagou a 19ª parcela, o valor pago por ela foi:

a) R$ 3.954,00

b) R$ 4.026,00
c) R$ 4.200,00
d) R$ 4.308,00
e) R$ 4.382,00

24 - (Acafe SC/2018) Uma famosa rede de supermercados resolve fazer uma grande promoção de determinado produto. Para tanto, resolve organizar os produtos de maneira a formar pilhas em uma sequência, conforme indica a figura a seguir. Cada cubo, na figura, corresponde a um produto.



Pretende-se continuar construindo a sequência até a vigésima quarta pilha de produtos. Quantos produtos serão necessários para formar a última pilha de produtos dessa sequência?

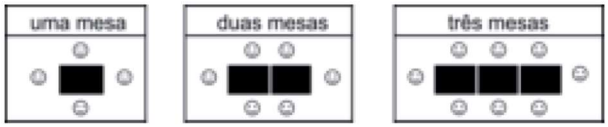
a) 360
b) 240
c) 320
d) 300

25 - (UESB BA/2019) Um trabalhador, com salário de R$4000,00, gastou R$3600,00 em janeiro de 2017. Com o aumento do custo de vida, seus gastos cresceram R$60,00 a cada mês, mas seu salário não teve reajuste. Toda sobra foi guardada em uma conta sem rendimentos, da qual ele retirou a diferença quando os gastos ultrapassaram o salário.

Ao todo, em 2017, ele economizou

01. R$840,00
02. R$900,00
03. R$960,00
04. R$1020,00
05. R$1180,00

26 - (Encceja/2019) Em uma pizzaria, o gerente organiza as mesas lado a lado, de acordo com a quantidade de pessoas no grupo. Observe algumas composições possíveis com uma, duas ou três mesas.



Para grupos com mais de oito pessoas, é possível acrescentar mais mesas, seguindo esse mesmo padrão. Um grupo de pessoas foi a uma pizzaria numa comemoração de fim de ano. Para acomodá-las foram necessárias 11 mesas dispostas lado a lado, não

sobrando nenhum lugar. Sabe-se que, nesse grupo, para cada 4 pessoas foi consumida uma pizza grande que custava R$ 20,00.

O valor, em real, referente ao consumo total de pizzas desse grupo foi de

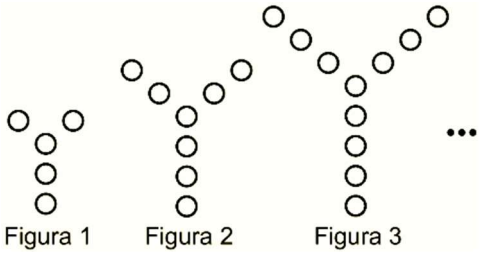
a) 55.
b) 80.
c) 120.
d) 220.

27 - (Encceja/2019) Um atleta participará de uma prova de ciclismo de 40 km. Para se preparar para essa prova, no primeiro dia de treinamento percorreu 16 km; no segundo dia, 20 km; no terceiro dia, 24 km; e, aumentando diariamente sempre a mesma quantidade de quilômetros, chegou a percorrer, no último dia de treinamento, um percurso de comprimento igual ao da extensão da prova de que irá participar.

Quantos dias durou esse programa de treinamento?

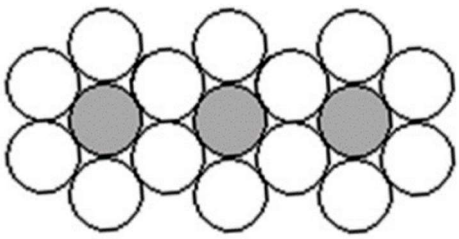
a) 3
b) 5
c) 6
d) 7

28 - (OBMEP/2019) Observe a sequência de figuras abaixo, todas elas com a forma da letra Y. Seguindo este padrão, quantas bolinhas terá a 15ª figura?



a) 35
b) 47
c) 50
d) 52
e) 60

29 - (EBMSP BA/2019) Um artesão fabrica adereços de contas em forma de flores, colocadas lado a lado, onde cada flor tem um miolo escuro cercado por seis contas circulares claras.



Sabendo-se que cada par de flores adjacentes tem duas pétalas em comum, como representado na figura, pode-se afirmar que utilizando 502 contas na confecção do adereço, ele será composto por um número máximo de flores igual a

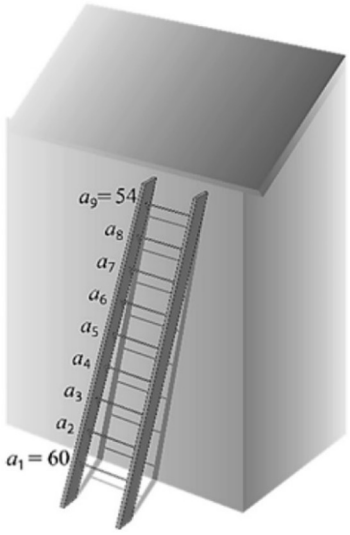
a) 100
b) 125
c) 150
d) 175
e) 200

30 - (Unic MT/2019) Uma pessoa submetida, durante quatro meses, a um regime alimentar para emagrecimento, perdeu mensalmente o mesmo peso durante o tratamento.

Sabendo-se que a soma de seu peso foi 250kg nos dois primeiros meses e de 130kg, nos dois últimos, ao fim do regime o peso da pessoa era

01. 30kg
02. 50kg
03. 70kg
04. 80kg
05. 100kg

31 - (UCB DF/2019)

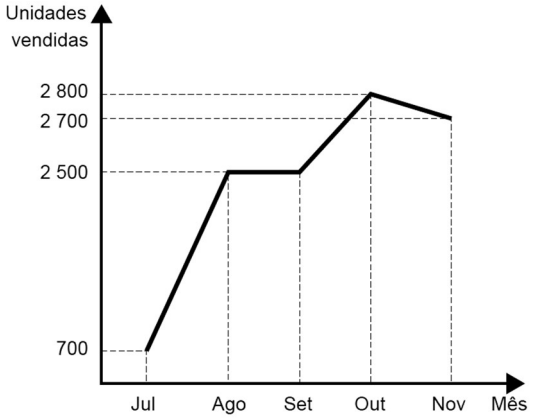


Um carpinteiro deseja construir uma escada com 9 degraus de modo que o primeiro degrau (a_1), na base da escada, tenha 60 cm de comprimento, e o último degrau (a_9), no topo da escada, tenha 54 cm de comprimento, e a diferença entre os comprimentos de dois degraus consecutivos quaisquer seja constante. Com base no exposto, é correto afirmar que a soma dos comprimentos do quinto (a_5) e do sexto (a_6) degraus corresponde a

a) 110 cm.
b) 113,25 cm.
c) 113,75 cm.
d) 114 cm.

e) 114,75 cm.

32 - (ENEM MEC/2019) O gráfico a seguir mostra a evolução mensal das vendas de certo produto de julho a novembro de 2011.



Sabe-se que o mês de julho foi o pior momento da empresa em 2011 e que o número de unidades vendidas desse produto em dezembro de 2011 foi igual à média aritmética do número de unidades vendidas nos meses de julho a novembro do mesmo ano.

O gerente de vendas disse, em uma reunião da diretoria, que, se essa redução no número de unidades vendidas de novembro para dezembro de 2011 se mantivesse constante nos meses subsequentes, as vendas só voltariam a ficar piores que julho de 2011 apenas no final de 2012.

O diretor financeiro rebateu imediatamente esse argumento mostrando que, mantida a tendência, isso aconteceria já em

a) janeiro.
b) fevereiro.
c) março.
d) abril.
e) maio.

33 - (ENEM MEC/2019) O *slogan* "Se beber não dirija", muito utilizado em campanhas publicitárias no Brasil, chama a atenção para o grave problema da ingestão de bebida alcoólica por motoristas e suas consequências para o trânsito. A gravidade desse problema pode ser percebida observando como o assunto é tratado pelo Código de Trânsito Brasileiro. Em 2013, a quantidade máxima de álcool permitida no sangue do condutor de um veículo, que já era pequena, foi reduzida, e o valor da multa para motoristas alcoolizados foi aumentado. Em consequência dessas mudanças, observou-se queda no número de acidentes registrados em uma suposta rodovia nos anos que se seguiram às mudanças implantadas em 2013, conforme dados no quadro.

Ano	2013	2014	2015
Número total de acidentes	1 050	900	850

Suponha que a tendência de redução no número de acidentes nessa rodovia para os anos subsequentes seja igual à redução absoluta observada de 2014 para 2015.

Com base na situação apresentada, o número de acidentes esperados nessa rodovia em 2018 foi de

a) 150.
b) 450.
c) 550.
d) 700.
e) 800.

34 - (IFAL/2019) Encontre o 2019° termo da progressão aritmética cujo o 1º termo é 2 e a razão é 4.

a) 8072
b) 8074
c) 8076
d) 8078
e) 8080

35 - (UnirG TO/2019) Uma empresa adquiriu um caminhão por 100 mil reais, que sofre depreciação de 10 mil reais por ano. Em quanto tempo o caminhão valerá 55 mil reais?

a) 3 anos e meio;
b) 4 anos e meio;
c) 5 anos e meio;
d) 6 anos e meio.

36 - (Uncisal AL/2019) A quantidade de consumidores que fazem compras pela internet tem aumentado consideravelmente nos últimos anos. Observe, na tabela a seguir, a quantidade de consumidores brasileiros que realizaram anualmente compras virtuais e os valores das vendas *on-line* no período de 2012 a 2014.

ano	quantidade de consumidores que compram pela internet (em milhões)	vendas *on-line* de bens de consumo (em bilhões de reais)
2012	42	22
2013	52	29
2014	62	36

Disponível em: www.ecommercebrasil.com.br.
Acesso em: 8 nov. 2018 (adaptado).

Se, a partir de 2014, o crescimento anual observado entre 2012 e 2014 para a variação anual da quantidade de consumidores e para o volume de vendas se mantiverem, então, em 2020, cada consumidor que fizer compras *on-line* gastará nesse tipo de comércio, em média,

a) menos de R$ 600,00.
b) mais de R$ 600,00 e menos de R$ 1 000,00.
c) mais de R$ 1 000,00 e menos de R$ 1 400,00.
d) mais de R$ 1 400,00 e menos de R$ 1 800,00.
e) mais de R$ 1 800,00.

37 - (UECE/2019) A quantidade de números inteiros positivos, localizados entre 10 e 2020, que são múltiplos de 11 é

a) 184.
b) 183.
c) 182.
d) 181.

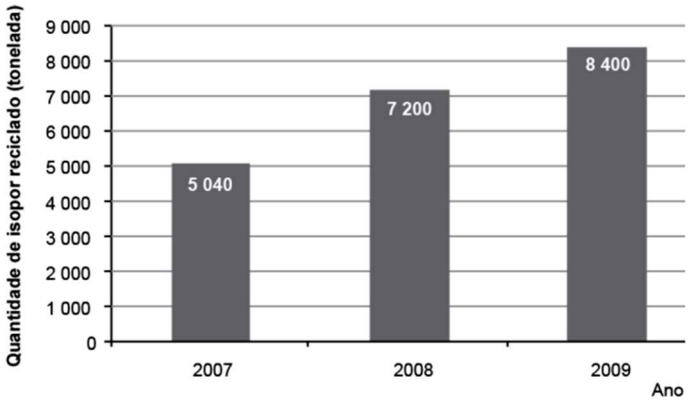
38 - (UEA AM/2020) Um lojista abriu sua primeira loja. Dois anos depois, inaugurou sua segunda loja e, dois anos após essa inauguração, abriu sua terceira loja, procedendo sempre da mesma maneira até chegar à oitava e última loja. Ou seja, todas as lojas foram inauguradas observando-se sempre o mesmo intervalo de tempo, de exatos dois anos, entre cada inauguração. Hoje, o tempo de atividade da primeira loja é igual ao quíntuplo do tempo de atividade da oitava loja. Desse modo, hoje, o tempo de atividade da oitava loja é de

a) 2 anos.
b) 2,5 anos.
c) 3,5 anos.
d) 4 anos.
e) 3 anos.

39 - (Uniube MG/2020) Em uma progressão aritmética (PA) de razão r = 4, a média aritmética simples dos 20 primeiros termos é igual a 31. O menor termo positivo dessa PA é

a) 1.
b) 4.
c) 3.
d) 5.
e) 2.

40 - (ENEM MEC/2020) O isopor é um material composto por um polímero chamado poliestireno. Todos os produtos de isopor são 100% recicláveis, assim como os plásticos em sua totalidade. O gráfico mostra a quantidade de isopor, em tonelada, que foi reciclada no Brasil nos anos de 2007, 2008 e 2009. Considere que o aumento da quantidade de isopor reciclado ocorrida de 2008 para 2009 repita-se ano a ano de 2009 até 2013 e, a partir daí, a quantidade total reciclada anualmente permaneça inalterada por um período de 10 anos.



Disponível em: www.plastivida.org.br. Acesso em: 31 jul. 2012 (adaptado).

Qual é a quantidade prevista para reciclagem de isopor, em tonelada, para o ano de 2020?

a) 21 840
b) 21 600
c) 13 440
d) 13 200
e) 9 800

41 - (ENEM MEC/2020) No Brasil, o tempo necessário para um estudante realizar sua formação até a diplomação em um curso superior, considerando os 9 anos de ensino fundamental, os 3 anos do ensino médio e os 4 anos de graduação (tempo médio), é de 16 anos. No entanto, a realidade dos brasileiros mostra que o tempo médio de estudo de pessoas acima de 14 anos é ainda muito pequeno, conforme apresentado na tabela.

Tempo médio de estudo de pessoas acima de 14 anos

Ano da Pesquisa	1995	1999	2003	2007
Tempo de estudo (em ano)	5,2	5,8	6,4	7,0

Disponível em: www.ibge.gov.br. Acesso em: 19 dez. 2012 (adaptado).

Considere que o incremento no tempo de estudo, a cada período, para essas pessoas, se mantenha constante até o ano 2050, e que se pretenda chegar ao patamar de 70% do tempo necessário à obtenção do curso superior dado anteriormente.

O ano em que o tempo médio de estudo de pessoas acima de 14 anos atingirá o percentual pretendido será

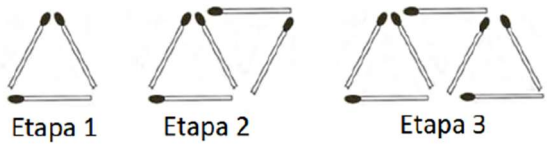
a) 2018.
b) 2023.
c) 2031.
d) 2035.
e) 2043.

42 - (Unifor CE/2020) Após recuperar-se de uma cirurgia, o treinador da corredora Andrea estipulou um plano de treinamento diário: correr 500 metros no primeiro dia e aumentar 200 metros por dia, a partir do segundo, até que ela atinja 10 km. Andrea pretende correr 10 km na maratona do Rio de Janeiro, no início do próximo ano.

Em quantos dias de treinamento Andrea atingirá 10 km?

a) 35
b) 39
c) 43
d) 49
e) 52

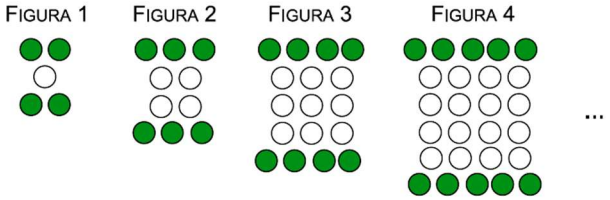
43 - (UFRGS RS/2020) Considere o padrão de construção de triângulos com palitos, representado nas figuras abaixo.



Na etapa n, serão utilizados 245 palitos. Nessas condições, n é igual a

a) 120.
b) 121.
c) 122.
d) 123.
e) 124.

44 - (Famerp SP/2020) Observe o padrão da sequência de figuras.



Mantido o padrão, a figura que terá a quantidade de bolas brancas superando a de bolas verdes em 286 será a de número

a) 13.
b) 18.
c) 14.
d) 16.
e) 21.

45 - (Unicamp SP/2020) Considere que (a, b, 3, c) é uma progressão aritmética de números reais, e que a soma de seus elementos é igual a 8. O produto dos elementos dessa progressão é igual a

a) 30.
b) 10.
c) −15.
d) −20.

46 - (EPCAR EA/2021) A organização de um festival de *Rock n'Roll* decidiu que os ingressos seriam disponibilizados para venda em quantidades sequencialmente estabelecidas.
No 1º dia, foram vendidas 30 caixas com 400 ingressos em cada uma.
Do 2º dia de venda em diante, foram disponibilizadas 3 caixas a mais em cada dia, porém, em cada caixa, do total de caixas do dia, havia 10 ingressos a menos.
O quadro apresenta a sequência até o 4º dia.

Dia de venda	Quantidade de caixas	Quantidade de ingressos por caixa
1º	30	400
2º	33	390
3º	36	380
4º	39	370

A disponibilização diária de ingressos para venda seguiu a sequência acima até o 38º dia, último dia de vendas. Dia a dia, o total de ingressos disponibilizados era integralmente vendido a R$ 50,00, cada unidade.

Sendo assim, o maior valor apurado em um único dia de venda dos ingressos foi, em reais, de

a) 924 000
b) 931 500
c) 937 500
d) 938 100

47 - (Famema SP/2021) A tabela apresenta o padrão de uma sequência numérica da linha 1 até a linha x. Admita que o padrão de formação da tabela não se modifique.

Linha 1			0,1	0,2		
Linha 2		0,3	0,4	0,5		
Linha 3	0,6	0,7	0,8	0,9		
Linha 4	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	
⋮	⋰		…		⋱	
Linha x	63,0		…			66,5

Sabendo que 63,0 é o primeiro número da linha x e que 66,5 é o último, x é igual a

a) 36.
b) 34.
c) 35.
d) 37.
e) 33.

48 - (Fac. Cesgranrio RJ/2022) Se o décimo termo de uma progressão aritmética de razão 12 é 2.424, qual é o primeiro termo dessa progressão?

a) 2.184
b) 2.208

c) 2.304
d) 2.316
e) 2.318

49 - (ENEM MEC/2022) Foram convidadas 32 equipes para um torneio de futebol, que foram divididas em 8 grupos com 4 equipes, sendo que, dentro de um grupo, cada equipe disputa uma única partida contra cada uma das demais equipes de seu grupo. A primeira e a segunda colocadas de cada grupo seguem para realizar as 8 partidas da próxima fase do torneio, chamada oitavas de final. Os vencedores das partidas das oitavas de final seguem para jogar as 4 partidas das quartas de final. Os vencedores das quartas de final disputam as 2 partidas das semifinais, e os vencedores avançam para a grande final, que define a campeã do torneio.

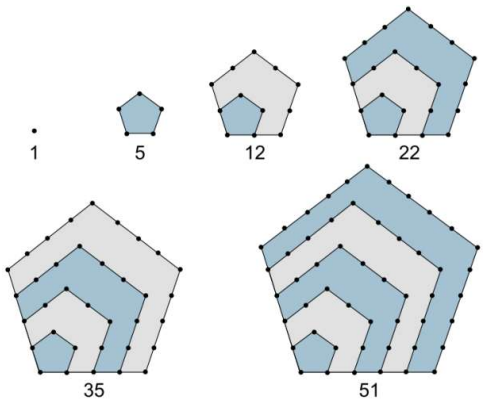
Pelas regras do torneio, cada equipe deve ter um período de descanso de, no mínimo, 3 dias entre dois jogos por ela disputados, ou seja, se um time disputar uma partida, por exemplo, num domingo, só poderá disputar a partida seguinte a partir da quinta-feira da mesma semana.
O número mínimo de dias necessários para a realização desse torneio é

a) 22.
b) 25.
c) 28.
d) 48.
e) 64.

50 - (FMJ SP/2023) Uma progressão aritmética (PA) crescente possui 30 termos e a soma dos 3 menores termos é igual a 18. Se o maior termo é 30 vezes maior que o menor termo, a razão dessa PA é

a) 4.
b) 6.
c) 3.
d) 5.
e) 2.

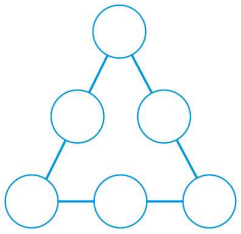
51 - (ENEM MEC/2023) Os números figurados pentagonais provavelmente foram introduzidos pelos pitagóricos por volta do século V a.C. As figuras ilustram como obter os seis primeiros deles, sendo os demais obtidos seguindo o mesmo padrão geométrico.



O oitavo número pentagonal é

a) 59.
b) 83.
c) 86.
d) 89.
e) 92.

52 - (ENEM MEC/2023) O triângulo da figura é denominado triângulo mágico. Nos círculos, escrevem-se os números de 1 a 6, sem repetição, com um número em cada círculo. O objetivo é distribuir os números de forma que as somas dos números em cada lado do triângulo sejam iguais.



Considere que os números colocados nos vértices do triângulo estejam em progressão aritmética de razão igual a 2.

Nas condições propostas, quais as possíveis soluções para as somas dos números que formam os lados do triângulo?

a) Há somente uma solução possível, e as somas em cada lado do triângulo são iguais a 7.
b) Há somente uma solução possível, e as somas em cada lado do triângulo são iguais a 9.
c) Há somente duas soluções possíveis, uma em que as somas em cada lado do triângulo são iguais a 7 e outra em que as somas são iguais a 9.
d) Há somente duas soluções possíveis, uma em que as somas em cada lado do triângulo são iguais a 9 e outra em que as somas são iguais a 12.
e) Há somente duas soluções possíveis, uma em que as somas em cada lado do triângulo são iguais a 10 e outra em que as somas são iguais a 11.

53 - (Fac. Medicina de Petrópolis RJ/2023) Uma progressão aritmética, cujos termos são representados por a_n, $n \geq 1$, é tal que $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 35$.

O termo a_3 dessa progressão aritmética é igual a

a) 3
b) 5
c) 7
d) 15
e) 35

54 - (Unicamp SP/2023) Três números reais distintos a, b, c são tais que a, b, c e ab, bc, ca formam, nessas ordens, duas progressões aritméticas de mesma razão. O valor do produto abc é

a) 1.
b) 1/8.
c) −1.
d) 6.

55 - (UEG GO/2024) Realizou-se uma pesquisa de preço em cinco estabelecimentos comerciais, obtendo-se cinco preços diferentes de um determinado produto. Quando colocados em ordem crescente, os preços formam uma progressão aritmética. Sabendo que o maior preço é R$ 16,00 e que a média dos preços do produto é igual a R$ 12,00, a diferença entre os dois menores preços representa qual porcentagem do menor preço?

a) 45%
b) 35%
c) 25%
d) 15%
e) 55%

56 - (Fuvest SP/2024) Números figurados são números que expressam o total de pontos em certas configurações geométricas. Um exemplo de números figurados são os triangulares, os quais são números naturais que podem ser representados geometricamente na forma de um triângulo. Os quatro primeiros números triangulares estão ilustrados na figura I. Apesar de o número 1 não representar um triângulo, ele é considerado um número triangular.

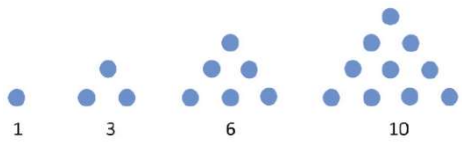


Figura I

Outro exemplo de número figurado é o número oblongo, o qual representa o total de pontos de um quadro retangular em que o número de colunas é uma unidade a mais do que o número de linhas. Os quatro primeiros números oblongos estão ilustrados na figura II. Apesar de o número 2 não representar um quadro retangular, ele é considerado um número oblongo.

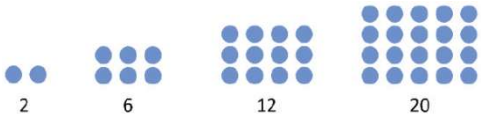


Figura II

A respeito de números triangulares e números oblongos, assinale a alternativa correta.

a) 162 é o 15º número triangular.
b) O 13º número triangular é primo e o 30º número oblongo é ímpar.
c) 156 não é um número oblongo, nem triangular.
d) 210 é um número triangular e oblongo.
e) A diferença entre dois números triangulares consecutivos são termos de uma progressão geométrica.

57 - (FGV /2024) Marcelo teve uma crise de soluços. O primeiro soluço de Marcelo ocorreu exatamente às 13h50min, e ele soluçou regularmente a cada 6 segundos durante mais de uma hora.

O 224º soluço de Marcelo durante essa crise ocorreu exatamente às

a) 14h12min18s
b) 14h02min30s
c) 14h22min18s
d) 14h12min24s
e) 14h22min24s

Progressão Geométrica (PG)

Definição

Uma progressão geométrica (PG) é uma sequência de números em que o quociente da divisão de cada termo pelo termo anterior é constante. Essa constante é conhecida como razão da progressão e é simbolizada pela letra q.

São exemplos de progressões geométricas:
Exemplo 1: $(\mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{9}, \mathbf{27}, \mathbf{81}, \cdots)$.
PG com $q = 3$.

Exemplo 2: $\left(\mathbf{36}, \mathbf{18}, \mathbf{9}, \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{2}}, \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{4}}, \cdots\right)$.
PG com $q = \frac{1}{2}$.

Exemplo 3: $(\mathbf{2}, -\mathbf{4}, \mathbf{8}, -\mathbf{16}, \cdots)$.
PG com $q = -2$.

Exemplo 4: $\left(\mathbf{7}, \frac{\mathbf{35}}{\mathbf{4}}, \frac{\mathbf{175}}{\mathbf{16}}, \cdots\right)$.
PG com $q = \frac{5}{4}$.

Exemplo 5: $(\mathbf{5}, \mathbf{5}, \mathbf{5}, \mathbf{5}, \cdots)$.
PG com $q = 1$.

Termo Geral de uma Progressão Geométrica

O termo geral de uma PG é o termo de ordem n da sequência. Portanto, para encontrar um determinado termo da PG (termo geral) utiliza-se a seguinte fórmula:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Nessa fórmula, as incógnitas significam:
a_n: Termo geral.
a_1: Termo inicial.
n: Número de termos.
q: Razão.

Exemplo 1: Raquel pretende se preparar para o vestibular e, para isso, começou a resolver questões de vestibulares de anos anteriores. Durante uma tarde de estudos, Raquel se depara com a seguinte sequência: $\left(\frac{1}{2}, -1, 2, -4, 8, \cdots\right)$. A questão pergunta qual o décimo primeiro termo dessa sequência. Desse modo, qual deverá ser a resposta de Raquel?

O primeiro passo é analisarmos se a sequência é uma PG.

Para saber se a sequência é uma PG basta dividirmos cada termo pelo seu termo anterior. Se os resultados dessas divisões forem iguais, a sequência é uma PG. Desse modo:

$$\frac{-1}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{-1} = \frac{-4}{2} = -2.$$

Confirmado que se trata de uma PG, procuramos os valores de a_1, q e n. Logo, observamos que

$$a_1 = \frac{1}{2},\ q = -2 \text{ e } n = 11.$$

Em seguida substituímos os valores encontrados na fórmula do termo geral de uma PG, $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$. Logo,

$$a_{20} = \frac{1}{2}.(-2)^{11-1} \Rightarrow a_{20} = \frac{1}{2}.1024 \Rightarrow a_{20} = 512.$$

Portanto, a resposta de Raquel para a questão é 512.

Exemplo 2: Uma companhia aérea lucrou 240 mil reais no ano de 2023. Sabendo que, a cada ano, espera-se um aumento no lucro de 10% em relação ao ano anterior, quanto a companhia lucrará em 2027?

Identificamos $a_1 = 240000$, $q = 1{,}10$ e $n = 5$.

Substituindo os valores na fórmula do termo geral $a_n = a_1.q^{n-1}$, temos:

$$a_5 = 240000 \cdot (1{,}10)^{5-1} \Rightarrow a_5 = 240000 \cdot 1{,}4641 \Rightarrow a_5 = 351384 \text{ reais.}$$

Portanto, a companhia lucrará em 2027 será de 351.384 reais.

Soma dos Termos de uma Progressão Geométrica

- **Soma dos Finitos Termos de uma PG**

A soma dos finitos termos de uma PG de razão $q \neq 1$ é obtida por meio da fórmula $S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q-1}$.

Exemplo 1: Gil e mais dois amigos criaram um site de apostas online. Sabendo que, no primeiro mês, 500 pessoas acessaram o site e que, a cada mês, o número de acessos crescia em 20% em relação ao mês anterior, quantas pessoas acessaram o site nos primeiros três meses?

Analisando o enunciado do problema, encontramos $a_1 = 500$ e $q = 1{,}2$. Substituindo os valores na fórmula da soma dos termos de uma PG $S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q-1}$, temos:

$$S_3 = \frac{500 \cdot (1{,}2^3 - 1)}{1{,}2 - 1} \Rightarrow S_3 = \frac{500 \cdot (1{,}728 - 1)}{0{,}2} \Rightarrow S_3 = \frac{500 \cdot 0{,}728}{0{,}2} \Rightarrow S_3 = 1820 \text{ pessoas.}$$

Portanto, 1.820 pessoas acessaram o site nos primeiros três meses.

Exemplo 2: Qual a soma dos dez primeiros termos de uma PG com $a_1 = 12$ e $a_5 = 972$?

Como a razão da PG não foi dada no enunciado da questão, devemos encontrá-la por meio da fórmula do termo geral de uma PG. Assim:

$$a_n = a_1.q^{n-1} \Rightarrow 972 = 12 \cdot q^{5-1} \Rightarrow q^4 = \frac{972}{12} \Rightarrow q^4 = 81 \Rightarrow q = 3.$$

Em seguida, aplicamos a fórmula da soma dos termos de uma PG: $S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q-1}$, logo

$$S_{10} = \frac{12 \cdot (3^{10} - 1)}{3 - 1} \Rightarrow S_{10} = \frac{12 \cdot (59049 - 1)}{3 - 1} \Rightarrow S_{10} = \frac{12 \cdot 59048}{2} \Rightarrow S_{10} = 354294.$$

Assim, a soma dos dez primeiros termos dessa PG é igual a 354.294.

- **Soma dos Infinitos Termos de uma PG**

A soma dos infinitos termos de uma PG de razão $q < 1$ é obtida por meio da fórmula $S_{n\to\infty} = \frac{a_1}{1-q}$.

Exemplo 1: Ao folhear um livro de matemática, Natália vê cinco termos de uma PG com $a_1 = 8$ e $q = \frac{1}{3}$. Qual é a soma dos infinitos termos dessa PG?

Substituindo os valores na fórmula da soma dos infinitos termos de uma PG, temos:

$$S_{n\to\infty} = \frac{a_1}{1-q} \Rightarrow S_{n\to\infty} = \frac{8}{1-\frac{1}{3}} \Rightarrow S_{n\to\infty} = \frac{8}{\frac{2}{3}} \Rightarrow S_{n\to\infty} = 12.$$

Portanto, a soma seria igual a 12.

Exemplo 2: Para passar o tempo, Júlia pegou uma garrafa vazia de $1L$ de capacidade e resolveu enchê-la de maneira diferente. Primeiro, colocou na garrafa $300\ m$L de água. Depois, adicionou $150\ mL$ de água e continuou o processo de enchimento da garrafa sempre colocando a metade do valor de água adicionado anteriormente. Sabendo que as quantidades de água adicionadas à garrafa por Júlia formam uma progressão geométrica de razão $q = \frac{1}{2}$, e, considerando que esse processo será realizado infinitas vezes, qual o volume final (em litros) de água dentro da garrafa?

Supondo que o problema ocorre infinitamente, vamos utilizar a soma dos infinitos termos de uma PG, sabendo que a razão $q = \frac{1}{2}$, temos:

$$S_{n\to\infty} = \frac{300}{1-\frac{1}{2}} \Rightarrow S_{n\to\infty} = \frac{300}{\frac{1}{2}} \Rightarrow S_{n\to\infty} = 600\ mL = 0{,}6\ L.$$

Portanto, o volume final será de 0,6 L.

Exercícios

01 - (UFU MG/2017) A Secretaria de Saúde de um determinado Estado brasileiro necessita enviar 640 estojos de vacinas para N regiões distintas. Após avaliar as demandas de cada uma dessas regiões a serem atendidas, estabeleceu-se o seguinte esquema de envio:

- Para a região 1 serão enviados x estojos;
- Para a região 2 serão enviados x estojos;
- Para a região 3 serão enviados 2x estojos;
- Para a região 4 serão enviados 4x estojos;

e esse padrão se repete nas demais regiões, ou seja, serão enviados tantos estojos a uma região quanto for a soma dos que já foram enviados às regiões anteriores. O valor de x deve ser tal que N é o maior possível e exatamente todos os estojos sejam distribuídos.

Nas condições apresentadas, N · x é igual a

a) 35
b) 30
c) 40
d) 45

02 - (UECE/2020) Seja S a soma dos termos da progressão geométrica $(x_1, x_2, x_3, ..)$, cuja razão é o número real q, $0 < q < 1$. Se $x_1 = a$, $a > 0$, $a \neq 1$, então, o valor de $\log_a (S)$ é

$\log_a(X) \equiv$ logaritmo de X na base a

a) $a + \log_a(1 - q)$.
b) $a - \log_a(1 - q)$.
c) $1 + \log_a(1 - q)$.
d) $1 - \log_a(1 - q)$.

03 - (UEPG PR/2015) Cinco atletas possuem, em reais, certas quantias que estão em progressão geométrica. Sabendo que o terceiro atleta tem R$ 400,00 e o quinto tem R$ 1.600,00, assinale o que for correto.
01. O quarto atleta tem mais que R$ 850,00.
02. Juntos o segundo e o quarto atletas têm R$ 1.000,00.
04. Juntos os cinco atletas têm menos que R$ 3.000,00.
08. O primeiro atleta tem R$ 300,00 a menos que o terceiro.

04 - (UESB BA/2015) Uma rua foi pavimentada em 8 dias, sendo que o trecho feito a cada dia foi sempre 20% maior de que o do dia anterior.

Em comparação com o trecho pavimentado no primeiro dia, essa rua é, aproximadamente,

01. 10 vezes maior.
02. 12 vezes maior.
03. 14 vezes maior.
04. 16 vezes maior.
05. 18 vezes maior.

05 - (Udesc SC/2015) Seja S a soma dos nove primeiros termos da progressão $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\right\}$ A expressão que representa log S é igual a:

a) log3 + log41 – 8 log2
b) log5 + log71 – 7 log2
c) log7 + log73 – 8 log2
d) $\frac{\log 7 + \log 73}{8 \log 2}$
e) $\frac{\log 5 + \log 71}{7 \log 2}$

06 - (IBMEC SP Insper/2015) Para percorrer 1 km, o jovem Zeno adota a estratégia de dividir seu movimento em várias etapas, percorrendo, em cada etapa, metade da distância que ainda falta até o ponto de chegada. A tabela mostra a distância percorrida por ele em cada etapa.

Etapa	Distância percorrida (km)
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$
$\vdots$	$\vdots$
n	$\frac{1}{2^n}$

Ao final da etapa n, a distância total percorrida por Zeno será igual a

a) $\frac{2^n - 1}{2^n}$

b) $\frac{2^n + 1}{2^n}$

c) $\frac{n}{2^n}$

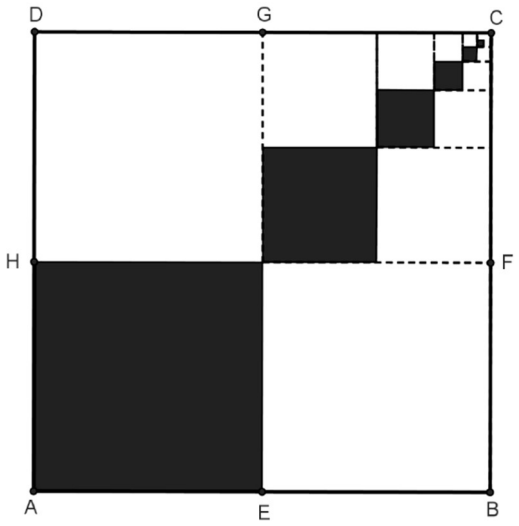
d) $\frac{2n - 1}{2^n}$

e) $\frac{2n + 1}{2^n}$

07 - (UFAM/2015) **Uma empresa contratou um empregado para trabalhar de segunda a sexta durante duas semanas. O dono da empresa pagou R$ 1,00 pelo primeiro dia de trabalho e nos dias seguintes o dobro do que ele recebeu no dia anterior. Quanto o empregado recebeu pelos 10 dias que trabalhou?**

a) R$ 511,00
b) R$ 660,00
c) R$ 830,00
d) R$ 941,00
e) R$ 1.023,00

08 - (IFRS/2015) **O quadrado ABCD abaixo tem 6 cm de lado e E, F, G e H são pontos médios de seus lados. Considerando os quadrados hachurados, se o padrão de construção dos mesmos seguir infinitamente (com cada lado sempre igual à metade do lado do quadrado imediatamente maior), então a área da região hachurada seria dada por**



a) 9 cm²
b) 10 cm²
c) 12 cm²
d) 15 cm²
e) 16 cm²

09 - (IFG GO/2016) Os benefícios da corrida vão muito além de um corpo bonito e definido. A prática resulta no bem-estar físico, na prevenção de doenças do coração, na melhoria do humor e da qualidade do sono, estimulando o raciocínio e a memória, trazendo o equilíbrio mental e a saúde para o corpo. A regularidade do exercício faz com que o corpo se acostume aos poucos com o esforço e consiga progredir. "Pessoas que não costumam praticar atividade física têm menos fôlego porque a sua atividade aeróbia é fraca e, por conta disso, a capacidade física é menor", explica o técnico de atletismo Carlos Ventura, autor de livros de corrida, como *Manual do Corredor* (Ícone Editora). Diante do exposto, Pedro, em busca de hábitos saudáveis e de melhoria do condicionamento físico, corre a cada dia o dobro da distância que correu no dia anterior. No terceiro dia de treinamento, correu 4.400 metros. É **correto** afirmar que a distância que ele correu no sexto dia é de:

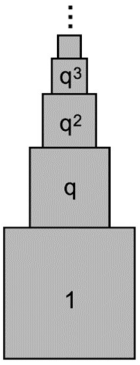
a) 27,2 km.
b) 29,2 km.
c) 31,2 km.
d) 33,2 km.
e) 35,2 km.

10 - (IFPE/2016) O Bungee jump, também conhecido como ioiô humano, é um esporte de ação praticado em todo mundo. Nesse esporte, o atleta executa saltos de pontes, balões, torres, helicópteros ou guindastes, onde a pessoa fica presa a um cabo elástico. Um indivíduo salta de um Bungee Jump e percorre na primeira descida 80 metros, em seguida, cada vez que o cabo elástico é esticado ao máximo, o atleta sobe $\frac{3}{4}$ de sua altura anterior.

Sabendo que esse movimento será realizado uma infinidade de vezes até parar, qual a distância total percorrida por esse atleta?

a) 320 m
b) 560 m
c) 80 m
d) 240 m
e) 160 m

11 - (UEFS BA/2016)



Se infinitos quadrados, cujas áreas formam uma progressão geométrica decrescente de razão q, pudessem ser empilhados, como na figura, e o quadrado da base tivesse uma área de $1m^2$, a altura da pilha, em m, seria

a) $\frac{1}{1-q}$
b) $\frac{1-q}{1-\sqrt{q}}$
c) $\frac{1-\sqrt{q}}{1-q}$
d) $\frac{1+\sqrt{q}}{1-q}$
e) infinita

12 - (PUC RS/2016) Dada a sequência numérica (a, –a, a, –a, a, –a, ..) com $x \in IR$, a soma de seus termos só existirá se

a) a > 1
b) a = 1
c) 0 < a < 1
d) a = 0
e) a < 0

13 - (Unificado RJ/2016) Em uma progressão geométrica com infinitos termos, a soma dos dois primeiros termos é 40, a soma dos três primeiros termos é 76 e a soma dos quatro primeiros termos é 130.

Quantos termos dessa progressão geométrica são inteiros?

a) 5
b) 6

c) 10
d) 12
e) 3

14 - (IFAL/2017) Sabendo que o primeiro termo de uma Progressão Geométrica é $a_1 = 2$ e a razão $q = 3$, determine a soma dos 5 primeiros termos dessa progressão:

a) 80.
b) 141.
c) 160.
d) 242.
e) 322.

15 - (ESPM SP/2017) Na progressão geométrica (1, 2, 4, 8, ..), sendo a_n o n-ésimo termo e S_n a soma dos n primeiros termos, podemos concluir que:

a) $S_n = 2 \cdot a_n$
b) $S_n = a_n + 1$
c) $S_n = a_{n+1} + 1$
d) $S_n = a_{n+1} - 1$
e) $S_n = 2 \cdot a_{n+1}$

16 - (Mackenzie SP/2019) Se o quarto termo de uma progressão geométrica é 2, então o produto dos seus 7 primeiros termos é igual a

a) 108
b) 128
c) 148
d) 168
e) 188

17 - (UECE/2020) Para cada número inteiro positivo n, as linhas do quadro abaixo são definidas segundo a estrutura lógica que segue:

L_1 1
L_2 1, 2
L_3 1, 2, 4
L_4 1, 2, 4, 8
L_5 1, 2, 4, 8, 16
.....

.....

Assim, é correto dizer que o resultado da soma dos números que estão na linha L_{20} é

a) 1048755.
b) 1048575.
c) 524827.
d) 524287.

18 - (Famerp SP/2020) José deseja fazer uma poupança mensal durante 10 anos, sempre acrescentando 0,5% a mais em relação ao valor poupado no mês anterior. Adotando $1{,}005^{120} = 1{,}819$ em seu cálculo final, se José começar sua poupança depositando R$ 100,00 no primeiro mês, ao final do último mês de depósito ele terá depositado um total de

a) R$ 69.600,00.
b) R$ 6.645,00.
c) R$ 32.760,00.
d) R$ 16.380,00.
e) R$ 6.500,00.

19 - (Santa Casa SP/2021) A soma dos cinco termos de uma progressão geométrica de razão $q > 0$ e primeiro termo igual a x é 211. Se a soma dos quatro termos de outra progressão geométrica de primeiro termo e razão iguais à razão da progressão geométrica de cinco termos é $\frac{195}{16}$, então x é igual a

a) 32.
b) 8.
c) 16.
d) 18.
e) 24.

20 - (EPCAR EA/2021) O jogo árabe chamado *Quirkat* ou *Al-Quirg* é semelhante ao jogo de damas moderno, no qual há um tabuleiro de 25 casas (5x5). Esse jogo foi mencionado na obra *Kitab Al-Aghani* do século X. O *Al-Quirg* era também o nome para o jogo que atualmente é conhecido como trilha.
Certo dia, um caixeiro viajante apresentou esse jogo a um rei que ficou encantado com ele e decidiu que iria comprá-lo.
Pediu ao viajante que colocasse preço no produto.
O caixeiro disse:
"— Vossa Majestade, posso lhe vender o jogo por uma simples barganha! Basta me dar 1 grão de milho para a 1ª casa do jogo, 2 grãos de milho para a 2ª casa do jogo, 4 grãos de milho para a 3ª casa do jogo, 8 grãos de milho para a 4ª casa do jogo e assim por diante até a 25ª casa do tabuleiro!"
O rei, imediatamente, ordenou o pagamento para o caixeiro viajante em troca do jogo que tanto lhe agradou.

Levando em consideração que o peso médio de um grão de milho seja de 0,30 g pode-se afirmar que

a) pelo pagamento referente a 13ª casa, considerando o peso médio do grão do milho, o caixeiro recebeu 1,2288 kg.
b) até a décima casa do tabuleiro, se considerado o peso médio do grão de milho, o viajante tinha recebido um total de 307,2 g.
c) a quantidade de grãos recebido pelo caixeiro viajante é um número terminado em 7.
d) a quantidade de grãos recebido pelo viajante é um número múltiplo de 2.

21 - (Unicamp SP/2021) Seja x um número real tal que os primeiros três termos de uma progressão geométrica infinita são 1, 2x, −3x + 1, nesta ordem. Sabendo que todos os termos da progressão são positivos, a soma de todos eles é igual a

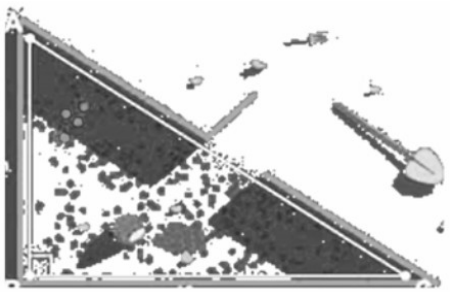
a) 3/2.
b) 2.
c) 5/2.
d) 3.

22 - (Fatec SP/2022) Uma pessoa, com 95 kg de massa, preocupada com sua saúde, resolveu procurar um médico especialista que lhe receitou uma dieta para emagrecimento saudável.
No primeiro trimestre, ela conseguiu reduzir 14 kg. A partir daí, a cada trimestre ela percebe que só consegue reduzir metade da massa reduzida no trimestre anterior. Suponha que essa dieta seja a única maneira para ela reduzir sua massa e que seja mantida indefinidamente.

Assim sendo, mantendo os parâmetros de redução de massa apresentados, sua massa se aproximará cada vez mais de
Lembre-se de que: Soma S dos infinitos termos de uma Progressão Geométrica: $S = \frac{a_1}{1-q}$, −1 < q < 1, em que a_1 é o termo inicial e **q** é a razão da sequência

a) 55 kg.
b) 60 kg.
c) 62 kg.
d) 67 kg.
e) 70 kg.

23 - (UNEB BA/2023)



As medidas de um terreno triangular são números inteiros e estão em progressão geométrica. A soma de todos os termos e o produto entre o primeiro e terceiro termo dessa progressão são, respectivamente, 86 e 144.

Considerando-se as informações apresentadas, pode-se afirmar que o primeiro termo e a razão dessa progressão são, respectivamente,

a) 1 e 12
b) 2 e 6
c) 3 e 4

d) 4 e 3
e) 6 e 2

24 - (ENEM MEC/2023) Uma empresa fundada em 2005, ao longo dos anos ganhou popularidade e aumentou consideravelmente sua atuação na economia do país. Os lucros anuais e seu padrão de crescimento podem ser observados na tabela.

Ano	Lucro (em milhares de reais)
2005	3
2006	5
2007	9
2008	17
2009	33
...	...

Supondo que se tenha mantido o padrão observado na tabela para os 5 anos seguintes, estima-se que o lucro total dessa empresa, de 2005 a 2014, em milhar de real, foi

a) 120.
b) 134.
c) 1 025.
d) 2 056.
e) 2 074.

25 - (UEG GO/2024) A soma dos dois primeiros termos de uma progressão geométrica (P.G.) é 10 e o produto dos três primeiros termos dessa P.G. é 8. O produto do 2º termo com o 3º termo tem valor

a) 1
b) 2
c) 4
d) 6
e) 8

26 - (Famema SP/2020) A progressão geométrica (a_1, a_2, a_3, ...) tem primeiro termo $a_1 = \frac{3}{8}$ e razão 5. A progressão geométrica (b_1, b_2, b_3, ...) tem razão $\frac{5}{2}$. Se $a_5 = b_4$, então b_1 é igual a

a) $\frac{25}{4}$
b) 5
c) $\frac{3}{20}$
d) 15
e) $\frac{9}{2}$

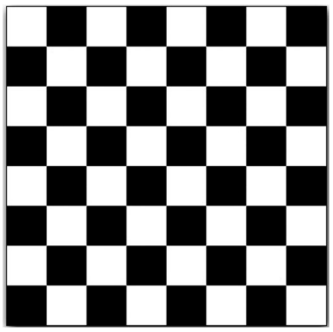
27 - (FGV /2016) Três números formam uma progressão geométrica. A média aritmética dos dois primeiros é 6, e a do segundo com o terceiro é 18. Sendo assim, a soma dos termos dessa progressão é igual a

a) 18.
b) 36.
c) 39.
d) 42.
e) 48.

28 - (ETEC SP/2017) Uma antiga lenda da Índia afirma que o jogo de xadrez foi criado a pedido de um rei e, como recompensa, o criador do jogo recebeu grãos de trigo de acordo com o número de casas do tabuleiro, seguindo o procedimento descrito.

- O criador do jogo escolhe uma casa e recebe 2 grãos por ela.
- Para a próxima casa escolhida, ele recebe o dobro da casa anterior.
- O processo continua até que todas as casas do tabuleiro sejam escolhidas exatamente uma vez.

Observando o processo podemos perceber que, para a décima casa do tabuleiro, o rei entrega 1 024 grãos.



O tabuleiro de xadrez conta com 64 casas distribuídas em 8 colunas verticais e 8 fileiras horizontais, cada uma com 8 casas. As casas são alternadamente escuras e claras.

É correto afirmar que, o número de grãos a ser entregue pela vigésima casa seria

a) maior que 1 000 e menor que 10 000.
b) maior que 10 000 e menor que 100 000.
c) maior que 100 000 e menor que 1 000 000.
d) maior que 1 000 000 e menor que 10 000 000.
e) maior que 10 000 000 e menor que 100 000 000.

29 - (Udesc SC/2017) O número de termos da P.G. $\left(a, b, \frac{10}{27}, c, \frac{2}{9}, \ldots, \frac{2}{25}, d, e\right)$ é igual a:

a) 9
b) 10
c) 8
d) 11
e) 12

30 - (UEG GO/2017) Dada a sequência (–7, 21, –63, ..), que forma uma progressão geométrica, o sexto termo dessa progressão é

a) –1.701
b) 1.701
c) 2.187
d) –5.103
e) 5.103

31 - (Fac. Baiana de Direito BA/2017) Levantamento feito pelo departamento de trânsito de uma cidade demonstrou que um grande número de motoristas costuma avançar o sinal vermelho em um determinado cruzamento, sendo, muitos deles, reincidentes nessa prática. Por essa razão, dentre outras medidas, estudou-se a viabilidade de que a multa cobrada do motorista infrator, a cada reincidência, tenha seu valor aumentado exponencialmente segundo uma progressão geométrica, de tal modo que da primeira para a quinta infração o valor da multa tenha um acréscimo de 125%.

Assim sendo, pode-se afirmar que da primeira para a terceira infração, o valor da multa a ser paga deverá ter um acréscimo de

a) 25,0%
b) 37,55%
c) 50,0%
d) 62,5%
e) 75,0%

32 - (Famema SP/2017) Considere a progressão aritmética $(a_1, 4, a_3, a_4, a_5, 16, ..)$ de razão r e a progressão geométrica $(b_1, b_2, b_3, b_4, 4, ..)$ de razão q. Sabendo que $\frac{r}{q} = 6$, o valor de $a_9 - b_3$ é

a) 12.
b) 6.
c) 3.
d) 15.
e) 9.

33 - (UCB DF/2017) Meia-vida de drogas (T1/2)

A meia-vida é um conceito cronológico e indica o tempo em que uma grandeza considerada reduz à metade do próprio valor. Em farmacocinética, ela representa o tempo gasto para que a concentração plasmática ou a quantidade original de um fármaco no organismo se reduza à metade.

Disponível em: <https: //www.portaleducacao.com.br/farmacia/artigos/45406/meia-vida-de-drogas-t1-2>. Acesso em: 28 nov. 2016, com adaptações.

Considerando a informação apresentada e sabendo que uma pessoa ingeriu 200 mg de determinado medicamento cuja meia vida é quatro horas, quantos miligramas do medicamento estarão presentes no organismo após oito horas?

a) 0.
b) 25.
c) 50.

d) 100.
e) 150.

TEXTO: 1 - Comum à questão: 34

Segundo um relatório de 2013 da FAO (o braço da ONU dedicado à alimentação e à agricultura), praticamente $\frac{1}{3}$ de tudo que é produzido no mundo (cerca de 1,3 bilhão de toneladas) vai para o lixo, causando um prejuízo equivalente a R$1,6 trilhão – quase $\frac{1}{3}$ do PIB do Brasil. Dados dessa pesquisa dão conta de que na África Subsaariana cada pessoa desperdiça cerca de 6 a 11kg de comida por ano, enquanto na América do Norte e na Europa cada pessoa desperdiça entre 95 e 115kg de comida, no mesmo período. De um modo geral, quanto mais alto o padrão de vida de um país mais ele desperdiça.

34 - (EBMSP BA/2017) Considere-se que nas regiões X e Y, em um determinado ano, ocorreu um desperdício médio de alimentos, por pessoa, respectivamente, igual a 75kg e 48kg. A partir de então, verificou-se um decréscimo anual desse desperdício, segundo progressões geométricas de razão 0,8q e q respectivamente.

Com base nessa informação e comparando-se o desperdício médio anual de alimentos, por pessoa, nas duas regiões, pode-se afirmar que

a) foi maior em X até o terceiro ano.
b) foi menor em Y até o quarto ano.
c) foi o mesmo, no segundo ano.
d) foi maior em Y a partir do quarto ano.
e) em X sempre foi maior que em Y.

35 - (EBMSP BA/2018) Considere-se que a taxa percentual anual de crescimento da população de determinada região, a partir de 2015, tem variado segundo uma progressão aritmética de razão 5% e, simultaneamente, a taxa anual de crescimento da emigração tem variado segundo uma progressão geométrica de razão 2.

Com base nesses dados e supondo-se a taxa de crescimento da população, em 2015, igual a 5% e a taxa de crescimento da emigração de 1%, pode-se afirmar que a primeira redução na população dessa região ocorrerá em

a) 2018
b) 2019
c) 2020
d) 2021
e) 2022

36 - (ENEM MEC/2018) Na música, usam-se sinais gráficos chamados figuras de duração para indicar por quanto tempo se deve emitir determinado som.
As figuras de duração usadas atualmente são: semibreve, mínima, semínima, colcheia, semicolcheia, fusa e semifusa.

Essas figuras não possuem um valor (tempo) fixo. Elas são proporcionais entre si. A duração de tempo de uma semibreve é equivalente à de duas mínimas, a duração de uma mínima é equivalente à de duas semínimas, a duração de uma semínima equivale à de duas colcheias e assim por diante, seguindo a ordem dada.

Considere que a semibreve tem a duração de tempo de uma unidade.



Disponível em: www.portaledumusicalcp2.mus.br.
Acesso em: 11 nov. 2013 (adaptado).

A sequência que indica a duração de tempo de uma mínima, de uma semínima, de uma colcheia, de uma semicolcheia, de uma fusa e de uma semifusa é

a) 2, 4, 8, 16, 32, 64
b) 1, 2, 4, 8, 16, 32
c) 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$
d) $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{15}{16}$, $\frac{31}{32}$, $\frac{63}{64}$
e) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{64}$

37 - (ENEM MEC/2018) Com o avanço em ciência da computação, estamos próximos do momento em que o número de transistores no processador de um computador pessoal será da mesma ordem de grandeza que o número de neurônios em um cérebro humano, que é da ordem de 100 bilhões.
Uma das grandezas determinantes para o desempenho de um processador é a densidade de transistores, que é o número de transistores por centímetro quadrado. Em 1986, uma empresa fabricava um processador contendo 100 000 transistores distribuídos em 0,25 cm^2 de área. Desde então, o número de transistores por centímetro quadrado que se pode colocar em um processador dobra a cada dois anos (Lei de Moore).

Disponível em: www.pocket-lint.com.
Acesso em: 1 dez. 2017 (adaptado).

Considere 0,30 como aproximação para $\log_{10}2$.

Em que ano a empresa atingiu ou atingirá a densidade de 100 bilhões de transistores?

a) 1999
b) 2002
c) 2022
d) 2026
e) 2146

38 - (FGV /2018) Uma epidemia em ratos propaga-se da seguinte forma: cada rato infectado contamina três outros ratos em uma semana. Mantendo-se essa taxa de contaminação, após a contaminação do primeiro rato,

a) em duas semanas tem-se exatamente 6 ratos contaminados.
b) em três semanas mais de 100 ratos estarão contaminados.
c) em quatro semanas mais de 1.000 ratos estarão contaminados.
d) em cinco semanas mais de 2.000 ratos estarão contaminados.
e) em seis semanas mais de 4.000 ratos estarão contaminados.

39 - (Unime BA/2018) A partir do início de 2014, o número de atendimentos em um hospital diminuiu, a cada bimestre, de acordo com uma progressão geométrica de razão q.
Se, no primeiro bimestre de 2015, houve uma queda de 27,1% nos atendimentos em relação ao mesmo período de 2014, então o valor de q é

01) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{10}}$
02) $\frac{\sqrt[6]{271}}{\sqrt{10}}$
03) $0{,}1 \cdot \sqrt{3}$
04) $0{,}3 \cdot \sqrt{10}$
05) $0{,}27 \cdot \sqrt[3]{10}$

40 - (UNITAU SP/2018) Numa progressão geométrica (PG) crescente, de quatro termos, o primeiro termo é o quíntuplo da razão, e a diferença entre o segundo e o primeiro termo vale 30. Pode-se afirmar, CORRETAMENTE, que a soma dos quatro termos dessa PG é igual a

a) 135
b) 195
c) 405
d) 600
e) 810

41 - (USF SP/2018) Considere uma progressão aritmética crescente de cinco termos, na qual o produto do primeiro com o quinto termo é 45, e a soma dos outros três termos é 27. Dado que o segundo e quarto termos dessa progressão aritmética são, respectivamente, o primeiro e o segundo termos de uma progressão geométrica, é possível afirmar, corretamente, que o décimo termo da progressão geométrica assim definida vale

a) 12 288.
b) 30.
c) 6 144.
d) 60.
e) 3 072.

42 - (Unipê PB/2019) A quantidade de paciente que é atendido em determinado Hospital em João Pessoa está descrita na sequência (40, n, m, 1080). Cada termo dessa

sequência representa a quantidade de 4 especialidades médicas existente nesse Hospital.

Sabendo-se que esses termos estão em progressão geométrica, o valor de m – n é

01. 120
02. 240
03. 270
04. 480
05. 1120

43 - (USCS SP/2019) Considere a progressão aritmética (a_1, a_2, a_3, ..) de razão 3 e a progressão geométrica (b_1, b_2, b_3, ..) de razão 2, tais que $a_1 = b_2$ e $a_3 = b_4$. O valor de b_6 é igual ao valor de

a) a_{11}
b) a_{10}
c) a_{12}
d) a_{13}
e) a_{14}

44 - (Fac. Medicina de Petrópolis RJ/2019) Uma progressão geométrica tem o seu primeiro termo e sua razão iguais a $\frac{1}{2}$.

O quinto termo dessa progressão é uma fração que, se escrita em forma percentual, é dada por

a) 6,25%
b) 31,25%
c) 3,125%
d) 32%
e) 2,5%

45 - (UEA AM/2020) As massas, em quilogramas, de três blocos constituem uma progressão geométrica de razão positiva, cujo primeiro termo é 3. Sabendo-se que a média aritmética dos três termos é 21, a massa do bloco que corresponde ao terceiro termo dessa progressão é

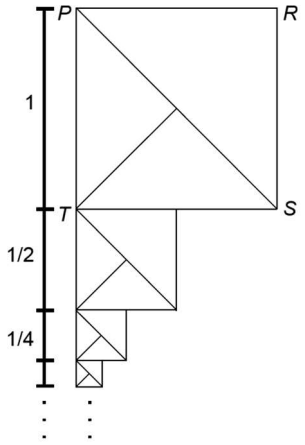
a) 32 kg.
b) 36 kg.
c) 48 kg.
d) 63 kg.
e) 27 kg.

46 - (IFPI/2020) Sabe-se que determinada colônia de bactérias tem sua população duplicada a cada período de uma hora. Se nessa colônia existiam inicialmente 8 dessas bactérias, ao fim de 12 horas qual será a quantidade de bactérias?

a) 2^{16}

b) 2^{15}
c) 2^{14}
d) 2^{13}
e) 2^{12}

47 - (ENEM MEC/2020) O artista gráfico holandês Maurits Cornelius Escher criou belíssimas obras nas quais as imagens se repetiam, com diferentes tamanhos, induzindo ao raciocínio de repetição infinita das imagens. Inspirado por ele, um artista fez um rascunho de uma obra na qual propunha a ideia de construção de uma sequência de infinitos quadrados, cada vez menores, uns sob os outros, conforme indicado na figura.



O quadrado *PRST*, com lado de medida 1, é o ponto de partida. O segundo quadrado é construído sob ele tomando-se o ponto médio da base do quadrado anterior e criando-se um novo quadrado, cujo lado corresponde à metade dessa base. Essa sequência de construção se repete recursivamente.

Qual é a medida do lado do centésimo quadrado construído de acordo com esse padrão?

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{100}$
b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{99}$
c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{97}$
d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-98}$
e) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-99}$

48 - (Mackenzie SP/2020) Se o décimo e o décimo quinto termos de uma progressão geométrica são, respectivamente, $\frac{3}{512}$ e $\frac{3}{16384}$, então o vigésimo quinto termo dessa progressão é

a) $\frac{3}{16444216}$

b) $\frac{3}{16555216}$

c) $\frac{3}{16666216}$

d) $\frac{3}{16777216}$

e) $\frac{3}{16888216}$

49 - (UEG GO/2020) Em um experimento com uma colônia de bactérias, verificou-se que uma bactéria se divide em duas a cada hora. Nessas condições, o número de bactérias originadas de uma só bactéria dessa colônia, depois de 12 horas, será

a) 4096
b) 8192
c) 1048
d) 3096
e) 2048

50 - (UERJ/2020) Em uma fábrica, uma caixa com a forma de um paralelepípedo retângulo, com 25 cm de comprimento, 10 cm de largura e 8 cm de altura, é preenchida com pequenos cubos de 0,5 cm^3. Inicialmente, apenas um cubo é colocado na caixa. Em seguida, a cada minuto, duplica-se o número de cubos dentro dela. Considere a tabela:

x	0,30	0,48	0,60	0,70
10^x	2	3	4	5

O valor do tempo t, em minutos, necessário para a caixa ser totalmente preenchida, é igual a:

a) 12
b) 14
c) 16
d) 18

51 - (UEG GO/2021) Na $PG\left(\frac{1}{2},1,2,4,8...\right)$ o 11º termo será

a) 32
b) 64
c) 128
d) 256
e) 512

52 - (PUC Campinas SP/2022) Sabendo-se que x, y, 14 e x, y, 32 são termos consecutivos de uma P.A. crescente e de uma P.G., respectivamente, o valor de x + y é:

a) 8

b) 5
c) 10
d) 9
e) 6

53 - (UFT TO/2023) Uma indústria farmacêutica responsável por produzir vacinas fez uma análise do último ano de produção e concluiu que foram produzidas 3.000 vacinas no primeiro bimestre de 2022, que a produção seguiu no ritmo de uma progressão geométrica e que a produção triplicou a cada bimestre no ano de 2022.

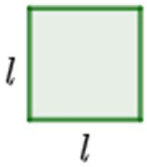
De acordo com o crescimento de produção de vacinas nessa indústria, é **CORRETO** afirmar que o número de vacinas produzidas no último bimestre de 2022 é de:

a) 125.000
b) 243.000
c) 486.000
d) 729.000

Áreas de Figuras Planas

Área do Quadrado

Quadrado é todo quadrilátero que possui os quatro lados congruentes e os quatro ângulos de mesma medida $(90°)$.



A área A de um quadrado cujos lados medem l, sendo este um número real positivo, é dada por:

$$A = l^2.$$

Exemplo 1: Seu José comprou um terreno nas dimensões $20\ m \times 20\ m$. Qual a área A desse terreno?

Para calcular a área do terreno de seu José substituímos o valor do lado do terreno na fórmula da área de um quadrado. Portanto,

$$A = l^2 \Rightarrow A = 20^2 \Rightarrow A = 400\ m^2.$$

A área A do terreno comprado pelo seu José é igual a $400\ m^2$.

Exemplo 2: Gil e seu irmão receberam de herança um terreno de área igual a $900\ m^2$. Sabendo que o terreno possui os quatro lados iguais e todos os ângulos internos medindo $90°$, calcule o valor do lado l desse terreno.

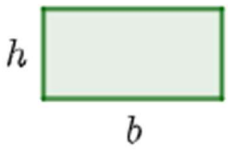
Para calcular o valor do lado do terreno recebido por Gil e seu irmão é suficiente substituirmos o valor da área desse terreno na fórmula da área de um quadrado. Assim,

$$A = l^2 \Rightarrow 900 = l^2 \Rightarrow l = \sqrt{900} \Rightarrow l = 30\ m.$$

O terreno herdado pelos irmãos possui lado l igual a $30\ m$.

Área do Retângulo

Retângulo é todo quadrilátero que possui seus quatro ângulos congruentes.



A área A de um retângulo cujos lados medem b e h, sendo estes números reais, é dada por:

$$A = b \cdot h.$$

Exemplo 1: Sabendo que uma folha de papel A4 possui dimensões $21\ cm \times 29,7\ cm$, determine a área A dessa folha.

Para calcular a área da folha de papel A4, substituímos os valores de duas dimensões na fórmula da área de um retângulo. Desse modo,

$$A = b \cdot h \Rightarrow A = 21 \cdot 29{,}7 \Rightarrow A = 623{,}7\ cm^2.$$

A área da folha de papel A4 é igual a $623{,}7\ cm^2$.

Exemplo 2: Um artista pintou, para sua exposição, uma tela com $120\ m^2$. Se a base dessa tela mede $15\ m$, quantos metros mede sua altura h?

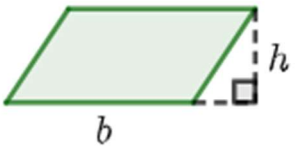
Para calcular a altura da tela pintada pelo artista basta substituirmos os valores da área e da base da tela na fórmula da área de um retângulo. Portanto,

$$A = b \cdot h \Rightarrow 120 = 15 \cdot h \Rightarrow h = 8\ m.$$

A tela do artista possui altura de $8\ m$.

Área do Paralelogramo

Paralelogramo é todo quadrilátero em que os lados opostos são paralelos.



A área A de um paralelogramo de base b e altura h é dada por:

$$A = b \cdot h.$$

Exemplo 1: Qual a área A de um paralelogramo de base $25\ cm$ e altura $6\ cm$.

A área do paralelogramo pode ser encontrada por meio da aplicação da fórmula acima. Assim,

$$A = b \cdot h \Rightarrow A = 25 \cdot 6 \Rightarrow A = 150\ cm^2.$$

O paralelogramo possui área igual a $150\ cm^2$.

Exemplo 2: Um paralelogramo de base $4\ m$ tem área igual a $116\ m^2$. Qual a altura h desse paralelogramo?

Para encontrarmos a altura do paralelogramo, é suficiente substituirmos os valores da área e da altura na fórmula da área do paralelogramo. Assim,

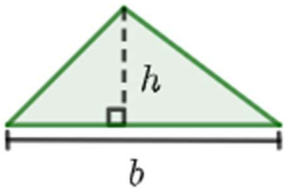
$$A = b \cdot h \Rightarrow 116 = 4 \cdot h \Rightarrow h = 29\ m.$$

A altura do paralelogramo é igual a $29\ m$.

Área do Triângulo

- **Triângulo Qualquer**

Triângulo é um polígono de três lados cuja soma dos ângulos internos é igual a $180°$.



A área A de um triângulo qualquer de base b e altura h é dada por:

$$A = \frac{b \cdot h}{2}.$$

Exemplo 1: Qual a área A de um triângulo cuja base mede $10\ cm$ e altura $13\ cm$?

Para encontrarmos a área de um triângulo a partir dos valores da base e da altura do triângulo devemos aplicar a fórmula da área do triângulo qualquer. Portanto,

$$A = \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow A = \frac{10 \cdot 13}{2} \Rightarrow A = 65\ cm^2.$$

A área A do triângulo é igual a $65\ cm^2$.

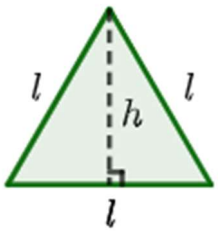
Exemplo 2: A fim de enfeitar sua rua para as festas juninas, Joaquim comprou bandeirinhas triangulares de área igual a $25\ cm^2$. Sabendo que a base das bandeirinhas mede $5\ cm$, qual a altura h dessas bandeirinhas?

Aplicando a fórmula da área de um triângulo qualquer, temos

$$A = \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow 25 = \frac{5 \cdot h}{2} \Rightarrow h = 10\ cm.$$

Assim, a altura h das bandeirinhas compradas por Joaquim mede $10\ cm$.

- **Triângulo Equilátero**



Triângulo equilátero é aquele que possui todos os lados congruentes. Neste caso, a altura h de um triângulo equilátero, é dada por:

$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2}.$$

Assim, área A de um triângulo equilátero de lado l e altura h, é dada por:

$$A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}.$$

Exemplo 1: Qual a área A de um triângulo equilátero cujos lados medem $6\ cm$?

Para calcularmos a área de um triângulo cujos lados possuem a mesma medida utilizarmos a fórmula da área de um triângulo equilátero. Desse modo,

$$A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A = 9\sqrt{3}\ cm.$$

A área A do triângulo equilátero de lado $6\ cm$ é igual a $9\sqrt{3}\ cm$.

Exemplo 2: Uma empresa foi contratada para confeccionar placas de trânsito no formato triangular. Se todos os lados das placas devem ter a mesma medida e cada placa tem área igual a $100\sqrt{3}\ cm$, quanto deve medir a altura h dessas placas?

Aplicando a fórmula da área de um triângulo equilátero, temos

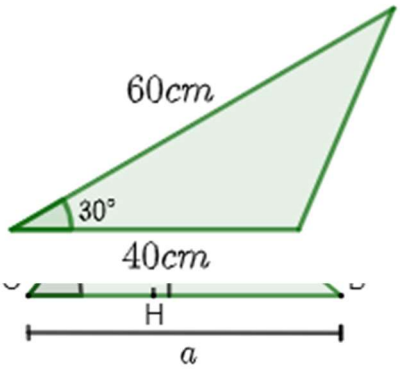
$$A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow 100\sqrt{3} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow l = 20\ cm.$$

Agora que encontramos o valor do lado do triângulo, basta substituirmos na fórmula da altura de um triângulo equilátero. Portanto,

$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = \frac{20\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = 10\sqrt{3}\ cm.$$

A altura h das placas mede $10\sqrt{3}\ cm$.

- **Área do Triângulo Conhecendo 2 Lados e 1 Ângulo**



Essa área é utilizada quando conhecemos os valores de dois lados do triângulo e o ângulo formado por eles.

A área A de um triângulo em que dois de seus lados medem a e b, e o ângulo entre eles mede β, é dada por:

$$A = \frac{a \cdot b \cdot sen(\beta)}{2}.$$

Exemplo 1: Calcule a área A do triângulo abaixo.

No triângulo é dado apenas os valores de dois de seus lados e do ângulo formado por esses lados, assim, podemos calcular a área desse triângulo por meio da seguinte fórmula:

$$A = \frac{a \cdot b \cdot sen(\beta)}{2} \Rightarrow A = \frac{60 \cdot 40 \cdot sen30°}{2} \Rightarrow A = \frac{60 \cdot 40 \cdot \frac{1}{2}}{2} \Rightarrow A = 600\ cm^2.$$

A área A do triângulo mede $600\ cm^2$.

Exemplo 2: Um triângulo de área $24\sqrt{2}\ cm^2$, possui dois de seus lados medindo 8 e 12, respectivamente. Qual o ângulo α formado entre esses dois lados do triângulo?

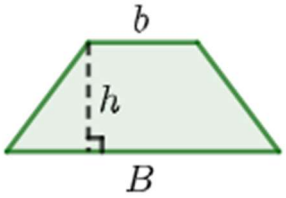
Aplicando a fórmula da área de um triângulo quando conhecemos apenas as medidas de dois de seus lados e do ângulo interno formado por esses lados, temos

$$A = \frac{a \cdot b \cdot sen(\beta)}{2} \Rightarrow 24\sqrt{2} = \frac{8 \cdot 12 \cdot sen\alpha}{2} \Rightarrow sen\ \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

O seno do ângulo α mede $\frac{\sqrt{2}}{2}$, logo $\alpha = 45°$.

Área do Trapézio

Trapézio é um quadrilátero que possui apenas dois lados paralelos (bases).



A área A de um trapézio de altura h cujas bases maior e menor medem, respectivamente, B e b, é dada por:

$$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}.$$

Exemplo 1: Qual a área A de um trapézio de altura $7\ cm$ e bases maior e menor medindo, respectivamente, $14\ cm$ e $6\ cm$?

Para calcularmos a área de um trapézio é suficiente substituirmos os valores das bases e da altura na fórmula que determina sua área. Logo,

$$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2} \Rightarrow A = \frac{(14 + 6) \cdot 7}{2} \Rightarrow A = 70\ cm^2.$$

A área A do trapézio é igual a $70\ cm^2$.

Exemplo 2: Um trapézio de área $12\ cm^2$ possui base menor medindo $3\ cm$ e base maior medindo $5\ cm$. Qual o valor da altura h desse trapézio?

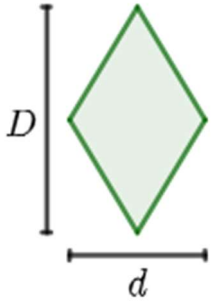
Aplicando a fórmula da área do trapézio, temos

$$A = \frac{(B+b)\cdot h}{2} \Rightarrow 12 = \frac{(5+3)\cdot h}{2} \Rightarrow h = 3\ cm.$$

A altura h do trapézio mede $3\ cm$.

Área do Losango

Losango é um quadrilátero que possui os quatro lados congruentes.



A área A de um losango cuja diagonal maior mede D e diagonal menor mede d, é dada por:

$$A = \frac{D\cdot d}{2}.$$

Exemplo 1: Qual a área A do losango cujas diagonais maior e menor medem, respectivamente, $7\ cm$ e $5\ cm$?

Para calcularmos a área de um losango devemos substituir os valores das diagonais maior e menor na fórmula que determina sua área.

$$A = \frac{D\cdot d}{2} \Rightarrow A = \frac{7\cdot 5}{2} \Rightarrow A = 17{,}5\ cm^2.$$

A área A do losango é igual a $17{,}5\ cm^2$.

Exemplo 2: Um losango de área $40\ cm^2$ possui diagonal menor igual a $4\ cm$. Quanto mede a diagonal maior (D) desse losango?

Aplicando a fórmula da área do losango, temos

$$A = \frac{D\cdot d}{2} \Rightarrow 40 = \frac{D\cdot 4}{2} \Rightarrow D = 20\ cm.$$

A diagonal maior D do losango mede $20\ cm$.

Área do Polígono Regular

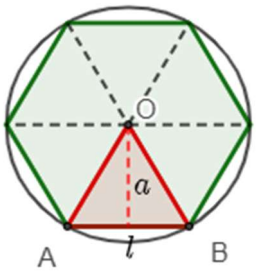
Polígono regular é aquele cujos lados e ângulos internos são congruentes.



Triângulo Equilátero Quadrado Pentágono Regular Hexágono Regular
Octógono Regular

Observação: Todo polígono regular pode ser inscrito em uma circunferência.

É possível observar que o número de lados de um polígono é igual ao número de triângulos isósceles formado por ele. Desse modo, um polígono regular de n lados pode ser decomposto em n triângulos isósceles.
Os triângulos isósceles formados possuem como base o lado l e altura o apótema a do polígono regular.



A área A de um polígono regular de n lados, é dada por:

$$A = n \cdot \frac{l \cdot a}{2}.$$

Em que:
l: lado.
a: apótema.

Exemplo 1: Calcule a área A de um polígono regular de 20 lados, em que a apótema mede $8\ cm$ e os lados $10\ cm$.

Para calcularmos a área de um polígono regular é necessário substituirmos os valores do lado e do apótema e o número de lados do polígono na fórmula que determina sua área.

$$A = n \cdot \frac{l \cdot a}{2} \Rightarrow A = 20 \cdot \frac{10 \cdot 8}{2} \Rightarrow A = 800\ cm^2.$$

A área A do polígono regular é igual a $800\ cm^2$.

Exemplo 2: Um polígono possui apótema igual a $7\ cm$ e área $252\ cm^2$. Sabendo que seus lados medem $8\ cm$, quantos lados possui esse polígono?

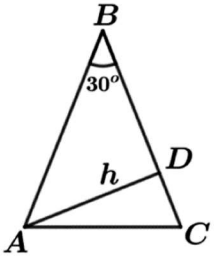
Aplicando a fórmula da área do polígono regular, temos

$$A = n \cdot \frac{l \cdot a}{2} \Rightarrow 252 = n \cdot \frac{8 \cdot 7}{2} \Rightarrow n = 9 \text{ lados.}$$

O polígono possui $n = 9$ lados.

Exercícios

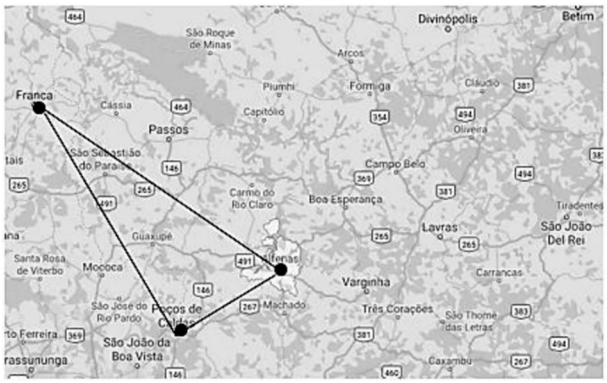
01 - (Unicamp SP/2020) A figura abaixo exibe o triângulo ABC, em que AB = BC e $\overline{AD}$ é uma altura de comprimento h. A área do triângulo ABC é igual a



a) h^2.
b) $\sqrt{2}h^2$.

c) $\sqrt{3}h^2$.
d) $2h^2$.

02 - (Unifenas MG/2020) O mapa a seguir mostra uma região do sudeste brasileiro.



A tabela indica a distância aproximada, em linha reta, entre três cidades presentes nesse mapa

	ALFENAS	POÇOS DE CALDAS	FRANCA(SP)
ALFENAS	0	104 Km	255 Km
POÇOS DE CALDAS	104 Km	0	255 Km
FRANCA(SP)	255 Km	255 Km	0

(Considere: $\sqrt{62321} \approx 250$)

Observando o mapa e com os dados da tabela, a área aproximada da região limitada pelo triângulo cujos vértices estão nas cidades de Alfenas, Poços de Caldas e Franca, em quilômetros quadrados, é igual a

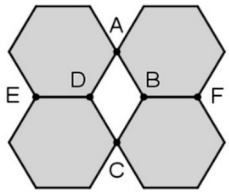
a) 13 000.
b) 26 000.
c) 52 000.
d) 64 000.
e) 108 000.

03 - (UECE/2020) No triângulo acutângulo XYZ, cuja medida da área é $24m^2$, sejam M, N, O os pontos médios, respectivamente, dos lados XY, YZ e XZ. Pelo vértice Z, traça-se uma reta paralela ao lado XY e, pelo vértice X, traça-se uma reta paralela ao lado YZ, as quais se cortam no ponto G. Nessas condições, a medida, em m^2, da área do triângulo MNG é

a) 24.
b) 12.
c) 18.
d) 15.

04 - (UFRGS RS/2019) Os quatro hexágonos da imagem a seguir são regulares e cada um tem área de 48 cm^2.

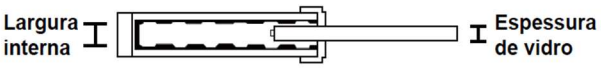
Os vértices do quadrilátero *ABCD* coincidem com vértices dos hexágonos. Os pontos E, D, B e F são colineares.



A área do quadrilátero *ABCD*, em cm^2, é

a) 8.
b) 10.
c) 16.
d) 24.
e) 36.

05 - (ENEM MEC/2019) Um vidraceiro é contratado para colocar uma porta de vidro que escorregará em uma canaleta de largura interna igual a 1,45 cm, como mostra a figura.

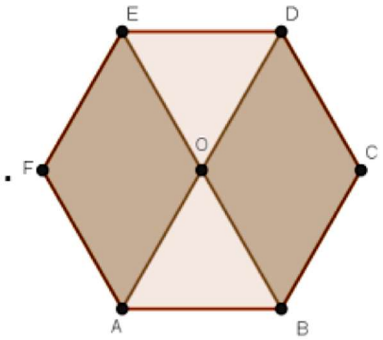


O vidraceiro precisa de uma placa de vidro de maior espessura possível, tal que deixe uma folga total de pelo menos 0,2 cm, para que o vidro possa escorregar na canaleta, e no máximo 0,5 cm para que o vidro não fique batendo com a interferência do vento após a instalação. Para conseguir essa placa de vidro, esse vidraceiro foi até uma loja e lá encontrou placas de vidro com espessuras iguais a: 0,75 cm; 0,95 cm; 1,05 cm; 1,20 cm; 1,40 cm.

Para atender às restrições especificadas, o vidraceiro deverá comprar a placa de espessura, em centímetro, igual a

a) 0,75.
b) 0,95.
c) 1,05.
d) 1,20.
e) 1,40.

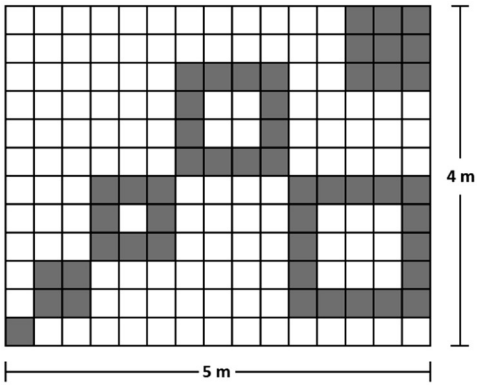
06 - (Unemat MT/2019) A medida da área do hexágono regular da figura abaixo é $24\sqrt{3}$ cm^2. As diagonais AD e BE definem dois losangos congruentes e simétricos inscritos no hexágono.



Sabendo-se que as diagonais AD e BE medem 8 cm, assinale a alternativa correta que corresponde à área ocupada pelos losangos.

a) $16\sqrt{3}$ cm²
b) $8\sqrt{3}$ cm²
c) $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ cm²
d) $18\sqrt{3}$ cm²
e) $6\sqrt{3}$ cm²

07 - (UFMS/2019) Observe a figura a seguir:



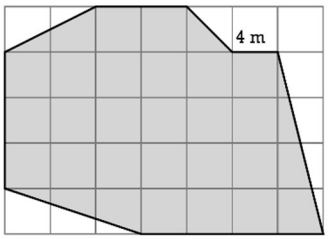
A área da região colorida de cinza, em relação ao retângulo 4m × 5m, corresponde a aproximadamente:

a) 28%.
b) 36%.
c) 41%.
d) 56%.
e) 60%.

08 - (UECE/2019) Considere o quadrado MNPQ, cuja medida do lado é igual a 5 cm. No interior desse quadrado, está o triângulo equilátero MJL, onde os vértices J e L estão respectivamente sobre os lados NP e PQ do quadrado. Nessas condições, pode-se afirmar corretamente que a medida, em cm², da área limitada pelo triângulo MJL é igual a

a) $-50 + 50\sqrt{3}$
b) $25 + 25\sqrt{3}$
c) $-25 + 25\sqrt{3}$
d) $-75 + 50\sqrt{3}$

09 - (ESPM SP/2019) Se o lado de cada quadrícula da figura abaixo mede 4 m, a área do terreno representado mede:

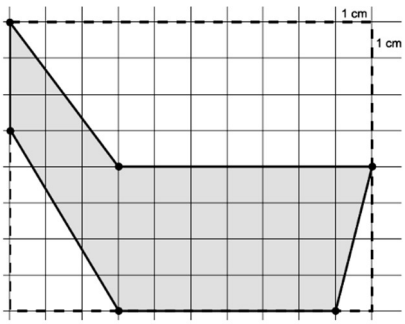


a) 448 m²
b) 512 m²
c) 380 m²
d) 624 m²
e) 566 m²

10 - (IFAL/2019) O professor de matemática lançou o seguinte desafio para seus alunos: calcular a área do quadro da sala de aula, que tinha um formato de um quadrado, sabendo-se apenas que o perímetro desse quadro media 6,0 m. Fazendo-se corretamente os cálculos, o valor encontrado será:

a) 1,5 m²
b) 2,25 m²
c) 6,0 m²
d) 12,0 m²
e) 36,0 m²

11 - (Univag MT/2019) Sobre uma malha quadriculada, com quadrículos de 1 cm de lado, foi feito o desenho de um hexágono não convexo.

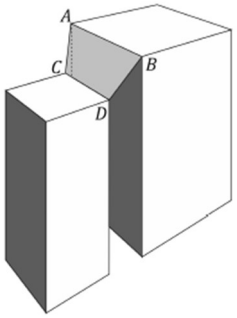


A área desse hexágono é

a) 36 cm².
b) 38 cm².
c) 36,5 cm².
d) 37 cm².
e) 37,5 cm².

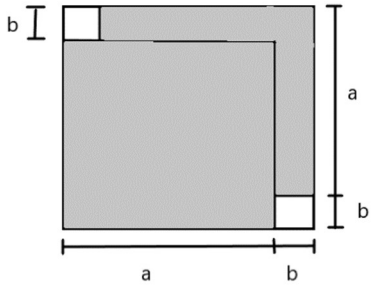
12 - (Fuvest SP/2019) Uma empresa estuda cobrir um vão entre dois prédios (com formato de paralelepípedos reto-retângulos) que têm paredes laterais paralelas, instalando uma lona na forma de um quadrilátero, com pontas presas nos pontos *A, B,C* e *D* conforme indicação da figura.

Sabendo que a lateral de um prédio tem 80 m de altura e 28 m de largura, que a lateral do outro prédio tem 60 m de altura e 20 m de largura e que essas duas paredes laterais distam 15 m uma da outra, a área total dessa lona seria de



a) 300 m²
b) 360 m²
c) 600 m²
d) 720 m²
e) 1.200 m²

13 - (IFSC/2019) Uma escola pretende colocar lajotas para construir um pátio com o formato abaixo. A parte pintada vai ser onde deverá ser colocado as lajotas. Sabe-se que não será preciso cobrir dois quadrados de lado b, onde se plantarão algumas flores. A área total a ser coberta é de 73 m² e o comprimento do lado a menos 1m é igual ao triplo do comprimento do lado b. Dessa forma, podemos afirmar que a área que será destinada ao plantio das flores é:



Assinale a alternativa CORRETA.

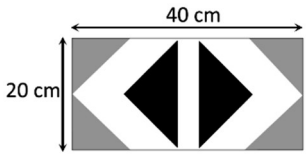
a) 4 m²
b) 8 m²
c) 49 m²
d) 81 m²
e) 98 m²

14 - (IFBA/2019) Um terreno retangular com 100 metros de frente e x metros de lateral foi dividido entre dois amigos A e B de tal forma que a área de A ficou igual a uma vez e meia área de B. Na divisão, os dois mantiveram a medida x nas suas laterais de forma que a divisão se deu por um segmento de reta com uma extremidade na frente do terreno e outra no fundo. Determine o comprimento, em metros, da frente do terreno de B, sabendo que o comprimento do fundo do terreno de A é igual a 30 metros.

a) 12
b) 24

c) 6
d) 36
e) 10

15 - (Fatec SP/2019) Uma artesã borda, com lã, tapetes com desenhos baseados em figuras geométricas. Ela desenvolve um padrão retangular de 20 cm por 40 cm. No padrão, serão bordados dois triângulos pretos e quatro triângulos na cor cinza e o restante será bordado com lã branca, conforme a figura.

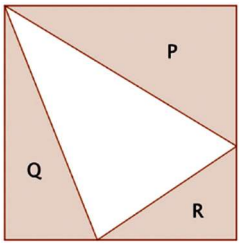


Cada triângulo preto é retângulo e isósceles com hipotenusa $12\sqrt{2}$ cm. Cada triângulo cinza é semelhante a um triângulo preto e possui dois lados de medida 10 cm.

Assim posto, a área no padrão bordada em branco é, em cm^2,

a) 344.
b) 456.
c) 582.
d) 628.
e) 780.

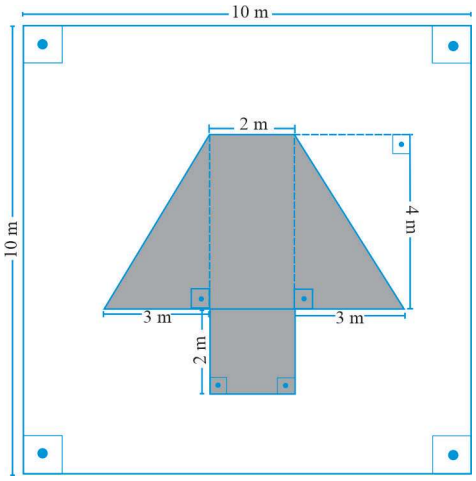
16 - (PUC SP/2019) Deseja-se dividir um quadrado, de lado 24 cm, em 4 regiões triangulares, de acordo com a figura.



Se nessa divisão desejamos que a área da região P seja 84 cm^2 e que a soma das áreas das regiões Q e R seja igual a 218 cm^2, a área da região R, em cm^2, deverá ser:

a) 50
b) 90
c) 130
d) 170

17 - (Cefet MG/2020) Um piso quadrado, com 10 m de lado, será completamente revestido com dois tipos de granito, um claro que custa R$ 80,00 o m^2, e um preto, que custa R$ 100,00 o m^2. Esses pisos são vendidos apenas em caixas contendo cada uma delas 5 m^2. O granito preto revestirá as áreas que formam um trapézio isósceles e um quadrado, e o granito claro, o restante, conforme apresentado na figura a seguir.



O valor pago na compra da quantidade mínima necessária desses dois tipos de granito para o revestimento desse piso será, em reais, de

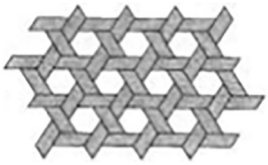
a) 6 100,00
b) 7 500,00
c) 8 900,00
d) 9 300,00

18 - (IFBA/2020) A Geometria está presente em diversas culturas, em cada uma delas com finalidades específicas. Na Terra Indígena Xapecó, situada em Ipuaçu (SC), os artesãos do povo Kaingang confeccionam tampas de tuia por meio de tiras entrelaçadas conforme figuras a seguir:

Figura I



Figura II



Disponível em: http://www.cbem4.ufpa.br/anais/Arquivos/CC_SUFIATTI_BERNARDI.pdf. Acesso em: 29 jul. 2019.

De acordo com a geometria apresentada pelas figuras I e II, podemos concluir que:

a) Os losangos garantem a não deformidade das tiras, evitando rompimentos.
b) Através de círculos, a estética é destacada neste formato.
c) As figuras hexagonais permitem um encaixe perfeito, formando uma estrutura estável.
d) São formados quadriláteros para permitir o máximo preenchimento.
e) A estrutura de trapézios garante que não apareçam lacunas nas bordas.

19 - (ENEM MEC/2020) Pretende-se comprar uma mesa capaz de acomodar 6 pessoas, de modo que, assentadas em torno da mesa, cada pessoa disponha de, pelo menos, 60 cm de espaço livre na borda do tampo da mesa, que deverá ter a menor área possível. Na loja visitada há mesas com tampos nas formas e dimensões especificadas:

- Mesa I: hexágono regular, com lados medindo 60 cm;
- Mesa II: retângulo, com lados medindo 130 cm e 60 cm;

- Mesa III: retângulo, com lados medindo 120 cm e 60 cm;
- Mesa IV: quadrado, com lados medindo 60 cm;
- Mesa V: triângulo equilátero, com lados medindo 120 cm.

A mesa que atende aos critérios especificados é a

a) I.
b) II.
c) III.
d) IV.
e) V.

20 - (Unifor CE/2020) Considere uma placa de trânsito na forma de um hexágono regular com lados de comprimentos L centímetros. Sabemos que um hexágono regular de lados L é formado por seis triângulos equiláteros todos de lado L.

Então, podemos afirmar que a área A desse hexágono em função do lado L é:

a) $A = 3\sqrt{3}\ L^2 cm^2$

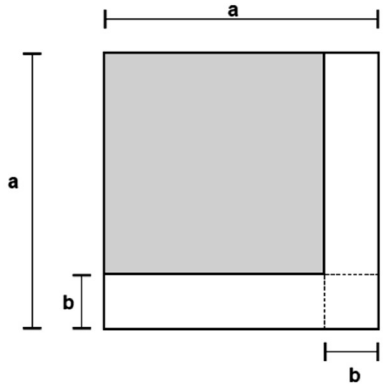
b) $A = \frac{3\sqrt{3}}{2} L^2 cm^2$

c) $A = \frac{3\sqrt{2}}{2} L^2 cm^2$

d) $A = \frac{5\sqrt{3}}{2} L^2 cm^2$

e) $A = \frac{5\sqrt{2}}{2} L^2 cm^2$

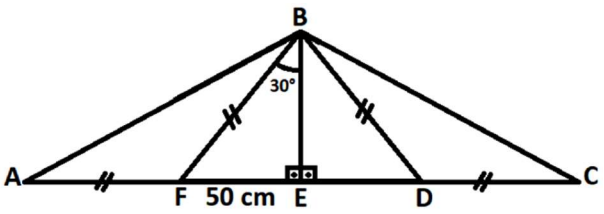
21 - (UnirG TO/2020) No livro intitulado “Elementos”, do matemático grego Euclides de Alexandria (300 a.C), há um quadrado de lado ***a***, a partir do qual Euclides procura encontrar a área de outro quadrado, destacado em cinza, na figura a seguir.



Desse modo, a área do quadrado destacado em cinza na figura é obtida pela expressão:

a) $a^2 = (a - b)^2 + 2ab$
b) $a^2 = (a - b)^2 - 2ab$
c) $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$
d) $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

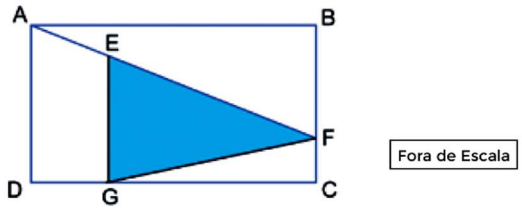
22 - (UFMS/2018) Os triângulos são largamente utilizados na formação de treliças, pela sua rigidez, visto que para três valores de lado só existe um triângulo; assim, são figuras que não se deformam.



Um estudante de Arquitetura, ao observar a vista frontal de um telhado, conforme a figura, e sabendo se que ele se estendia por 10 m, calculou que a área do telhado era de:

a) 10 m².
b) $10\sqrt{3}$ m².
c) 20 m².
d) 30 m².
e) $20\sqrt{3}$ m².

23 - (PUC SP/2018) Considere o retângulo ABCD, com AB = a, e o triângulo EFG, com $EG = \frac{a}{2}$, $FC = \frac{a}{6}$, $FG = 2\sqrt{17}$ e $DG = \frac{a}{3}$ conforme mostra a figura.

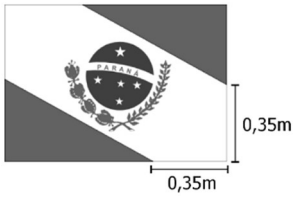


Sabendo que os pontos A, E, F estão alinhados e que os pontos F e G pertencem, respectivamente, aos lados $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$, a área do triângulo EFG, em unidades de área, é

a) 12.
b) 24.
c) 36.
d) 48.

24 - (UTF PR/2018) As medidas de bandeiras no Brasil foram normatizadas por um tamanho padrão chamado "pano" que é igual à 0,64m de largura por 0,45m de altura. Os demais tamanhos são múltiplos ou submúltiplos deste padrão. Assim uma bandeira de 1,5 panos tem largura de 1,00m de largura por 0,70m de altura.
Fonte: http://www.casacivil.pr.gov.br/modules/conteudo/conteudo.php?conteudo=10

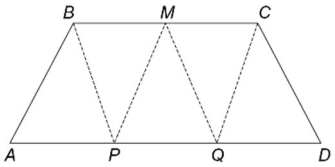
Considere a bandeira do Estado do Paraná de 1,5 panos, figura abaixo.



A soma das áreas em formato triangular, em m^2, é igual a:

a) 0,1137.
b) 0,2275.
c) 0,3343.
d) 0,6331.
e) 0,7371.

25 - (ENEM MEC/2019) No trapézio isósceles mostrado na figura a seguir, *M* é o ponto médio do segmento *BC*, e os pontos *P* e *Q* são obtidos dividindo o segmento *AD* em três partes iguais.



Pelos pontos *B*, *M*, *C*, *P* e *Q* são traçados segmentos de reta, determinando cinco triângulos internos ao trapézio, conforme a figura.

A razão entre $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$ que determina áreas iguais para os cinco triângulos mostrados na figura é

a) $\frac{1}{3}$
b) $\frac{2}{3}$
c) $\frac{2}{5}$
d) $\frac{3}{5}$
e) $\frac{5}{6}$

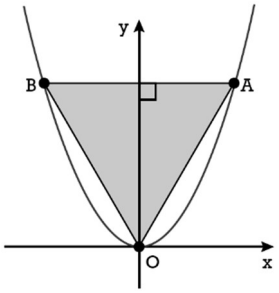
26 - (ESPM RS/2019) As medidas dos lados de um triângulo, em cm, são dadas por três números pares consecutivos. Se o perímetro desse triângulo é igual a 24 cm, sua área mede:

a) 24 cm^2
b) 20 cm^2
c) 28 cm^2
d) 30 cm^2
e) 36 cm^2

27 - (UEG GO/2019) De uma chapa de aço quadrada, recorta-se um triângulo equilátero, cujo lado tem a mesma medida do lado do quadrado. Sabendo-se que o lado do quadrado é igual a 4cm, tem-se que

a) a área do triângulo é $16\sqrt{3}$ cm² .
b) a área da chapa que sobra após o recorte é $\left(16-4\sqrt{3}\right)$cm².
c) a área da chapa que sobra após o recorte é $\left(16-\sqrt{3}\right)$cm².
d) se um lado do triângulo coincidir com um lado do quadrado, então o perímetro da figura que sobra após o recorte é igual a 16cm.
e) se um lado do triângulo coincidir com um lado do quadrado, então o perímetro da figura que sobra após o recorte é igual a $16\sqrt{3}$ cm.

28 - (ESPM SP/2019) No plano cartesiano abaixo estão representados o gráfico da função $y = x^2$ e o triângulo equilátero OAB.



A área desse triângulo mede:

a) $2\sqrt{3}$
b) 3
c) $\sqrt{3}$
d) 2
e) $3\sqrt{3}$

29 - (UECE/2019) Se as medidas dos comprimentos dos lados de um triângulo são respectivamente 4 m, 6 m e 8 m, então, a medida da área desse triângulo, em m², é

a) $5\sqrt{6}$.
b) $3\sqrt{15}$.
c) $6\sqrt{5}$.
d) $4\sqrt{15}$.

30 - (IFPI/2020) As medidas dos comprimentos dos lados de um triângulo são 4 metros, 5 metros e 7 metros. Com essa informação, qual a medida da área, em metros quadrados (m²) desse triângulo?

a) $2\sqrt{6}m^2$
b) $3\sqrt{6}m^2$
c) $4\sqrt{6}m^2$
d) $10m^2$

e) $14m^2$

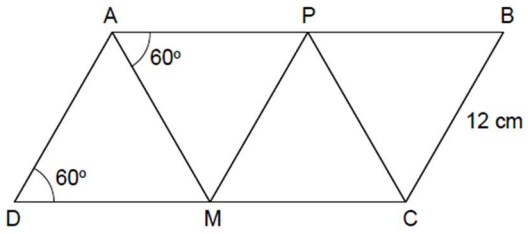
31 - (Cefet MG/2020) Considere um triângulo equilátero cujo lado tem medida igual a $\frac{\sqrt{3}+x}{2}$ m. Se a área desse triângulo tem medida igual a $\frac{\sqrt{3}}{16}$ m², então é correto afirmar que

a) $x \notin R$
b) $x = -\sqrt{3} - 1$
c) $x = -\sqrt{3} + 1$
d) $x = -\sqrt{3} + 1$ ou $x = -\sqrt{3} - 1$

32 - (UECE/2020) Em uma circunferência com centro no ponto M, cuja medida do diâmetro é igual a 20 m, considere um arco com extremidades P e Q medindo exatamente um quarto do comprimento da circunferência. Se X é um ponto do arco tal que o triângulo MXQ é equilátero e Y é um ponto do segmento MP tal que o triângulo MYX é retângulo em Y, então, a medida da área do triângulo MYX, em m², é

a) $15\sqrt{3}$.
b) $12{,}5\sqrt{3}$.
c) $12\sqrt{5}$.
d) $10{,}5\sqrt{5}$.

33 - (Fac. Cesgranrio RJ/2020)

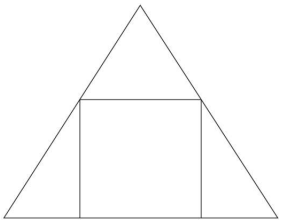


ABCD é um paralelogramo que possui ângulos agudos de 60°, e cujo menor lado mede 12 cm. Os pontos M e P são, respectivamente, pontos médios dos lados CD e AB. O ângulo MÂP mede 60°.

A área de ABCD, em cm², é igual a

a) $36\sqrt{3}$
b) $72\sqrt{3}$
c) $108\sqrt{3}$
d) $144\sqrt{3}$
e) $288\sqrt{3}$

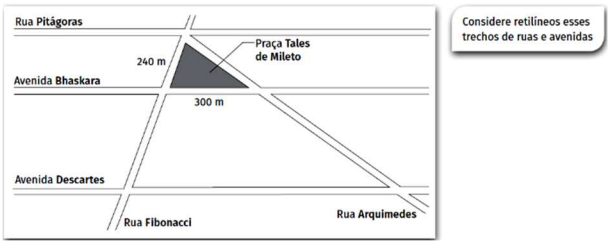
34 - (ENEM MEC/2020) Os alunos do curso de matemática de uma universidade desejam fazer uma placa de formatura, no formato de um triângulo equilátero, em que os seus nomes aparecerão dentro de uma região quadrada, inscrita na placa, conforme a figura.



Considerando que a área do quadrado, em que aparecerão os nomes dos formandos, mede 1 m², qual é aproximadamente a medida, em metro, de cada lado do triângulo que representa a placa? (Utilize 1,7 como valor aproximado para $\sqrt{3}$).

a) 1,6
b) 2,1
c) 2,4
d) 3,7
e) 6,4

35 - (Fatec SP/2020) Na figura temos um mapa onde se localiza a Praça Tales de Mileto. A prefeitura pretende cobri-la completamente com grama.



Admita que a medida do ângulo agudo formado entre a Rua Fibonacci e a Avenida Descartes é igual a 60º, e que a Avenida Bhaskara é paralela à Avenida Descartes.

Nessas condições, o total da área a ser gramada é, em metros quadrados, igual a

a) $20400 \cdot \sqrt{3}$
b) $20400 \cdot \sqrt{2}$
c) 27000
d) $18000 \cdot \sqrt{3}$
e) 12000

36 - (Famerp SP/2021) Em um sistema de coordenadas cartesianas, o segmento de reta que liga os pontos de coordenadas (–1, 2) e (7,8) é a base de um triângulo isósceles com terceiro vértice pertencente ao eixo y. A área desse triângulo, em unidades de área do plano cartesiano, é

a) 24.
b) 20.
c) 18.
d) 25.
e) 21.

37 - (UEMA/2022) O triângulo de sinalização, também chamado de dispositivo de sinalização luminosa e refletora de emergência, é um item obrigatório em todos os automóveis, de uso fundamental para avisar aos outros motoristas quando há alguém parado logo à frente, evitando, assim, acidentes. Esse triângulo de sinalização é previsto em lei pela resolução do CONTRAN nº 014/98 e suas especificações técnicas constam na resolução nº 827/96. Trata-se de um triângulo equilátero vermelho, com dimensão de 50cm de lado e 5cm de espessura na parte vermelha, conforme resolução nº 37/01 do MERCOSUL, que estabelece o padrão de triângulo de segurança, conforme o modelo. Para construí-lo, é necessário conhecer a medida de sua área para aquisição de material específico.



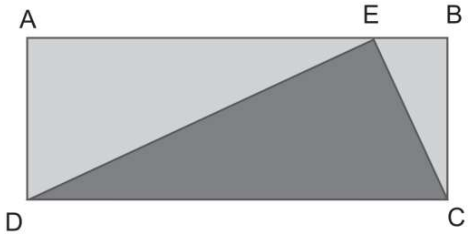
www.ebanataw.com.br/trafegando

Consideremos que o referido triângulo fosse confeccionado completamente com o material vermelho, ou seja, sem orifício interno.

Nessas condições, a área total do triângulo, considerando, apenas, a medida do lado, corresponde, em cm^2, a

a) 1385,60
b) 1167,75
c) 1237,50
d) 1102,88
e) 1082,50

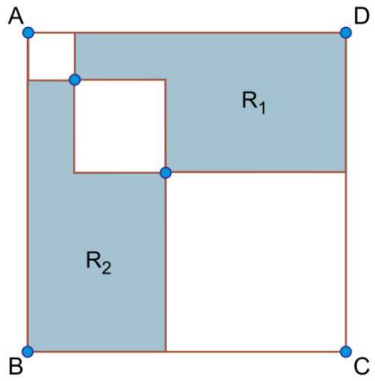
38 - (Fac. Cesgranrio RJ/2022) Na Figura, ABCD é um retângulo. O ponto E, pertencente ao lado AB, é tal que EA = 4EB.



Se A é a área do triângulo DEC, a área do triângulo CEB equivale a

a) 20% de A
b) 25% de A
c) 60% de A
d) 75% de A
e) 80% de A

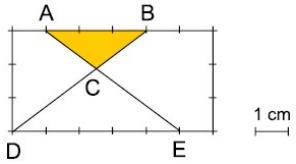
39 - (FMJ SP/2023) Um quadrado ABCD, com 28 cm de perímetro, foi dividido em 5 regiões, sendo 3 regiões quadradas e 2 regiões não convexas, R_1 e R_2, conforme mostra a figura.



Se as áreas das regiões quadradas são, respectivamente, 1 cm^2, 4 cm^2, 16 cm^2, o perímetro da região R_1 é igual a

a) 18 cm.
b) 20 cm.
c) 22 cm.
d) 24 cm.
e) 26 cm.

40 - (Famema SP/2024) O perímetro de um retângulo é de 18 cm. Esse perímetro foi dividido em 18 segmentos de 1 cm e, em seguida, foram traçados $\overline{AE}$ e $\overline{BD}$ para a construção do triângulo ABC, como mostra a figura.



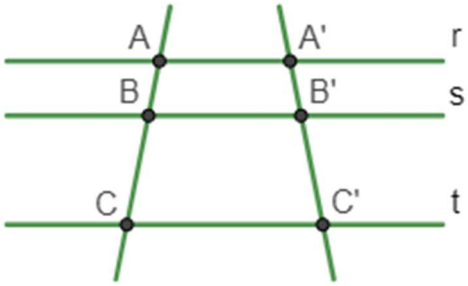
A área do triângulo ABC, em cm^2, é igual a

a) $\frac{9}{5}$
b) $\frac{33}{20}$
c) $\frac{27}{16}$
d) $\frac{5}{3}$
e) $\frac{81}{50}$

Semelhança de Triângulos

Teorema de Tales

Quando duas retas transversais cortam um conjunto de retas paralelas, a razão entre dois segmentos quaisquer de uma transversal é igual à razão entre os segmentos correspondentes da outra reta transversal.



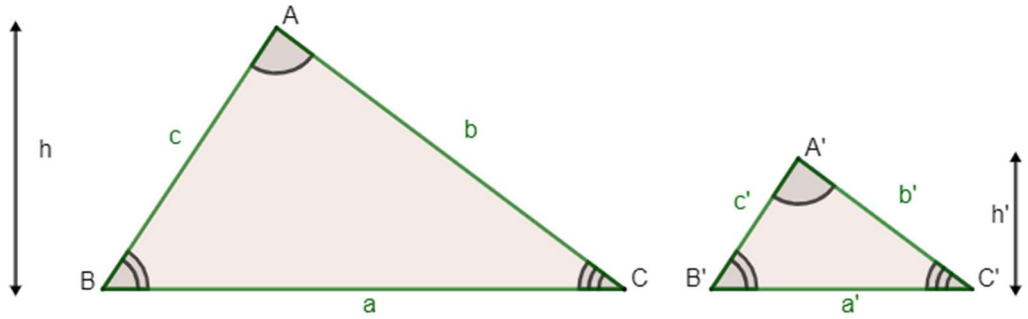
Desse modo:

$\frac{AC}{AB} = \frac{A'C'}{A'B'}$ ou $\frac{AC}{BC} = \frac{A'C'}{B'C'}$

Semelhança de Triângulos

Dizemos que dois triângulos são semelhantes quando eles possuem os três ângulos ordenadamente congruentes e os lados homólogos proporcionais.

Desse modo, quando dois triângulos são semelhantes, observamos:



Quanto aos ângulos:

$\hat{A} \cong \hat{A'}$

$\hat{B} \cong \hat{B'}$

$\hat{C} \cong \hat{C'}$

Quanto aos lados:

$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k$ (razão de semelhança)

Além disso, quando dois triângulos são semelhantes, ou seja, possuem razão de semelhança k, todos os outros elementos lineares homólogos desses triângulos também serão proporcionais e terão razão k.

Observação: São exemplos de elementos lineares de um triângulo a altura, o perímetro e a mediana.

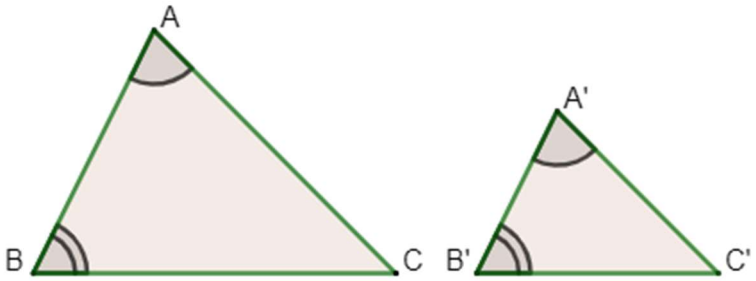
Portanto, os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes se, e somente se:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{h}{h'} = \frac{a+b+c}{a'+b'+c'} = k$$

Casos de Semelhança de Triângulos

- **Critério AA (ângulo-ângulo)**

Dois triângulos são semelhantes quando dois ângulos de um triângulo são congruentes a dois ângulos do outro.



Assim:

$$\widehat{A} \cong \widehat{A'}$$
$$\widehat{B} \cong \widehat{B'}$$

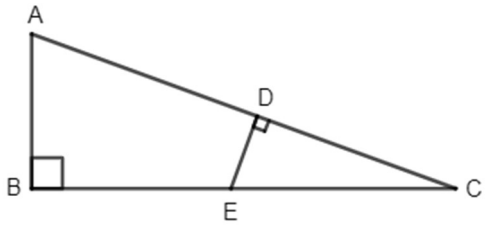
Exemplo: Considere os valores abaixo:

$\overline{AB} = 6$

$\overline{BC} = 9$

$\overline{CD} = 3$

Determine o valor do segmento $\overline{DE}$.



Nesse exemplo temos dois triângulos, ABC e CDE.

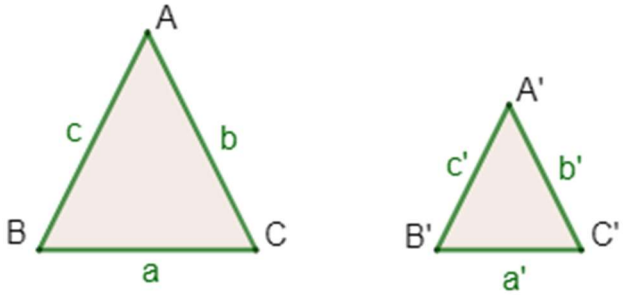
Analisando os triângulos percebemos que o ângulo $\hat{B}$ (90°) do triângulo ABC é congruente ao ângulo $\hat{D}$ (90°) do triângulo CDE. Além disso, o ângulo $\hat{C}$ é comum a ambos os triângulos, desse modo, eles possuem dois ângulos congruentes.

Temos, portanto, um caso de semelhança de triângulos do tipo ângulo-ângulo.

Logo, $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{CD}} \rightarrow \frac{6}{9} = \frac{\overline{DE}}{3} \rightarrow \overline{DE} = 2.$

- **Critério LLL (lado-lado-lado)**

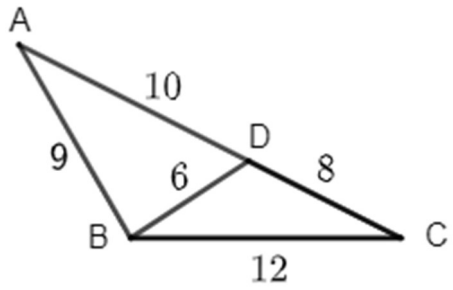
Dois triângulos são semelhantes quando os lados de um triângulo são proporcionais aos lados do outro.



Portanto:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

Exemplo: Quais triângulos da imagem ao lado são semelhantes? Qual a razão de semelhança entre eles?



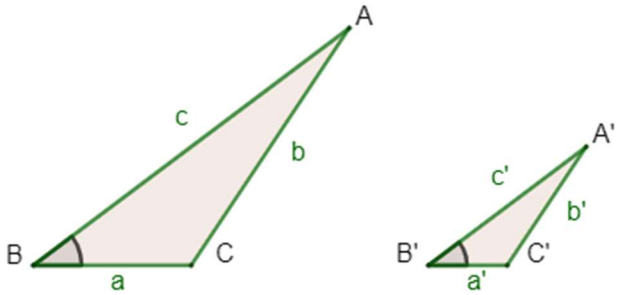
Analisando os triângulos ABC, BCD e ABD, percebemos que os triângulos semelhantes são ABC e BCD, uma vez que seus lados são proporcionais.

$$\frac{9}{6} = \frac{12}{8} = \frac{18}{12} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}.$$

A razão de semelhança entre os triângulos é igual a $\frac{3}{2}$.

- **Critério LAL (lado-ângulo-lado)**

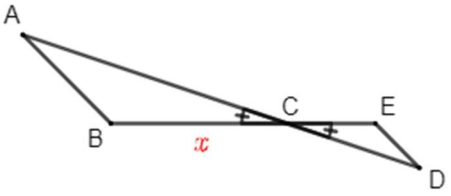
Dois triângulos são semelhantes quando apresentam um ângulo congruente localizado entre lados proporcionais.



Logo:

$$\hat{\boldsymbol{B}} \cong \hat{\boldsymbol{B}}'$$
$$\frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{c}'} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}'}$$

Exemplo: Sabendo que os triângulos ABC e CDE são semelhantes, e que $\overline{AC} = 7$, $\overline{CE} = 2$ e $\overline{CD} = 3,5$, calcule o valor de x.

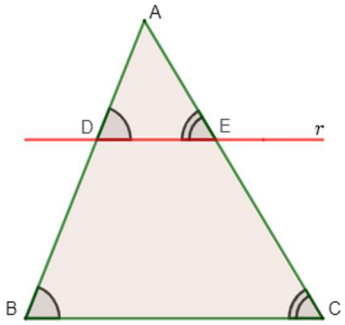


Podemos observar que o ângulo $\hat{C}$ é comum aos dois triângulos, ou seja, eles apresentam um ângulo congruente. Além disso, se eles são semelhantes, $\frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CE}}$.

Desse modo, $\frac{7}{3,5} = \frac{x}{2} \longrightarrow \boldsymbol{x = 4}$.

Teorema Fundamental da Semelhança de Triângulos

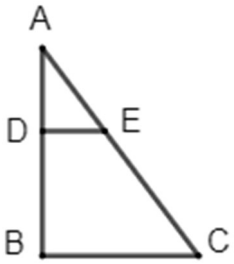
Uma reta paralela a um dos lados de um triângulo que intersecta seus outros dois lados em pontos distintos, determina outro triângulo semelhante ao primeiro.



Desse modo:

$$\hat{\boldsymbol{B}} \cong \hat{\boldsymbol{D}}$$
$$\hat{\boldsymbol{C}} \cong \hat{\boldsymbol{E}}$$

Logo, os triângulos ABC e ADE são semelhantes.



Exemplo: Considere os seguintes valores para o triângulo abaixo em que $DE \parallel BC$: $\overline{AB} = 12$, $\overline{BC} = 6$ e $\overline{DE} = 2$. Qual o valor de $\overline{AD}$?

Como DE é paralelo a BC, podemos afirmar que os triângulos ABC e ADE são semelhantes.

Desse modo, $\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}} \rightarrow \frac{\overline{AD}}{12} = \frac{2}{6} \rightarrow \boldsymbol{\overline{AD} = 4}$

Exercícios

01 - (ETEC SP/2017) Produzir sombras na parede é uma brincadeira simples. Para brincar, basta que você providencie uma vela e um ambiente escuro.

Em certa noite, quando a luz havia acabado, Fernando e seu irmãozinho, aproveitaram a luz de uma vela acesa deixada sobre a mesa para brincarem com sombras. Posicionou, cuidadosamente, sua mão espalmada entre a chama e a parede, de forma que a palma da mão estivesse paralela à parede. A ação assustou seu irmãozinho, uma vez que a sombra projetada na parede tinha cinco vezes a largura da mão espalmada de Fernando.

Sabendo que a distância da mão de Fernando até a chama da vela era de 0,5 m e que a largura de sua mão quando espalmada é de 20 cm, a distância entre a parede e a chama da vela (considerada puntiforme), era de

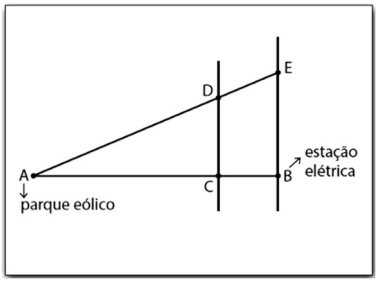
a) 0,5 m.
b) 1,0 m.
c) 2,0 m.
d) 2,5 m.
e) 5,0 m.

02 - (ETEC SP/2016) Os parques eólicos marítimos apresentam vantagens em relação aos parques eólicos terrestres, pois neles não há problema com o impacto sonoro e o desgaste das turbinas é menor, devido a menor turbulência do vento.



Na instalação dos parques eólicos marítimos, é preciso calcular sua distância até o continente, a fim de instalar os cabos condutores de eletricidade.

Observe o esquema que representa um parque eólico (A), uma estação elétrica (B) no continente e pontos auxiliares C, D e E para o cálculo da distância do parque eólico até a estação elétrica no continente.



No esquema temos:

- Ponto A: parque eólico marítimo;
- Ponto B: estação elétrica no continente;
- Ponto C: ponto auxiliar $(C \in \overline{AB})$;
- Ponto D: ponto auxiliar $(D \in \overline{AE})$;
- Ponto E: ponto auxiliar;
- A medida do segmento $\overline{CD}$ é 150 metros;
- A medida do segmento $\overline{BC}$ é 100 metros;
- A medida do segmento $\overline{BE}$ é 200 metros;
- Os segmentos $\overline{CD}$ e $\overline{BE}$ são paralelos entre si.

Assim sendo, é correto afirmar que a distância do parque eólico marítimo até a estação elétrica no continente é, em metros,

a) 75.
b) 100.
c) 300.
d) 400.
e) 425.

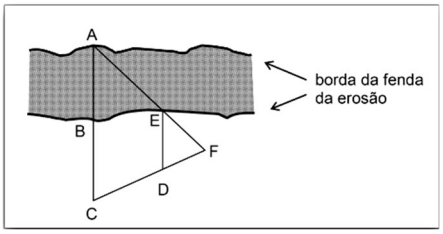
03 - (ETEC SP/2016) A erosão é o processo de desgaste, transporte e sedimentação das rochas e, principalmente, dos solos. Ela pode ocorrer por ação de fenômenos da natureza ou do ser humano.

A imagem mostra uma fenda no solo, proveniente de erosão.



<http://tinyurl.com/pdqj75z> Acesso em: 25.08.2015. Original colorido.

Para determinar a distância entre os pontos A e B da fenda, pode-se utilizar o modelo matemático da figura.



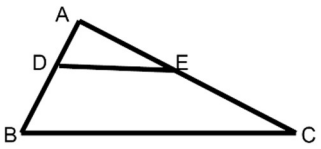
Na figura, tem-se:

- os triângulos AFC e EFD ;
- o ponto E pertencente ao segmento $\overline{AF}$;
- o ponto D pertencente ao segmento $\overline{CF}$;
- os pontos C, D e F pertencentes ao terreno plano que margeia a borda da fenda; e
- as retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{ED}$ que são paralelas entre si.

Sabendo-se que BC = 5 m, CD = 3 m, DF = 2 m e ED = 4,5 m, então, a distância entre os pontos A e B é, em metros,

a) 6,25.
b) 6,50.
c) 6,75.
d) 7,25.
e) 7,75.

04 - (IFG GO/2016) Seja o triângulo ABC da figura abaixo com as seguintes medidas: AC = 50 cm; AE = 20 cm e AD = 10 cm.



Sabendo que $\overline{DE}$ é paralelo ao lado $\overline{BC}$, a medida do lado $\overline{AB}$ é

a) 15 cm.
b) 20 cm.
c) 25 cm.
d) 30 cm.
e) 35 cm.

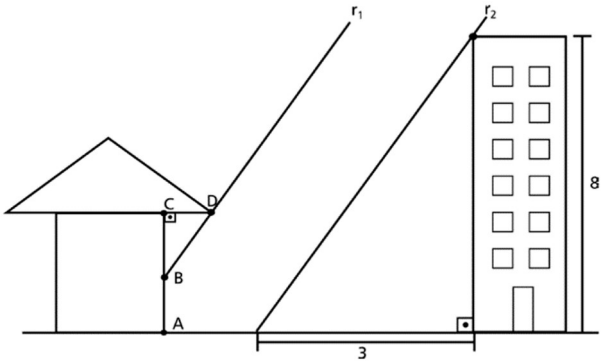
05 - (Fac. Cesgranrio RJ/2016) Aldo caminha em direção a um poste de 8 m de altura. No topo desse poste, há uma lâmpada acesa. Quando Aldo se encontra a 12 m de distância do poste, a luz incide sobre ele e forma no chão uma sombra de 4 m.

Se Aldo continuar caminhando em direção ao poste, qual o tamanho, em metros, da sombra quando ele estiver a uma distância de 9 m do poste?

a) 5
b) 4
c) 3

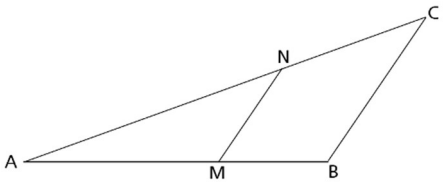
d) 2
e) 1

06 - (Cefet MG/2016) Na figura a seguir, o segmento $\overline{AC}$ representa uma parede cuja altura é 2,9 m. A medida do segmento $\overline{AB}$ é 1,3 m o segmento $\overline{CD}$ representa o beiral da casa. Os raios de sol r_1 e r_2 passam ao mesmo tempo pela casa e pelo prédio, respectivamente.



Se r_1 é paralelo com r_2, então, o comprimento do beiral, em metros, é
a) 0,60.
b) 0,65.
c) 0,70.
d) 0,75.

07 - (Cefet MG/2016) No triângulo ABC da figura a seguir, $\overline{MN} // \overline{BC}$ e a medida de $\overline{AC}$ é igual a 30 cm. Sabe-se que o ponto M dista 8 cm do vértice B, que $\overline{AB}$ mede $\frac{2}{3}$ da medida de $\overline{AC}$ e que a medida de $\overline{BC}$ vale a metade da medida de $\overline{AC}$.



O perímetro do triângulo AMN da figura, mede, em cm,

a) 15.
b) 21.
c) 27.
d) 39.

TEXTO: 1 - Comum à questão: 8

O acendedor de lampiões

Lá vem o acendedor de lampiões da rua!
Este mesmo que vem infatigavelmente,
Parodiar o sol e associar-se à lua
Quando a sombra da noite enegrece o poente!

Um, dois, três lampiões, acende e continua
Outros mais a acender imperturbavelmente,
À medida que a noite aos poucos se acentua
E a palidez da lua apenas se pressente.

Triste ironia atroz que o senso humano irrita: —
Ele que doura a noite e ilumina a cidade,
Talvez não tenha luz na choupana em que habita.

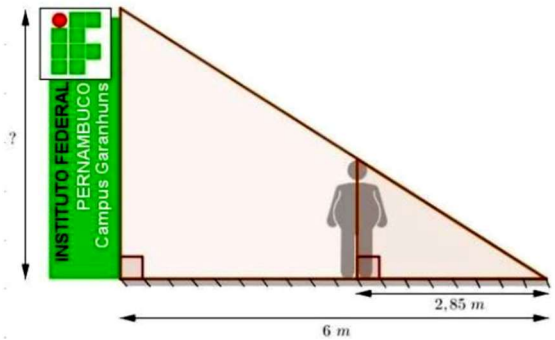
Tanta gente também nos outros insinua
Crenças, religiões, amor, felicidade,
Como este acendedor de lampiões da rua!

(LIMA, Jorge de. Melhores poemas.
3. ed. São Paulo: Global, 2006. p. 25)

08 - (PUC GO/2016) Um acendedor de lampiões percebeu que a luz de um lampião sobre um poste de altura "x" projetava uma sombra de 80 centímetros de um objeto fixo distante do poste 5 metros. Mudando a posição do lampião no poste, ele constatou que a sombra do mesmo objeto era de 2 metros. Nessas condições, em que altura do poste ele deve ter colocado o lampião no segundo momento? Assinale a única alternativa correta:

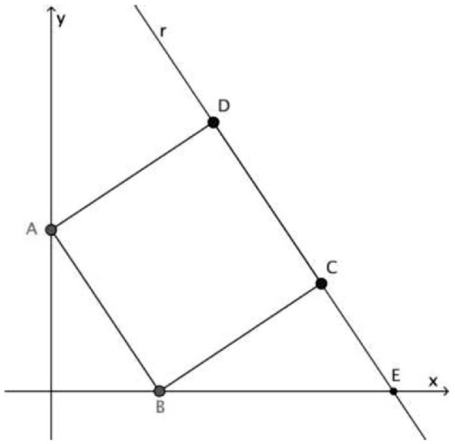
a) (14/25)x.
b) (14/27)x.
c) (14/29)x.
d) (14/31)x.

09 - (IFPE/2017) Ivo é estudante do *Campus* Garanhuns e, certo dia, utilizando uma trena, constatou que o totem do *campus* projetava uma sombra de 6 m. Com a ajuda de um amigo, conseguiu constatar que sua própria sombra, no mesmo horário, media 2,85 m. Conforme o esquema mostrado na figura abaixo e sabendo que Ivo mede 1,90 m, calcule a altura do totem.



a) 8 metros.
b) 4 metros.
c) 3,8 metros.
d) 3,15 metros.
e) 5 metros.

10 - (UniCesumar PR/2017) Os pontos A(0, 3) e B(2, 0) são vértices de um quadrado ABCD, conforme mostra a figura.



A reta r passa pelos vértices C e D desse quadrado e intersecta o eixo x no ponto de abscissa

a) $\frac{539}{90}$

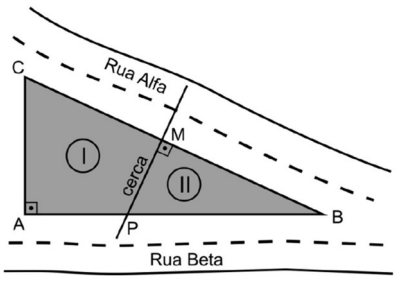
b) $\frac{92}{15}$

c) $\frac{31}{5}$

d) $\frac{563}{90}$

e) $\frac{19}{3}$

11 - (EPCAR EA/2016) Um terreno com formato de um triângulo retângulo será dividido em dois lotes por uma cerca feita na mediatriz da hipotenusa, conforme mostra figura.



Sabe-se que os lados AB e BC desse terreno medem, respectivamente, 80m e 100m. Assim, a razão entre o perímetro do lote I e o perímetro do lote II, nessa ordem, é

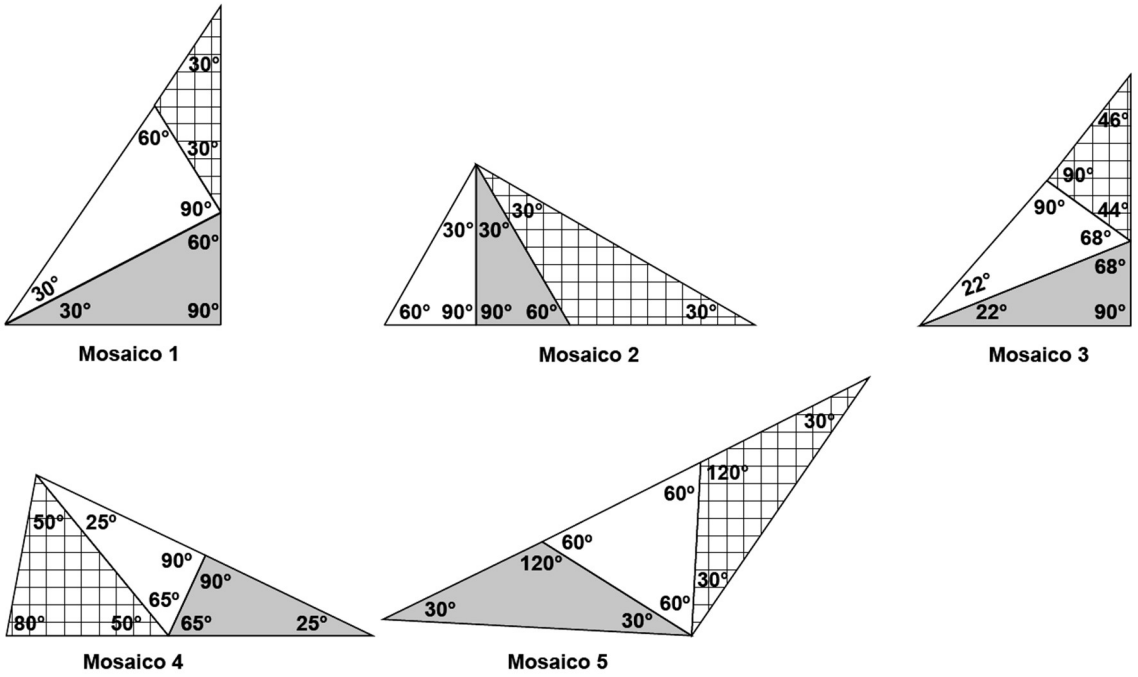
a) $\frac{5}{3}$

b) $\frac{10}{11}$

c) $\frac{3}{5}$

d) $\frac{11}{10}$

12 - (ENEM MEC/2016) Pretende-se construir um mosaico com o formato de um triângulo retângulo, dispondo-se de três peças, sendo duas delas triângulos retângulos congruentes e a terceira um triângulo isósceles. A figura apresenta cinco mosaicos formados por três peças.

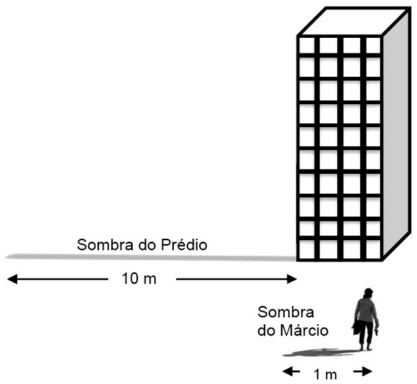


Na figura, o mosaico que tem as características daquele que se pretende construir é o

a) 1.
b) 2.
c) 3.
d) 4.
e) 5.

13 - (IFSC/2016) Em um determinado local e horário do dia, Márcio observou que sua sombra era de 1 metro e que a sombra projetada por um prédio em construção, no mesmo local e horário em que ele estava, era de 10 metros.

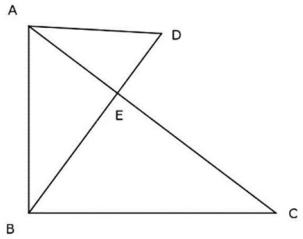
Sabendo-se que Márcio tem 1,62m de altura, é CORRETO afirmar que a altura desse prédio é de, aproximadamente,



a) 6,2 metros.
b) 8,1 metros.
c) 16,2 metros.

d) 14 metros.
e) 13,8 metros.

14 - (Unioeste PR/2016) De acordo com a figura abaixo, sabe-se que ABC é um triângulo retângulo, reto em B, com medidas AB e BC iguais a 3 e 4, respectivamente. Os segmentos BD e AC se interceptam, no ponto E, formando um ângulo de 90 graus. Além disso, a medida de BE é o dobro da medida de DE. Com base nestas informações e na figura, é CORRETO afirmar que o segmento AD mede



a) 2.
b) $\frac{11}{5}$.
c) $\frac{\sqrt{117}}{5}$.
d) $\frac{\sqrt{131}}{5}$.
e) 3.

15 - (ESPM SP/2016) Num mapa, uma estrada retilínea passa sucessivamente pelas cidades A, B e C e uma cidade D, distante 120 km de A, está localizada de tal forma que o ângulo DÂB mede 36°. Um viajante fez o trajeto AB, BD e DC, percorrendo em cada trecho a mesma distância. Se ele tivesse ido diretamente de A até C, teria percorrido uma distância de:

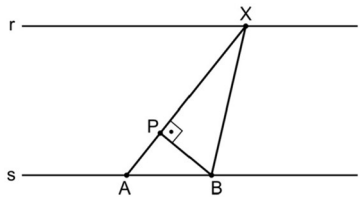
a) 120 km
b) $60\sqrt{3}$ km
c) $(120 \cdot \cos 36°)$ km
d) $\frac{120}{\cos 36°}$ km
e) 140 km

16 - (Uniube MG/2016) Natanias e Reinaldo moram na mesma rua e prestam serviços a uma determinada empresa, de tal forma que os trajetos percorridos, embora distintos, para se deslocarem de suas casas até a empresa, formam uma região triangular. Sabendo que a casa de Natanias está sendo representada pelo vértice A, com ângulo medindo (3x – 10) graus; a casa de Reinaldo, representada pelo vértice B, com ângulo medindo (2x + 20) graus; e a empresa representada pelo vértice C, com ângulo externo de 110 graus, podemos afirmar que:

a) Natanias mora do lado direito da empresa.
b) Reinaldo mora do lado direito da empresa.
c) Ambos moram à mesma distância da empresa.

d) Natanias mora mais perto da empresa.
e) Reinaldo mora mais perto da empresa.

17 - (EPCAR EA/2017) Considere duas calçadas r e s, paralelas entre si, a uma distância de 6 m uma da outra.

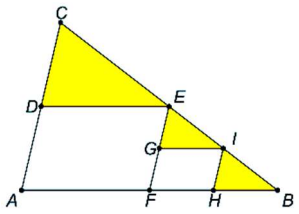


Duas pessoas distantes 5 m uma da outra se encontram nos pontos A e B definidos na calçada s. Na calçada r está uma placa de parada de ônibus no ponto X que dista 10 m da pessoa posicionada em A.

Quando a pessoa em A se deslocar para P sobre o segmento $\overline{AX}$, a distância que irá separá-la da pessoa posicionada no ponto B, em metros, será de

a) 3
b) 4
c) 5
d) 6

18 - (OBMEP/2017) Na figura abaixo, D, E e F são pontos médios dos lados do triângulo ABC, e G, H e I são pontos médios dos lados do triângulo FBE. A área do triângulo ABC é 48 cm². Qual é a área da região destacada em amarelo?



a) 16 cm²
b) 18 cm²
c) 20 cm²
d) 22 cm²
e) 24 cm²

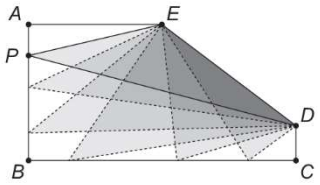
19 - (Unievangélica GO/2017) Dado o triângulo ABC, sendo A(1,3), B(7,3) e C(7,11), quais são as medidas dos lados, em cm, de um triângulo semelhante ao anterior, cujo perímetro mede 60cm?

a) 15, 25, 30
b) 12, 18, 20
c) 15, 20, 25
d) 16, 20, 24

20 - (UPE/2018) Os lados de um triângulo medem, respectivamente, 5 cm, 7 cm e 8 cm. Quais são as respectivas medidas dos lados de um triângulo semelhante a este cujo perímetro mede 0,6 m?

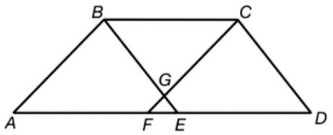
a) 15 cm, 21 cm e 24 cm
b) 12 cm, 22 cm e 26 cm
c) 18 cm, 20 cm e 22 cm
d) 11 cm, 23 cm e 26 cm
e) 16 cm, 18 cm e 26 cm

21 - (OBMEP/2019) A figura mostra um pentágono ABCDE tal que AB = 4, BC = 8, CD = 1, AE = 4, e os ângulos ABC, BCD e EAB são retos. O ponto P se move sobre os lados AB e BC. Quantas posições o ponto P pode ocupar sobre os lados AB e BC de modo que o triângulo PDE seja isósceles?



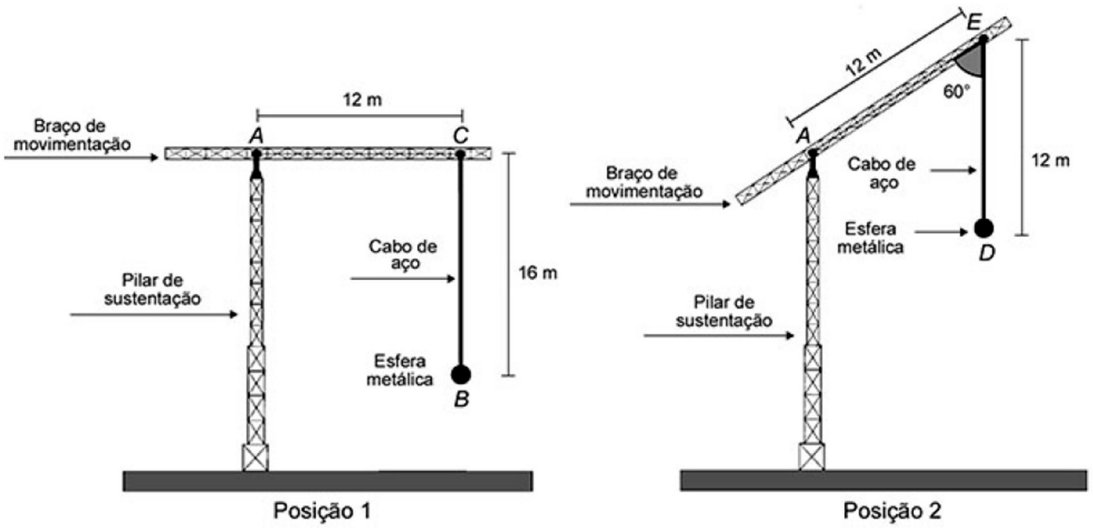
a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

22 - (IFMS/2019) A figura mostra o quadrilátero ABCD, em que $\overline{AD}$ é paralelo a $\overline{BC}$; $\overline{BE}$ é paralelo a $\overline{CD}$; e $\overline{AB}$ é paralelo a $\overline{CF}$. G é o ponto de intersecção dos segmentos $\overline{BE}$ e $\overline{CF}$. Sabendo que os ângulos $B\hat{A}D$ e $C\hat{D}A$ medem, respectivamente, 52° e 57°, determine a medida do ângulo $B\hat{G}C$.



a) 62°
b) 71°
c) 83°
d) 90°
e) 109°

23 - (ENEM MEC/2020) Considere o guindaste mostrado nas figuras, em duas posições (1 e 2). Na posição 1, o braço de movimentação forma um ângulo reto com o cabo de aço *CB* que sustenta uma esfera metálica na sua extremidade inferior.
Na posição 2, o guindaste elevou seu braço de movimentação e o novo ângulo formado entre o braço e o cabo de aço *ED*, que sustenta a bola metálica, é agora igual a 60°.



Assuma que os pontos A, B e C, na posição 1, formam o triângulo T_1 e que os pontos A, D e E, na posição 2, formam o triângulo T_2, os quais podem ser classificados em obtusângulo, retângulo ou acutângulo, e também em equilátero, isósceles ou escaleno.

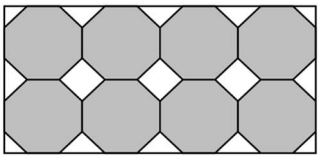
Segundo as classificações citadas, os triângulos T_1 e T_2 são identificados, respectivamente, como

a) retângulo escaleno e retângulo isósceles.
b) acutângulo escaleno e retângulo isósceles.
c) retângulo escaleno e acutângulo escaleno.
d) acutângulo escaleno e acutângulo equilátero.
e) retângulo escaleno e acutângulo equilátero.

24 - (ENEM MEC/2020) Azulejo designa peça de cerâmica vitrificada e/ou esmaltada usada, sobretudo, no revestimento de paredes. A origem das técnicas de fabricação de azulejos é oriental, mas sua expansão pela Europa traz consigo uma diversificação de estilos, padrões e usos, que podem ser decorativos, utilitários e arquitetônicos.

Disponível em: www.itaucultural.org.br. Acesso em: 31 jul. 2012.

Azulejos no formato de octógonos regulares serão utilizados para cobrir um painel retangular conforme ilustrado na figura.



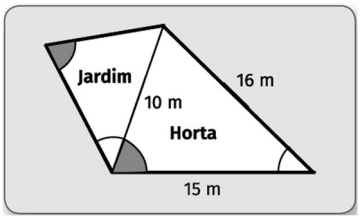
Entre os octógonos e na borda lateral dessa área, será necessária a colocação de 15 azulejos de outros formatos para preencher os 15 espaços em branco do painel. Uma loja oferece azulejos nos seguintes formatos:

1. Triângulo retângulo isósceles;
2. Triângulo equilátero;
3. Quadrado.

Os azulejos necessários para o devido preenchimento das áreas em branco desse painel são os de formato

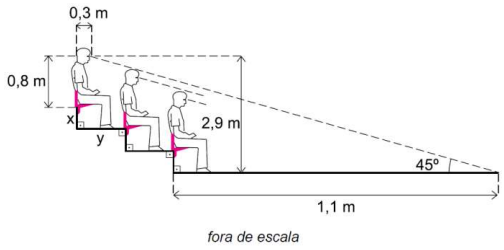
a) 1.
b) 3.
c) 1 e 2.
d) 1 e 3.
e) 2 e 3.

25 - (ETEC SP/2020) João Pedro separou parte de seu terreno para plantar e decidiu dividi-lo em dois triângulos semelhantes, um seria destinado a uma horta e o outro a um jardim. Antes de sair para comprar arame, João mediu apenas as dimensões da horta, pois, assim, conseguiria determinar as dimensões do jardim. Sabendo que ele quer cercar a área de plantações com uma cerca tripla e que não usará arame para separar o jardim da horta, a quantidade de arame que João precisará comprar, em metros, é:



a) 169,875
b) 139,875
c) 150
d) 127,125
e) 142,125

26 - (Famema SP/2021) A figura representa uma arquibancada com degraus de mesma altura (x metros) e mesma extensão (y metros).

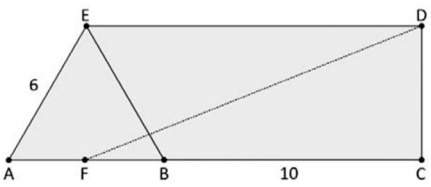


fora de escala

O valor de x + y será igual a

a) 1,85 m.
b) 1,80 m.
c) 1,90 m.
d) 1,75 m.
e) 1,95 m.

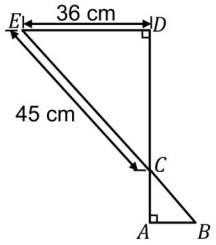
27 - (Fuvest SP/2021)



Na figura, os segmentos AC e DE são paralelos entre si e perpendiculares ao segmento CD; o ponto B pertence ao segmento AC; F é o ponto médio do segmento AB; e ABE é um triângulo equilátero. Além disso, o segmento BC mede 10 unidades de comprimento e o segmento AE mede 6 unidades de comprimento. A medida do segmento DF, em unidades de comprimento, é igual a

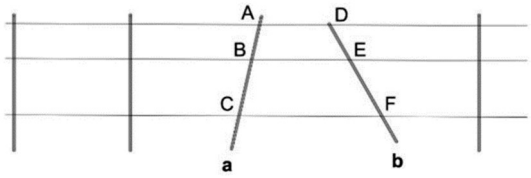
a) 14.
b) 15.
c) 16.
d) 17.
e) 18.

28 - (UEG GO/2022) Considere a imagem formada por dois triângulos retângulos. Sabendo-se que a medida do segmento EB é 50 cm, qual é a medida do segmento AB?



a) 3 cm
b) 4 cm
c) 5 cm
d) 9 cm
e) 27 cm

29 - (IFMS/2019) Ao construir uma cerca, Segrob fincou todas as madeiras de maneira perpendicular ao solo, porém duas delas, indicadas por **a** e **b** na figura, ficaram inclinadas. Ele sabe que os arames da cerca estão paralelos entre si.

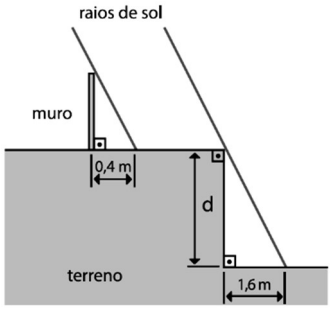


Sabendo que $\overline{AB} = 6x + 2$, $\overline{BC} = 10x - 1$, $\overline{DE} = 2$ e $\overline{EF} = 3$, podemos afirmar que o valor de x é

a) 2.
b) 5.
c) 3.
d) 6.
e) 4.

30 - (ETEC SP/2019) Sem dispor de uma trena de comprimento suficiente, um pedreiro determinou a medida do desnível (d) de um terreno, valendo-se da propriedade da propagação retilínea da luz.

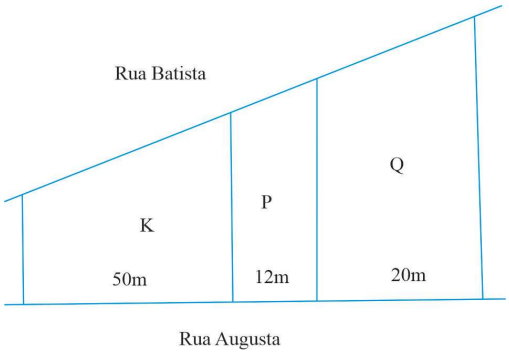
Observou que, em determinado momento do dia, um muro vertical de 1,5 m de altura, construído na parte alta do terreno, projetava uma sombra de 0,4 m sobre a parte superior do terreno, que era plana e horizontal. No mesmo instante, o desnível do terreno projetava sobre a parte mais baixa, igualmente horizontal, uma sombra de 1,6 m, conforme a figura.



Com suas observações, foi capaz de deduzir corretamente que o desnível do terreno era de

a) 6,0 m.
b) 8,0 m.
c) 10,0 m.
d) 12,0 m.
e) 14,0 m.

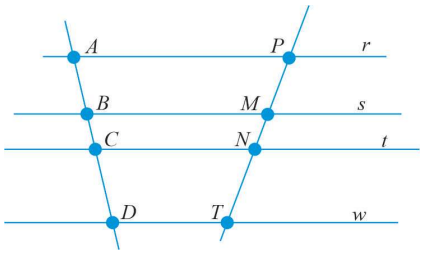
31 - (IFPI/2020) Sabe-se que três terrenos, K, P, Q, têm frente para a rua Augusta e para a rua Batista, e as quatro divisas laterais são paralelas, conforme a figura.



Qual a medida da frente para a rua Batista de cada terreno, K, P, Q, respectivamente, sabendo que a frente total para essa rua tem 246m?

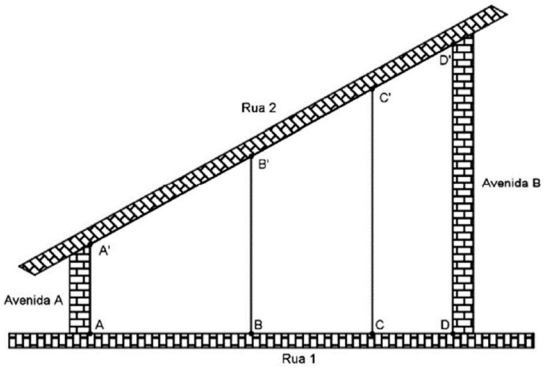
a) 100m, 24m, 40m
b) 120m, 30m, 36m
c) 150m, 36m, 60m
d) 160m, 40m, 50m
e) 90m, 15m, 30m

32 - (IFPI/2020) Na figura a seguir, as retas *r, s, t* e *w* são paralelas. Se $AB = x + 7$, $CD = 25 - 2x$, $PM = 16$ e $NT = 20$, qual deve ser o valor de x?



a) 4
b) 5
c) 6
d) 7
e) 8

33 - (UFU MG/2018) Uma área delimitada pelas Ruas 1 e 2 e pelas Avenidas A e B tem a forma de um trapézio ADD'A', com AD = 90 m e A'D' = 135 m, como mostra o esquema da figura abaixo.

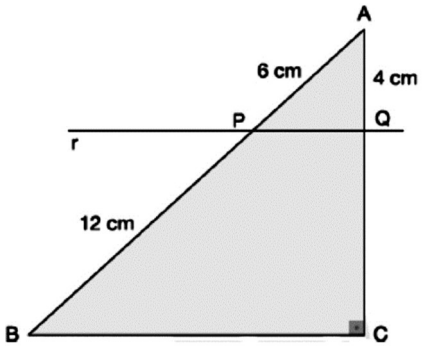


Tal área foi dividida em terrenos ABB'A', BCC'B' e CDD'C', todos na forma trapezoidal, com bases paralelas às avenidas tais que AB = 40 m, BC = 30 m e CD = 20 m.

De acordo com essas informações, a diferença, em metros, A'B' – C'D' é igual a

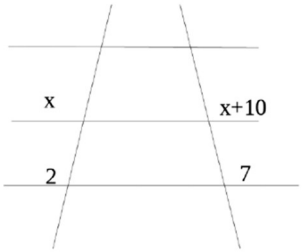
a) 20.
b) 30.
c) 15.
d) 45.

34 - (Unifor CE/2018) A figura abaixo mostra um triângulo ABC retângulo em C. Uma reta r, paralela ao lado $\overline{BC}$ do triângulo, intercepta os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ nos pontos P e Q respectivamente. Se AP = 6 cm , PB = 12 cm e AQ = 4 cm, qual é a medida do lado $\overline{BC}$?

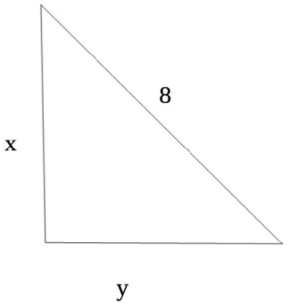


a) $2\sqrt{5}$ cm
b) $3\sqrt{5}$ cm
c) $6\sqrt{5}$ cm
d) $6\sqrt{2}$ cm
e) $8\sqrt{2}$ cm

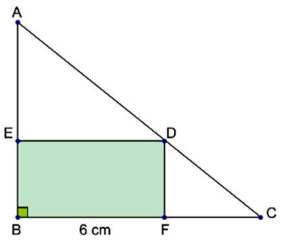
35 - (UEFS pontos D, lados de retângulo retângulo 6 cm, mostra a



E e F um ABC,



BA/2018) Os pertencem aos triângulo determinando o BFDE, com BF = conforme figura.



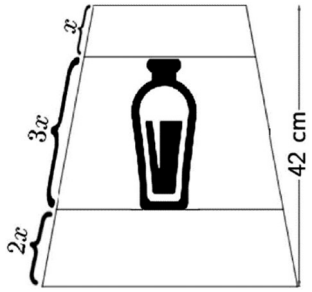
Dadas as medidas AB = 8 cm e BC = 10 cm, o comprimento do segmento BE é

a) 2,4 cm.
b) 2,7 cm.
c) 3 cm.
d) 3,2 cm.
e) 3,5 cm.

36 - (IFBA/2018) Abaixo estão duas retas paralelas cortadas por duas transversais e um triângulo retângulo. Então, o valor da área de um quadrado de lado "y" u.c., em unidades de área, é?

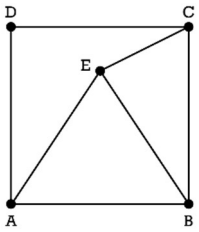
a) 48
b) 58
c) 32
d) 16
e) 28

37 - (Unifor CE/2018) A figura acima mostra um armário de banheiro que tem o formato de um trapézio. A altura total do armário é de 42 cm e ele está dividido em três compartimentos. As medidas de um dos lados de cada compartimento estão indicadas na figura. Desprezando a espessura das divisórias, podemos afirmar que no compartimento do meio podemos colocar um produto com altura máxima de



a) 10 cm.
b) 14 cm.
c) 18 cm.
d) 21 cm.
e) 25 cm.

38 - (ESPM SP/2019) ABCD é um quadrado e ABE é um triângulo isósceles de base AB, interno ao quadrado.



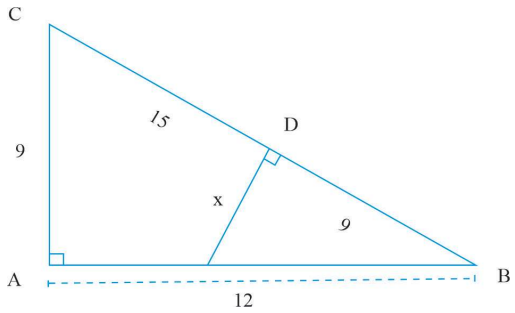
Se o ângulo BÊC mede 90°, a medida do ângulo ABE é igual a:

a) 15°
b) 30°
c) 45°
d) 60°
e) 75°

39 - (UEG GO/2019) Três ruas paralelas são cortadas por duas avenidas transversais nos pontos A, B e C da Avenida 1 e nos pontos D, E e F da Avenida 2, de tal forma que AB = 90 m, BC = 100 m, DE = x e EF = 80 m. Nessas condições, o valor de x é

a) 62 m
b) 60 m
c) 72 m
d) 74 m
e) 68 m

40 - (IFPI/2020) Dois triângulos são semelhantes se dois ângulos de um triângulo são congruentes a dois ângulos do outro. Tendo-se essa informação, qual o valor de *x* na figura:



a) 4,50
b) 4,76
c) 5,25
d) 5,80
e) 6,75

41 - (Uncisal AL/2020) O **Monumento ao Empresário**, ilustrado na figura I a seguir, localiza-se na cidade do Porto, em Portugal, e possui características geométricas marcantes. Suponha que, inspirado nesse monumento, um projetista tenha idealizado uma pequena escultura decorativa nas dimensões apresentadas na figura II a seguir para o triângulo retângulo ABC e para o retângulo sombreado. A escultura não vai reproduzir integralmente as cerâmicas do monumento, mas terá uma placa retangular colada no local sombreado.



Figura I

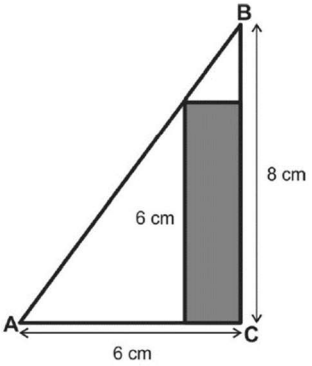


Figura II

Disponível em: https://pt.wikipedia.org.
Acesso em: dez. 2016 (adaptado).

Considerando-se as dimensões informadas, o lado menor da placa retangular da escultura decorativa medirá

a) 1 cm.
b) 1,2 cm.
c) 1,5 cm.
d) 2 cm.
e) 3 cm.

42 - (IFSC/2020) Como foi medida a altura da pirâmide de Queóps? Há duas versões para este fato.

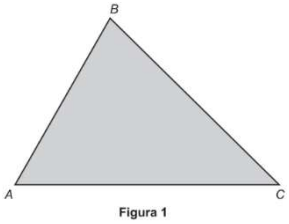
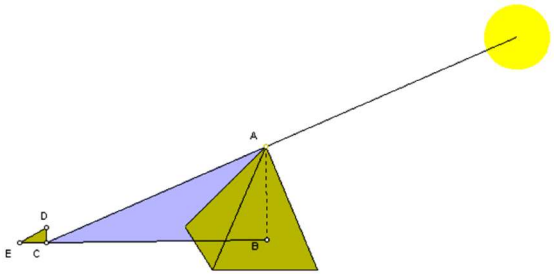


Figura 1

Hicrônimos, discípulo de Aristóteles, diz que Tales mediu o comprimento da sombra da pirâmide no momento em que nossas sombras são iguais a nossa altura, assim medindo a altura da pirâmide.
Plutarco diz que fincando uma vara vertical no extremo da sombra projetada pela pirâmide, construímos à sombra projetada da vara, formando no solo dois triângulos semelhantes.
Notamos que, neste relato, é necessário o conhecimento de teoremas sobre triângulos semelhantes.
Observando o desenho abaixo, a vara colocada no extremo C da sombra da pirâmide forma, com sua sombra, o triângulo DCE que é semelhante ao triângulo ABC



Fonte da imagem e do texto:
http://www.matematica.br/historia/calpiramide.html

Sabendo que a altura da vara é de 2 m, a sua sombra projetada é de 3 m e a distância entre B e C é de 210 m, qual é a altura aproximada da pirâmide de Queóps?

Assinale a alternativa CORRETA.

a) 160 m
b) 140 m
c) 150 m
d) 180 m
e) 170 m

43 - (ENEM MEC/2021) Uma indústria recortou uma placa de metal no formato triangular ABC, conforme Figura 1, com lados 18, 14 e 12 cm.
Posteriormente, a peça triangular ABC foi dobrada, de tal maneira que o vértice B ficou sobre o segmento $\overline{AC}$, e o segmento $\overline{DE}$ ficou paralelo ao lado $\overline{AC}$, conforme Figura 2.¨

Sabe-se que, na Figura 1, o ângulo $A\hat{C}B$ é menor que o ângulo $C\hat{A}B$ e este é menor que o ângulo $A\hat{B}C$, e que os cortes e dobraduras foram executados corretamente pelas máquinas.

Nessas condições, qual é o valor da soma dos comprimentos, em centímetro, dos segmentos $\overline{DB}$, $\overline{BE}$ e $\overline{EC}$?

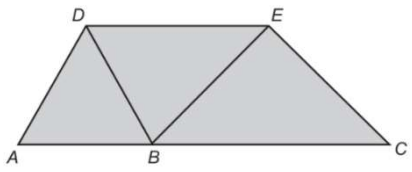


Figura 2

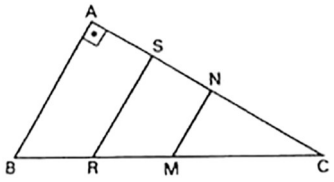
a) 19
b) 20
c) 21
d) 23
e) 24

44 - (IFPI/2020) Em um triângulo *ABC*, os lados *AB*, *AC* e *BC* medem 24 cm, 32 cm e 40 cm, respectivamente. Um triângulo *DEF*, semelhante ao triângulo *ABC*, tem seu menor lado medindo 42 cm.

Então, qual é o perímetro do triângulo *DEF*?

a) 160 cm
b) 162 cm
c) 164 cm
d) 166 cm
e) 168 cm

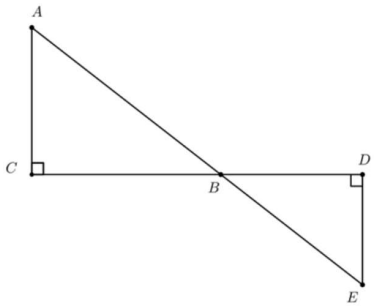
45 - (IFBA/2020) Na figura abaixo BM = BC/2, BR = BC/4 e MN é paralelo a RS e AB. Nestas condições, a porcentagem da área do trapézio RMNS correspondente à área do triângulo ABC é de:



a) 25%
b) 31,25%
c) 35%
d) 37,75%
e) 39%

46 - (UFPR/2022) Na figura abaixo, considere os segmentos de reta *AE* e *CD*, e os triângulos retângulos *ABC* e *BDE*. Suponha que o comprimento de *AB* é igual a x, e que o comprimento de *AC* é igual a y. Considerando que os segmentos *AC* e *BD* têm o

mesmo comprimento, qual das alternativas abaixo corresponde ao valor do comprimento do segmento *DE*?



a) $\frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}}$

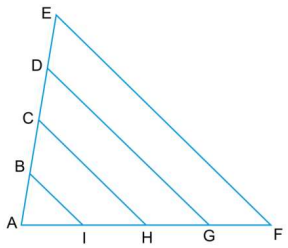
b) $\frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{y}$

c) $y\sqrt{(x^2 - y^2)}$

d) $\frac{y^2}{\sqrt{x^2 - y^2}}$

e) $\frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{y^2}$

47 - (Famema SP/2023) Na figura a seguir, AE = 8,5 cm, EF = 12 cm e AF = 10 cm.¨Sabe-se ainda que AB = BC = CD = DE e que $\overline{BI}$, $\overline{CH}$, $\overline{DG}$ e $\overline{EF}$ são segmentos paralelos.

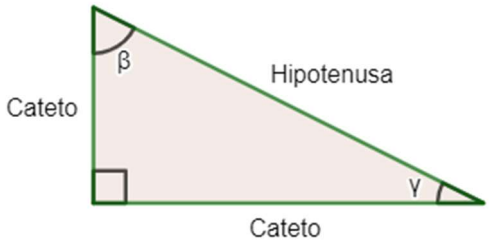


Nas condições descritas, a medida de $\overline{BI}$ é

a) 3 cm.
b) 4 cm.
c) 2,5 cm.
d) 4,5 cm.
e) 3,5 cm.

Relações Métricas e Trigonométricas no Triângulo Retângulo

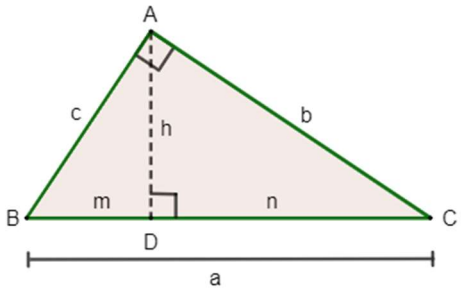
Relações Métricas no Triângulo Retângulo



No triângulo retângulo seu maior lado é chamado de hipotenusa e os outros dois lados são chamados de catetos.

Os catetos são os lados perpendiculares entre si, enquanto a hipotenusa é o lado oposto ao ângulo de 90°.

Observe o triângulo ABC.



Esse triângulo é composto pelos elementos:

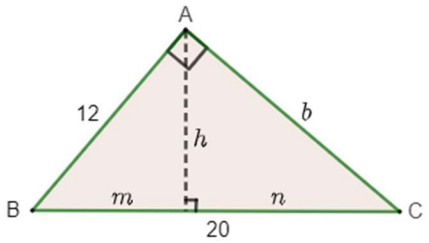
a: hipotenusa
b: cateto
c: cateto
h: altura relativa à hipotenusa
m: projeção do cateto c sobre a hipotenusa a
n: projeção do cateto b sobre a hipotenusa a

As relações métricas do triângulo retângulo são fórmulas, obtidas a partir da semelhança de triângulos, que relacionam entre si as medidas dos lados e das alturas do triângulo.

Utilizando os conhecimentos adquiridos no capítulo anterior (Semelhança de Triângulos) observamos que os triângulos ABC, ABD e ACD são semelhantes. Portanto, a partir da aplicação dos casos de semelhança, podemos concluir que as relações métricas do triângulo retângulo são:

- $c^2 = a.m$
- $b^2 = a.n$
- $a.h = b.c$
- $h^2 = m.n$
- $a^2 = b^2 + c^2$ **(teorema de Pitágoras)**

Exemplo: Determine os valores de b, h, m e n.



Aplicando as relações métricas do triângulo retângulo, temos:

$\boldsymbol{c^2 = a.m}$
$12^2 = 20.m$
$144 = 20m$
$m = 7{,}2$

$\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2}$ $\quad 20^2 = b^2 + 12^2$ $\quad 400 - 144 = b^2$

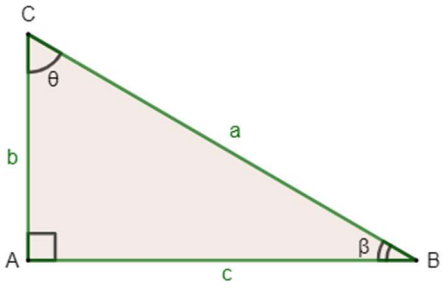
$b^2 = 256$
$b = 16$
$\boldsymbol{a.h = b.c}$
$20.h = 16\,.12$

$h = 9{,}6$

$\boldsymbol{b^2 = a.n}$

$16^2 = 20.n$
$256 = 20n$
$n = 12{,}8$

Relações Trigonométricas no Triângulo Retângulo



No triângulo retângulo ABC, temos:

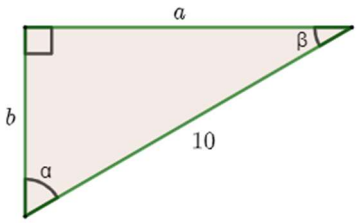
a: hipotenusa
b: cateto oposto ao ângulo β e adjacente ao ângulo θ.
c: cateto oposto ao ângulo θ e adjacente ao ângulo β.

A partir das relações descritas acima definimos as razões trigonométricas do triângulo retângulo:

- $sen\ \beta = \frac{cateto\ oposto\ ao\ ângulo\ \beta}{hipotenusa}$
- $cos\ \beta = \frac{cateto\ adjacente\ ao\ ângulo\ \beta}{hipotenus}$
- $tan\ \beta = \frac{cateto\ oposto\ ao\ ângulo\ \beta}{cateto\ adjacente\ ao\ ângulo\ \beta}$

Observação: As razões trigonométricas não dependem do tamanho do triângulo retângulo, dependem apenas do ângulo do triângulo.

Exemplo 1: Sabendo que $sen\ \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $sen\ \beta = \frac{1}{2}$, calcule os valores de a, b, $cos\ \alpha$, $tan\ \alpha$ e $cos\ \beta$.



$\boldsymbol{sen\ \alpha = \frac{cateto\ oposto\ a\ \alpha}{hipotenusa}}$
$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{10}$
$a = 5\sqrt{3}$

$\boldsymbol{sen\ \beta = \frac{cateto\ oposto\ a\ \beta}{hipotenusa}}$
$\frac{1}{2} = \frac{b}{10}$
$b = 5$

$\boldsymbol{cos\ \alpha = \frac{cateto\ adjacente\ a\ \alpha}{hipotenusa}}$
$cos\ \alpha = \frac{5}{10}$
$cos\ \alpha = \frac{1}{2}$

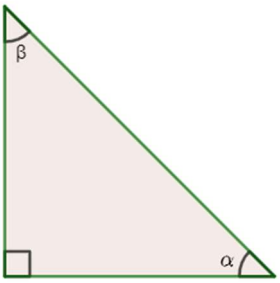
$\boldsymbol{tan\ \alpha = \frac{cateto\ oposto\ a\ \alpha}{cateto\ adjacente\ a\ \alpha}}$
$tan\ \alpha = \frac{5\sqrt{3}}{5}$
$cos\ \alpha = \sqrt{3}$

$\boldsymbol{cos\ \beta = \frac{cateto\ adjacente\ a\ \beta}{hipotenusa}}$
$cos\ \beta = \frac{5\sqrt{3}}{10}$
$cos\ \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Relações entre seno, cosseno e tangente

- $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$ **(relação fundamental do triângulo retângulo)**
- $tan\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha}$
- $sen\ \alpha = cos\ \beta$ e $cos\ \alpha = sen\ \beta$, quando $\alpha + \beta = 90°$

Exemplo 1: Sabendo que $cos\ \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, calcule os valores de $sen\ \alpha$ e $tan\ \beta$.



$$\boldsymbol{sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1}$$
$$sen^2\alpha + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1$$
$$sen^2\alpha = 1 - \frac{2}{4}$$
$$sen\ \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Note que apesar do exemplo não trazer nenhum valor relacionado ao ângulo β é possível determinar a tangente desse ângulo. Isso ocorre porque α e β são ângulos complementares, ou seja, $\alpha + \beta = 90°$. Desse modo, podemos afirmar que $sen\ \alpha = cos\ \beta$ e $cos\ \alpha = sen\ \beta$.

Logo:

$\boldsymbol{sen\ \beta = cos\alpha}$

$sen\ \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\boldsymbol{cos\ \beta = sen\ \alpha}$

$cos\ \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\boldsymbol{tan\ \beta = \frac{sen\ \beta}{cos\ \beta}}$

$tan\ \beta = \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2}$

$tan\ \beta = 1$

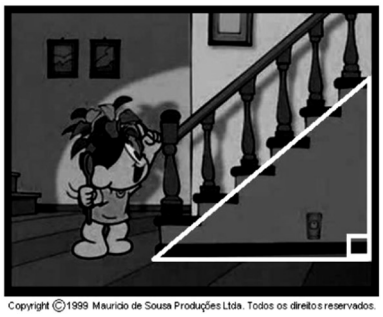
Atenção!

É fundamental memorizar os valores das razões trigonométricas dos ângulos notáveis.

	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Exercícios

01 - (UEMG/2016) Observe a figura:



Tendo como vista lateral da escada com 6 degraus, um triângulo retângulo isósceles de hipotenusa $\sqrt{10}$ metros, Magali observa que todos os degraus da escada têm a mesma altura.

A medida em cm, de cada degrau, corresponde aproximadamente a:

a) 37.
b) 60.
c) 75.
d) 83.

02 - (IFPE/2016) Um fio foi esticado entre as extremidades de duas torres de transmissão. Sabendo que a torre menor tem 16m de altura, a torre maior tem 21m de altura e que a distância entre as duas torres é de 12 m, qual é o comprimento do fio?

a) 13 m
b) 5 m
c) 37 m
d) 12m
e) 10 m

03 - (IFPE/2016) Francisco decidiu fazer uma brincadeira com seus filhos. Montou um mapa do tesouro com algumas instruções e disse-lhes que, ao chegar ao ponto final, encontrariam um belo prêmio. As instruções foram:



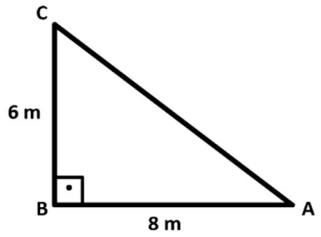
1. ande 200 metros na direção NORTE;
2. ande 120 metros na direção LESTE;
3. ande 50 metros na direção SUL;
4. ande 40 metros na direção OESTE.

Luiz, um de seus filhos, decidiu colocar em prática o que acabara de aprender na escola. Em alguns minutos, ele descobriu qual seria a menor distância entre o ponto de partida e o ponto de chegada mostrado no mapa. Assim sendo, a distância calculada por Luiz foi de

a) 170 metros.
b) 150 metros.

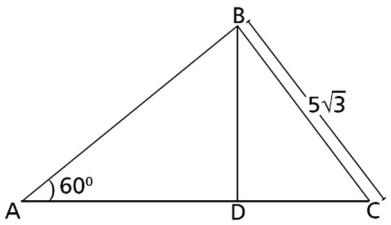
c) 180 metros.
d) 200 metros.
e) 210 metros.

04 - (IFPE/2016) D. Beatriz perdeu sua carteira numa praça quando fazia sua caminhada rotineira e só se deu conta do fato quando chegou a sua casa. Falou com seu marido, Sr. Francisco, e ele a chamou para juntos procurarem na praça. Ao chegarem ao ponto A da praça, decidiram se dividir. Sr. Francisco fez o trajeto $A \to B \to C$ e D. Beatriz fez o trajeto $A \to C$. Segundo o desenho da praça abaixo, qual a diferença entre a distância percorrida por Sr. Francisco e D. Beatriz?



a) 2 m
b) 3 m
c) 4 m
d) 5 m
e) 6 m

05 - (Cefet MG/2016) O triângulo ABC é retângulo em $A\hat{B}C$ e os segmentos $\overline{BD}$ e $\overline{AC}$ são perpendiculares.



Assim, a medida do segmento $\overline{DC}$ vale

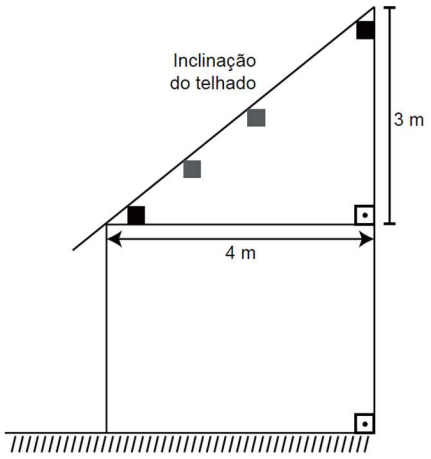
a) $10\sqrt{3}$
b) $6\sqrt{3}$
c) $\frac{15}{2}$
d) $\frac{13}{2}$

06 - (Mackenzie SP/2016) A soma entre as medidas da altura e da base de um retângulo é de 14 cm. Se a diagonal mede 10 cm, então as medidas da altura e da base do retângulo são, respectivamente,

a) 2 cm e 12 cm
b) 9 cm e 5 cm
c) 10 cm e 4 cm

d) 8 cm e 6 cm
e) 11 cm e 3 cm

07 - (Encceja/2017) Um construtor pretende cobrir um telhado. No mercado existem diferentes medidas de comprimento de telhas de mesma largura. Na junção, as telhas se sobrepõem em 10 cm e na extremidade inferior devem ultrapassar a parede, conforme ilustra a figura.



Os tipos de telha são:

Telha tipo A	Telha tipo B	Telha tipo C
Comprimento 1,20 m Preço por unidade R$ 16,50	Comprimento 1,70 m Preço por unidade R$ 22,50	Comprimento 2,20 m Preço por unidade R$ 30,00

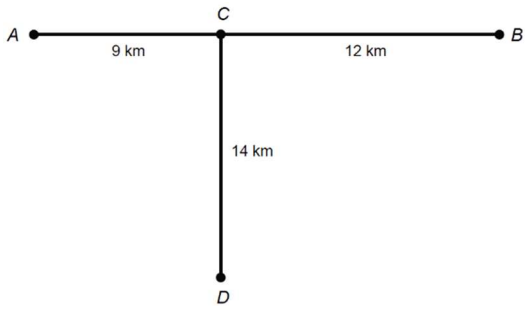
Para cobrir toda a casa, foram consideradas algumas possibilidades.

I. Todo o telhado com telhas do tipo A;
II. Combinar telhas do tipo A com telhas do tipo B;
III. Combinar telhas do tipo A com telhas do tipo C;
IV. Combinar telhas do tipo B com telhas do tipo C.

A possibilidade que resultou no menor custo na compra das telhas é a

a) I.
b) II.
c) III.
d) IV.

08 - (Encceja/2017) Numa propriedade rural, foi instalada uma antena representada pelo ponto D, situado a 14 km da estrada que liga as cidades A e B. O sinal dessa antena alcança um raio de 15 km. Ela foi instalada para emitir sinais de rádio para os policiais que fazem ronda no trecho AB, porém, nem os moradores da cidade A, distante 9 km do ponto C, nem os moradores da cidade B, distante 12 km do ponto C, conseguem receber o sinal da antena.



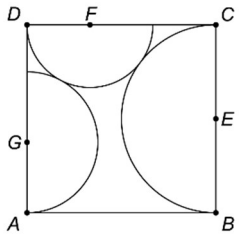
O proprietário pretende afastar a torre da antena de sua casa o mínimo possível de sua posição original, na direção CD, aproximando-a de C, para que o sinal da antena alcance os moradores das cidades A e B. Para tanto, foram sugeridas as seguintes alterações na distância da torre de rádio em relação à sua posição original D:

I. 1 km.
II. 2 km.
III. 5 km.
IV. 8 km.

Dentre essas, a que atende aos interesses do proprietário é a opção

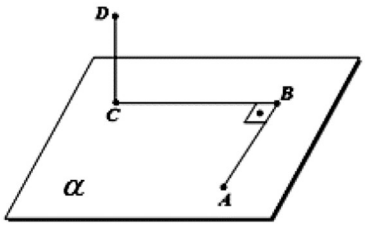
a) I.
b) II.
c) III.
d) IV.

09 - (OBMEP/2017) No interior do quadrado ABCD de lado 9 cm, foram traçadas as semicircunferências de centros E, F e G, tangentes como indicado na figura. Qual é a medida de AG?



a) $\frac{11}{5}$ cm
b) $\frac{18}{5}$ cm
c) $\frac{19}{5}$ cm
d) $\frac{11}{4}$ cm
e) $\frac{27}{8}$ cm

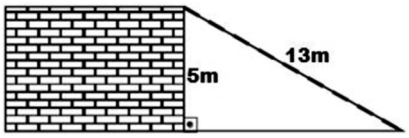
10 - (UNITAU SP/2017) Dado o plano alfa e os pontos A, B, C e D, sabe-se que $\overline{DC}$ é perpendicular ao plano alfa. Já os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ estão contidos no plano alfa. Sabe-se também que $\overline{AB} = 6\text{cm}$, $\overline{BC} = 8\text{cm}$ e $\overline{DC} = \sqrt{21}$ cm.



A medida do segmento formado pelos pontos A e D é

a) 10 cm
b) $3\sqrt{5}$ cm
c) $2\sqrt{5}$ cm
d) 11 cm
e) $4\sqrt{5}$ cm

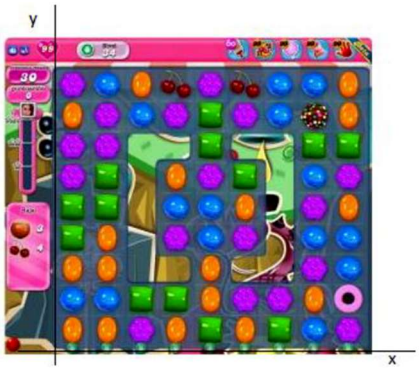
11 - (IFPE/2017) Uma escada de 13 metros de comprimento está apoiada no topo de um muro de 5 metros de altura, conforme a figura abaixo.



Determine a distância entre o pé da escada e o muro.

a) 12
b) 30
c) 18
d) 45
e) 79

12 - (IFPE/2017) O *Candy Crush* é um dos jogos que virou febre nos últimos anos. Um joguinho no qual você precisa combinar doces simples e doces especiais que se encontram numa espécie de plano cartesiano. Há, na imagem abaixo, dois doces especiais: uma bomba colorida, que se encontra no ponto (8,8); e uma rosquinha de coco, que se encontra no ponto (9,2). Tomou-se como referencial o plano cartesiano indicado na imagem. Baseados nessas informações, podemos afirmar que a distância entre a bomba colorida e a rosquinha de coco, no plano cartesiano abaixo, é



Disponível em:<https://www.dicascityville.com/wp-content/uploads/2013/02/vidas-infinitas-no-candy-crush-saga-dicas-cityville-tudo-sobre-jogos-sociais-300x258.jpg. Acesso em: 20 maio 2017.

a) $\sqrt{27}$.
b) $\sqrt{35}$.
c) $\sqrt{7}$.
d) $\sqrt{37}$.
e) 7.

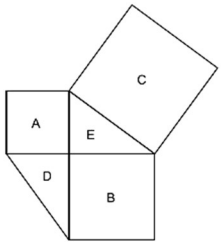
13 - (IFPE/2017) Ramon, Alexandre e Milton são alunos do curso de Informática no *Campus* Afogados da Ingazeira e estão testando um robô para participar de olimpíadas de robótica. Um dos exercícios testes consistia em fazer o robô realizar os seguintes comandos:

I. andar 30 cm em linha reta;
II. realizar um giro de 90° à direita;
III. andar mais 40 cm em linha reta;
IV. retornar ao ponto inicial no menor percurso possível.

Sobre o trajeto percorrido pelo robô, neste teste, é CORRETO afirmar que

a) forma um triângulo retângulo cuja hipotenusa mede 50 cm.
b) forma um triângulo retângulo cujo perímetro mede 100 cm.
c) forma um triângulo retângulo e isósceles.
d) forma um paralelogramo cujo perímetro mede 140 cm.
e) forma um paralelogramo cujas diagonais medem 50 cm.

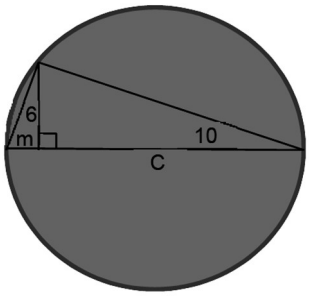
14 - (Fac. Guanambi BA/2017) A figura representa a planta baixa de um pomar, na forma da base de um prisma que possui oito faces laterais.



Sabendo-se que a área total composta pelas três regiões quadrangulares é 200m^2 e que a área da menor dessas três regiões é 36m^2, conclui-se que a área total do pomar é igual, em m^2, a

01. 284
02. 248
03. 228
04. 184
05. 148

15 - (IFAL/2017) Calcule o valor de **m** na figura:



Onde C é o centro do círculo de raio 10.

a) 1.
b) 2.
c) 3.
d) 4.
e) 5.

16 - (IFAL/2017) Determine a altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo, cujos catetos medem 6 cm e 8 cm.

a) 3,6 cm.
b) 4,8 cm.
c) 6,0 cm.
d) 6,4 cm.
e) 8,0 cm.

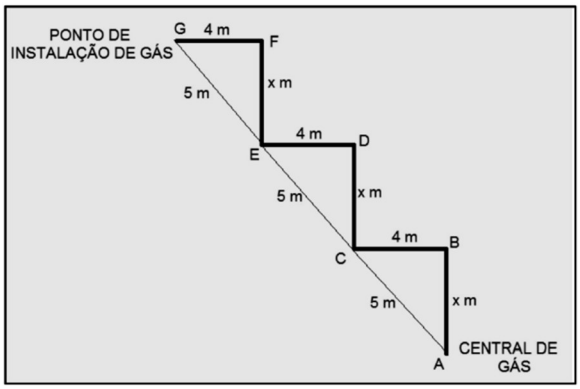
17 - (PUC SP/2017) Atribui-se aos pitagóricos a regra para a determinação da tríade que fornece os três lados de um triângulo retângulo. Essa regra é dada por $\left(\frac{m^2-1}{2}, m, \frac{m^2+1}{2}\right)$ sendo m um número inteiro ímpar e $m \geq 3$.

Fonte: Carl B. Boyer: História da matemática – Editora Edgard Blücher – 1974 (Adaptado)

Considere um triângulo retângulo de hipotenusa a e catetos b e c, com b > c, cujos lados obedeçam a essa regra. Se a + b + c = 90, o valor de a . c, é

a) 327
b) 345
c) 369
d) 381

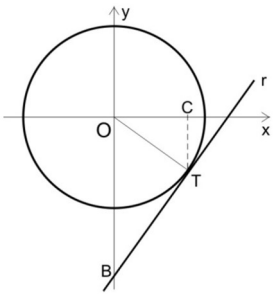
18 - (IFSC/2017) Pretende-se estender um fio de cobre de uma CENTRAL DE GÁS até o PONTO DE INSTALAÇÃO DE GÁS de uma residência. O fio de cobre deve ser instalado seguindo o percurso ABCDEFG, conforme mostra a figura abaixo. Sabendo-se que cada metro de cobre custa R$ 2,50 e que os triângulos ABC, CDE e EFG são triângulos retângulos, calcule a metragem de cobre que será necessária para ligar a CENTRAL DE GÁS até o PONTO DE INSTALAÇÃO DE GÁS e qual valor será gasto na compra desse material.



Assinale a alternativa CORRETA.

a) A metragem de cobre será 52,5 m e o valor gasto será igual a R$ 21,00.
b) A metragem de cobre será 52,5 m e o valor gasto será igual a R$ 42,00.
c) A metragem de cobre será 21 m e o valor gasto será igual a R$ 42,00.
d) A metragem de cobre será 21 m e o valor gasto será igual a: R$ 52,50.
e) A metragem de cobre será 52,5 m e o valor gasto será igual a R$ 131,25.

19 - (EPCAR EA/2018) Na figura a seguir, os eixos x e y formam o sistema cartesiano ortogonal e a circunferência tem centro em O e raio igual a 1 cm. A reta r é tangente a circunferência em T, intercepta o eixo y em B, e C é a projeção ortogonal de T sobre o eixo x.



O produto $\overline{OB} \cdot \overline{CT}$, em cm^2, é igual a

a) 2,5
b) 2
c) 1,5
d) 1

20 - (Encceja/2018) O esquema da Figura I mostra um lance de arquibancada de um estádio de futebol (com dez degraus). O clube responsável por esse estádio resolveu fazer uma reforma para aumentar a capacidade de público nos jogos (Figura II). Os novos degraus devem ter as mesmas dimensões que os degraus da arquibancada da Figura I.

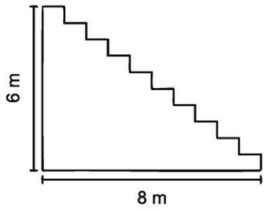


Figura I

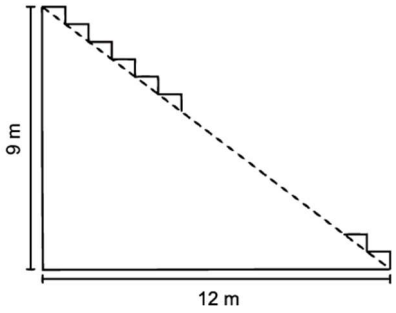
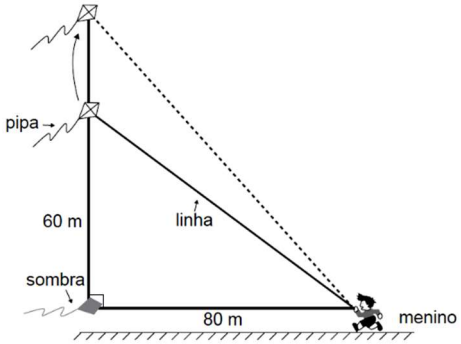


Figura II

Nessas condições, quantos degraus haverá na nova arquibancada?

a) 22
b) 17
c) 15
d) 12

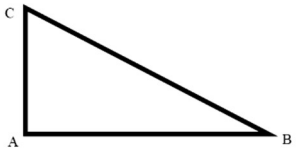
21 - (Encceja/2018) Na figura, um menino está soltando pipa em um terreno totalmente plano. Quando a pipa atinge 60 m de altura, a ação do sol projeta sua sombra sobre o solo. O menino resolve, então, dar mais linha à pipa para colocá-la em uma altura de 90 m, mas mantendo a sombra projetada à mesma distância em relação a ele. A linha da pipa permanece perfeitamente esticada e a altura do rolo de linha na mão do menino é desprezada.



Utilizando $\sqrt{145} \cong 12$, a quantidade de linha, em metro, que ele precisará dar a mais à pipa é

a) 20.
b) 30.
c) 100.
d) 120.

22 - (UNITAU SP/2018) Considere o triângulo retângulo, reto em A, com catetos medindo AC = 6 cm e AB = 8 cm.



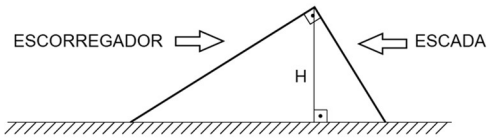
A área do triângulo cujos lados são AB, BM e AM, sendo AM a mediana relativa à hipotenusa, vale

a) 5 cm^2
b) 8 cm^2
c) 10 cm^2
d) 12 cm^2
e) 15 cm^2

23 - (UNITAU SP/2018) Uma placa metálica tem o formato retangular, com a diagonal medindo d. Um lado do retângulo mede 4/3 do outro. Pode-se afirmar CORRETAMENTE que a área da placa é dada por

a) 0,80 d^2
b) 0,21 d^2
c) 0,48 d^2
d) 0,16 d^2
e) 1,92 d^2

24 - (Fac. Cesgranrio RJ/2018) O modelo a seguir representa um pequeno escorregador, ideal para crianças de até 5 anos.



Por medida de segurança, há uma barra de sustentação perpendicular ao solo, instalada no ponto mais alto do escorregador (identificada, no modelo, pela letra H). O escorregador tem 1,5 m de comprimento, e a escada, 80 cm. O ângulo formado entre a escada e o escorregador é reto.

O comprimento aproximado da barra de sustentação, em cm, é

a) 50
b) 55
c) 60
d) 65
e) 70

25 - (ENEM MEC/2018) Um quebra-cabeça consiste em recobrir um quadrado com triângulos retângulos isósceles, como ilustra a figura.



Uma artesã confecciona um quebra-cabeça como o descrito, de tal modo que a menor das peças é um triângulo retângulo isósceles cujos catetos medem 2 cm.

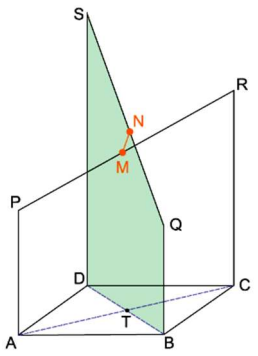
O quebra-cabeça, quando montado, resultará em um quadrado cuja medida do lado, em centímetro, é quadrado cuja medida do lado, em centímetro, é

a) 14
b) 12
c) $7\sqrt{2}$
d) $6+4\sqrt{2}$
e) $6+2\sqrt{2}$

26 - (IBMEC SP Insper/2018) Uma empresa entrega gratuitamente seus produtos em endereços localizados até o raio de 18,5 km do seu depósito. Para distâncias que superam esse raio, a empresa nada cobra pelos primeiros 18,5 km e cobra R$ 25,00 por quilômetro que exceda os 18,5 km iniciais. Rodrigo fez uma compra nessa empresa e solicitou a entrega em local distante 12 km a leste e 16 km ao sul do depósito. Admitindo ser possível ir do depósito ao local de entrega da mercadoria em linha reta, o valor que Rodrigo terá que pagar pelo transporte da mercadoria que comprou é de

a) R$ 27,00.
b) R$ 38,50.
c) R$ 35,00.
d) R$ 39,00.
e) R$ 37,50.

27 - (FGV /2018) Seja ABCD um paralelogramo e $\overline{AP}$, $\overline{BQ}$, $\overline{CR}$ e $\overline{DS}$ segmentos contidos em retas paralelas entre si, localizados do mesmo lado do plano que contém o paralelogramo ABCD. Sabe-se que AP = 10, BQ = 8, CR = 18, DS = 22, T é ponto de intersecção entre $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, e que M e N são, respectivamente, pontos médios de $\overline{PR}$ e $\overline{QS}$, como mostra a figura.



Nas condições dadas, a medida de $\overline{MN}$ é igual a

a) 1.
b) 1,5.
c) 2.
d) 2,5.
e) 3.

28 - (FGV /2018) Em um triângulo retângulo, a hipotenusa mede $\sqrt{52}$ e a medida de um cateto é 50% superior à medida do outro.

A medida da altura relativa à hipotenusa é:

a) $\frac{4\sqrt{13}}{5}$

b) $\frac{16\sqrt{13}}{13}$

c) $\frac{12\sqrt{13}}{13}$

d) $\frac{16\sqrt{13}}{15}$

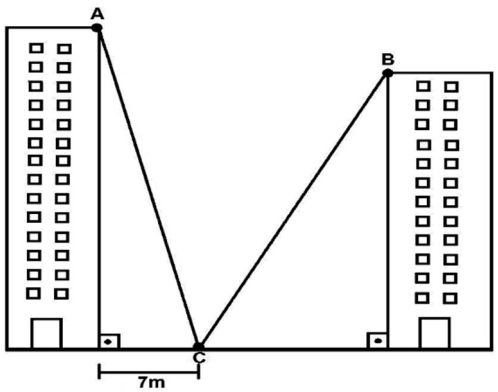
e) $\frac{6\sqrt{13}}{5}$

29 - (UniCesumar PR/2018) Sabe-se que a área de um terreno plano em forma de um triângulo retângulo é 7,5 km². A diferença entre as medidas de seus catetos é 3,5 km. Para percorrer todo o limite desse terreno é necessário percorrer uma distância, em km, igual a

a) 23,0.
b) 17,5.
c) 19,2.
d) 15,0.
e) 13,8.

30 - (IFSC/2018) Dois edifícios vizinhos resolveram fazer uma decoração de Natal. Para tanto, cada um decidiu comprar uma mangueira de iluminação de LED com 25m de comprimento. Sabe-se que um dos edifícios, que é 4m mais alto que o outro, fixou uma das extremidades da mangueira no topo do prédio (ponto A) e a outra em um ponto localizado a 7m de sua base (ponto C), como mostra a figura.
O outro edifício fixou uma das extremidades de sua mangueira no alto do prédio (ponto B) e a outra extremidade no mesmo local em que o prédio vizinho fixou sua mangueira (ponto C).

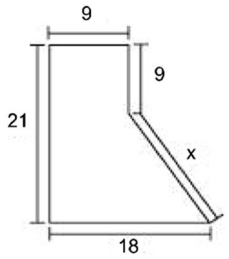
Com base nesses dados, calcule a distância entre os dois edifícios.



Assinale a alternativa CORRETA

a) 16 m
b) 18 m
c) 22 m
d) 20 m
e) 24 m

31 - (Unifor CE/2018) A figura abaixo mostra um terreno, com medidas em metros, pertencente a uma empresa metalúrgica, na cidade de Caucaia, zona metropolitana de Fortaleza. Para isolar a área, a empresa colocou uma tela metálica em todo o perímetro desse terreno, deixando apenas um vão de 5 metros para a passagem de máquinas e caminhões. A tela foi comprada em rolos fechados, com 20 metros cada um, na quantidade mínima necessária de rolos. Na sua colocação houve uma perda de 5 metros.

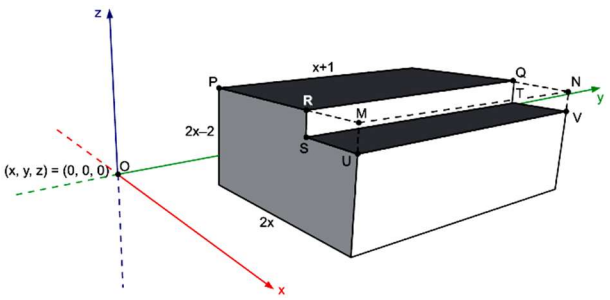


Portanto, terminada a colocação, a quantidade de tela que restou no último rolo foi de:

a) 8 metros.
b) 9 metros.
c) 10 metros.
d) 11 metros.
e) 12 metros.

TEXTO: 2 - Comum à questão: 32

A figura indica, em linha cheia, um prisma reto com faces, duas a duas, em planos perpendiculares ou em planos paralelos. Três de suas arestas medem 2x, 2x – 2 e x + 1, como indicado no desenho. O prisma está no sistema cartesiano XYZ, com uma face contida no plano XY e com arestas paralelas ao eixo x ou ao eixo y. Sabe-se, ainda, que P, Q, R, S, T, U e V são vértices do prisma, que O é a origem do sistema XYZ e que todas as medidas de comprimento da figura estão em centímetros.

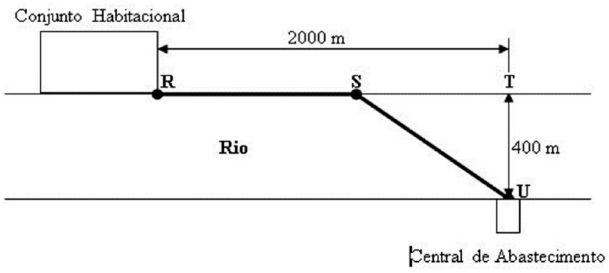


32 - (IBMEC SP Insper/2018) Se P possui coordenadas (x_P, y_P, z_P) = (3, 4, 14) e Q possui coordenadas (15, 13, z_Q), então a distância de Q até a origem O, em centímetros, é igual a

a) $\sqrt{140}$
b) $\sqrt{600}$
c) $\sqrt{570}$
d) $\sqrt{590}$
e) $\sqrt{530}$

33 - (Uncisal AL/2018) Um computador possui um teclado diferenciado, no qual há quatro teclas, com os registros ↑, ↓, → e ←, respectivamente. Essas teclas movimentam um ponto na tela desse computador. A cada digitação das teclas ↑ ou ↓, o ponto se movimenta 1,6 mm verticalmente para cima ou para baixo, respectivamente; a cada digitação das teclas → ou ←, o ponto se movimenta 5 mm para a direita ou para a esquerda, respectivamente. Indicando por P a posição de um ponto na tela e por Q a posição do ponto após digitar 2 vezes a tecla →, 2 vezes a tecla ↑, 4 vezes a tecla → e 8 vezes a tecla ↑, a distância entre P e Q medirá
a) 3,2 cm.
b) 3,4 cm.
c) 3,6 cm.
d) 3,8 cm.
e) 4,0 cm.

34 - (UNITAU SP/2018) Uma rede de água potável ligará uma central de abastecimento, situada à margem de um rio de 400 m de largura (considerada constante), a um conjunto habitacional, situado na outra margem, através dos pontos USR, como mostra a figura. O custo da instalação da tubulação através do rio é de R$ 830,00 o metro, enquanto, em terra, custa R$ 400,00.



Se a distância do conjunto habitacional até o ponto S for igual a 1700 metros, pode-se afirmar, CORRETAMENTE, que o custo de instalação da rede de água potável será de

a) R$ 1.611.000,00
b) R$ 1.012.000,00
c) R$ 1.132.000,00
d) R$ 1.095.000,00
e) R$ 1.321.000,00

TEXTO: 3 - Comum à questão: 35
O poder criativo da imperfeição

Já escrevi sobre como nossas teorias científicas sobre o mundo são aproximações de uma realidade que podemos compreender apenas em parte. [1]Nossos instrumentos de pesquisa, que tanto ampliam nossa visão de mundo, têm necessariamente limites de precisão. Não há dúvida de que Galileu, com seu telescópio, viu mais longe do que todos antes dele. Também não há dúvida de que hoje vemos muito mais longe do que Galileu poderia ter sonhado em 1610. E certamente, em cem anos, nossa visão cósmica terá sido ampliada de forma imprevisível.

No avanço do conhecimento científico, vemos um conceito que tem um papel essencial: simetria. Já desde os tempos de Platão, [2]há a noção de que existe uma linguagem secreta da natureza, uma matemática por trás da ordem que observamos.

Platão – e, com ele, muitos matemáticos até hoje – acreditava que os conceitos matemáticos existiam em uma espécie de dimensão paralela, acessível apenas através da razão. Nesse caso, os teoremas da matemática (como o famoso teorema de Pitágoras) existem como verdades absolutas, que a mente humana, ao menos as mais aptas, pode ocasionalmente descobrir. Para os platônicos, [3]a matemática é uma descoberta, e não uma invenção humana.

Ao menos no que diz respeito às forças que agem nas partículas fundamentais da matéria, a busca por uma teoria final da natureza é a encarnação moderna do sonho platônico de um código secreto da natureza. As teorias de unificação, como são chamadas, visam justamente a isso, formular todas as forças como manifestações de uma única, com sua simetria abrangendo as demais.

Culturalmente, é difícil não traçar uma linha entre as fés monoteístas e a busca por uma unidade da natureza nas ciências. Esse sonho, porém, é impossível de ser realizado.

Primeiro, porque nossas teorias são sempre temporárias, passíveis de ajustes e revisões futuras. Não existe uma teoria que possamos dizer final, pois [4]nossas explicações mudam de acordo com o conhecimento acumulado que temos das coisas. Um século atrás, um elétron era algo muito diferente do que é hoje. Em cem anos, será algo muito diferente outra vez. Não podemos saber se as forças que conhecemos hoje são as únicas que existem.

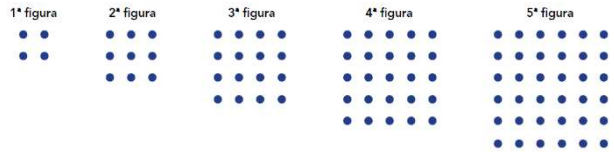
Segundo, porque nossas teorias e as simetrias que detectamos nos padrões regulares da natureza são em geral aproximações. Não existe uma perfeição no mundo, apenas em nossas mentes. De fato, quando analisamos com calma as "unificações" da física, vemos que são aproximações que funcionam apenas dentro de certas condições.

O que encontramos são assimetrias, imperfeições que surgem desde as descrições das propriedades da matéria até as das moléculas que determinam a vida, as proteínas e os ácidos nucleicos (RNA e DNA). Por trás da riqueza que vemos nas formas materiais, encontramos a força criativa das imperfeições.

MARCELO GLEISER

Adaptado de *Folha de São Paulo*, 25/08/2013.

35 - (UERJ/2018) Segundo historiadores da matemática, a análise de padrões como os ilustrados a seguir possibilitou a descoberta das triplas pitagóricas.

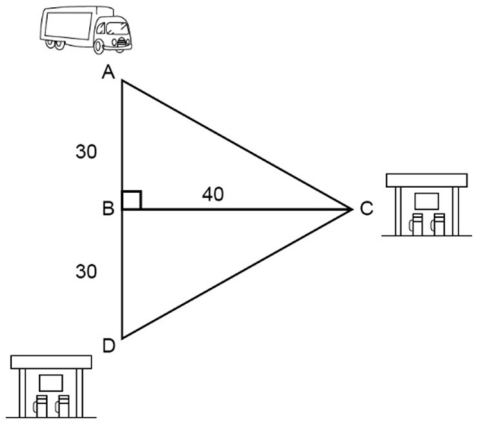


Observe que os números inteiros 3^2, 4^2 e 5^2, representados respectivamente pelas 2ª, 3ª e 4ª figuras, satisfazem ao Teorema de Pitágoras. Dessa forma (3, 4, 5) é uma tripla pitagórica.

Os quadrados representados pelas 4ª, 11ª e nª figuras determinam outra tripla pitagórica, sendo o valor de n igual a:

a) 10
b) 12
c) 14
d) 16

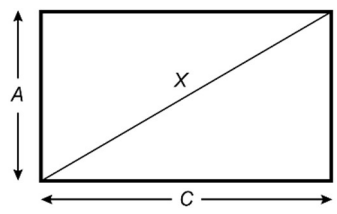
36 - (Encceja/2019) Um caminhoneiro viajando pelo interior de seu país chega à cidade A. No tanque de combustível do seu veículo restam somente 10 litros. Seu destino final é a cidade D, e as distâncias entre cada uma das cidades A, B, C e D são as indicadas na figura. Somente existem postos de abastecimento nas cidades C e D. O veículo consegue percorrer 5 quilômetros (km) com um litro de combustível.



Desejando fazer o percurso mais curto possível, mas sem ficar parado no caminho, o trajeto que ele terá que escolher para ir de A até D e a distância a ser percorrida serão, respectivamente,

a) ABD e 60 km.
b) ACD e 100 km.
c) ABCD e 120 km.
d) ACBD e 140 km.

37 - (ENEM MEC/2019) A unidade de medida utilizada para anunciar o tamanho das telas de televisores no Brasil é a polegada, que corresponde a 2,54 cm. Diferentemente do que muitos imaginam, dizer que a tela de uma TV tem X polegadas significa que a diagonal do retângulo que representa sua tela mede X polegadas, conforme ilustração.

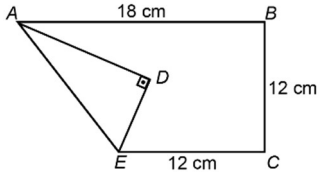


O administrador de um museu recebeu uma TV convencional de 20 polegadas, que tem como razão do comprimento (*C*) pela altura (*A*) a proporção 4 : 3, e precisa calcular o comprimento (*C*) dessa TV a fim de colocá-la em uma estante para exposição.

A tela dessa TV tem medida do comprimento *C*, em centímetro, igual a

a) 12,00.
b) 16,00.
c) 30,48.
d) 40,64.
e) 50,80.

38 - (ENEM MEC/2019) Construir figuras de diversos tipos, apenas dobrando e cortando papel, sem cola e sem tesoura, é a arte do *origami* (*ori* = dobrar; *kami* = papel), que tem um significado altamente simbólico no Japão. A base do *origami* é o conhecimento do mundo por base do tato. Uma jovem resolveu construir um cisne usando a técnica do *origami*, utilizando uma folha de papel de 18 cm por 12 cm. Assim, começou por dobrar a folha conforme a figura.



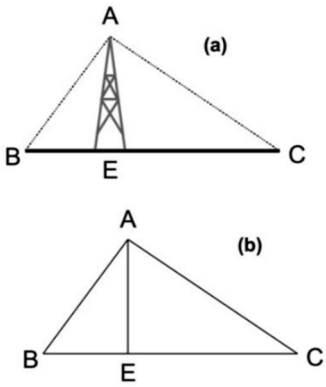
Após essa primeira dobradura, a medida do segmento *AE* é

a) $2\sqrt{22}$ cm.
b) $6\sqrt{3}$ cm.
c) 12 cm.
d) $6\sqrt{5}$ cm.
e) $12\sqrt{2}$ cm.

39 - (IFMS/2019) A conexão via rádio continua sendo a única opção para acessar a Internet em alguns lugares no Brasil, apesar do avanço da banda larga fixa cabeada. Por utilizar antenas, sua implementação é mais barata do que a fibra ótica – o que encoraja provedores de pequeno porte a adotarem a tecnologia.

(Disponível em:
https://www.techtudo.com.br/noticias/2018/02/internet-via-radio-e-boa-conheca-vantagens-e-desvantagens-da-conexao.ghtml
Acesso em: 25 set. 2018.)

Na figura indicada por (a) abaixo temos uma torre onde as antenas de internet a rádio são instaladas. Essa torre, de altura $\overline{AE}$ precisa ser fixada no solo por dois cabos de aços representados por $\overline{AB}$ e por $\overline{AC}$. Sabendo que $B\hat{A}C$, $A\hat{E}B$ e $A\hat{E}C$ são ângulos retos, podemos representar as medidas dos cabos e da antena no triângulo retângulo mostrado em (b).

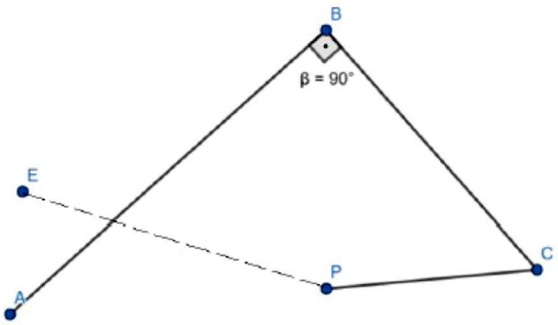


Após instalada a torre, percebeu-se que $\overline{BE} = 2m$ e $\overline{EC} = 8m$. Qual é a altura da torre?

a) 4m.
b) 5m.
c) 2m.
d) 7m.
e) 13m.

40 - (IFSC/2019) Um avião saiu da cidade A em direção à cidade B. Em seguida, partiu da cidade B em direção à cidade C. Quando o avião estava percorrendo seu trajeto da cidade C para a cidade A, o piloto soube que, por questões meteorológicas, o aeroporto da cidade A não tinha condições de pouso. Decidiu, então, encaminhar-se para o aeroporto da cidade E, mudando de direção quando havia completado 2/5 do trajeto entre C e A (Ponto P). Partindo da figura abaixo, que representa a situação, e sabendo que:

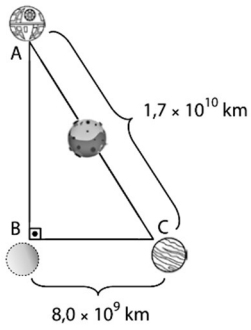
- A distância entre A e B é de 800 km;
- A distância entre B e C é de 600 km, e;
- A distância entre P e E é a mesma distância entre P e A.



A distância entre P e E é:

a) 800 km
b) 400 km
c) 500 km
d) 1000 km
e) 600 km

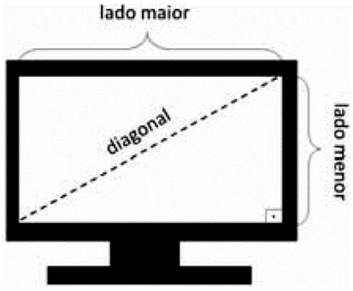
41 - (ETEC SP/2019) A Estrela da Morte é uma arma ícone da série cinematográfica *Star Wars*. De formato esférico ela era considerada similar a uma Lua. Essa arma/estação espacial podia se locomover pelo espaço na velocidade da luz, ou seja, $3{,}0 \times 10^5$ km/s.
Admita que a Estrela da Morte precisasse se posicionar de maneira a realizar um ataque de máxima eficiência ao Planeta C. Inicialmente, a estação espacial encontrava-se no ponto A e, entre ela e o Planeta C, havia um grande asteroide, por isso necessitou ir para o ponto B, de modo a poder visualizar perfeitamente o Planeta C, conforme a figura.



Assinale a alternativa que contém o tempo que a Estrela da Morte demorou para se locomover do ponto A para o B.

a) $5{,}0 \times 10^4$ s
b) $15{,}0 \times 10^4$ s
c) $45{,}0 \times 10^4$ s
d) $\sqrt{353} \times 10^4$ s
e) $\frac{\sqrt{353}}{3} \times 10^4$ s

42 - (UEL PR/2019) Convenciona-se que o tamanho dos televisores, de tela plana e retangular, é medido pelo comprimento da diagonal da tela, expresso em polegadas. Define-se a proporção dessa tela como sendo o quociente do lado menor pelo lado maior, também em polegadas. Essas informações estão dispostas na figura a seguir.



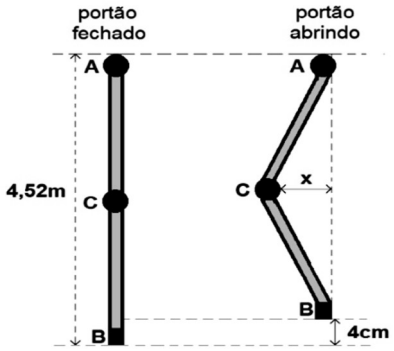
Suponha que Eurico e Hermengarda tenham televisores como dado na figura e de proporção 3/4. Sabendo que o tamanho do televisor de Hermengarda é 5 polegadas maior que o de Eurico, assinale a alternativa que apresenta, corretamente, quantas polegadas o lado maior da tela do televisor de Hermengarda excede o lado correspondente do televisor de Eurico.
a) 2
b) 3

c) 4
d) 5
e) 6

43 - (ESPM SP/2019) Uma praça tem a forma de um quadrado de 200 m de lado. Partindo juntas de um mesmo canto P, duas amigas percorrem o perímetro da praça caminhando em sentidos opostos, com velocidades constantes. O primeiro encontro delas se dá em um ponto A e o segundo, em um ponto B. Se a medida do segmento PA é 250 m, então, o segmento PB mede:

a) 50 m
b) 100 m
c) 150 m
d) 200 m
e) 250 m

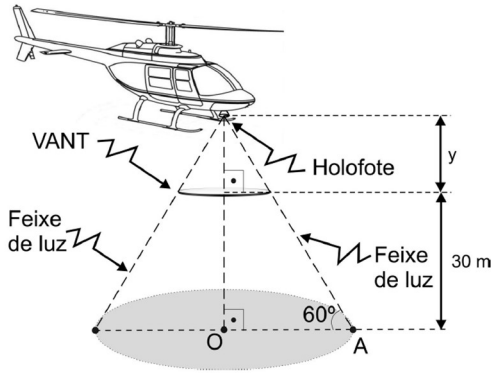
44 - (IFSC/2019) Um portão de elevação com 4,52 metros de altura é articulado em seu centro C , possui sua extremidade superior A fixa e a extremidade B só pode se mover verticalmente, conforme a figura. O portão, que inicialmente está fechado, é levantado de maneira que a extremidade B sobe 4cm. Isso produz um deslocamento da articulação C. Qual a abertura horizontal x, em centímetros, percorrida pela articulação C?



Assinale a alternativa CORRETA.

a) 24cm
b) 30cm
c) 17cm
d) 10cm
e) 4cm

45 - (EPCAR EA/2020) À noite, um helicóptero da Força Aérea Brasileira sobrevoa uma região plana e avista um VANT (Veículo Aéreo Não Tripulado) de forma circular e altura desprezível, com raio de 3m, estacionado paralelamente ao solo a 30m de altura.
O VANT está a uma distância y metros de um holofote que foi instalado no helicóptero.
O feixe de luz do holofote que ultrapassa o VANT incide sobre a região plana e produz uma sombra circular de centro O e raio R
O raio R da circunferência da sombra forma um ângulo de 60° com o feixe de luz, conforme se vê na figura seguinte.



Nesse momento, uma pessoa que se encontra num ponto A da circunferência da sombra corre para o ponto O, pé da perpendicular traçada do holofote à região plana.

A distância, em metros, que essa pessoa percorre de A até O é um número entre

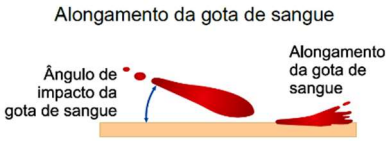
a) 18 e 19
b) 19 e 20
c) 20 e 21
d) 22 e 23

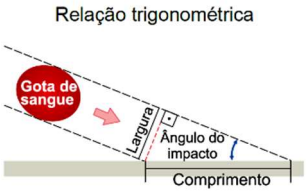
46 - (IFSC/2020) Um triângulo ABC, retângulo em B possui catetos medindo (x – 2) metros e (x + 5) metros, com hipotenusa igual a (x + 7) metros.
João percorrerá o caminho de A a C sobre os catetos e Maria também irá de A a C, mas pela hipotenusa.
Assim, é correto afirmar que Maria fará um trajeto, em relação a João:

Assinale a alternativa CORRETA.

a) 6 (seis) metros menor
b) 4 (quatro) metros menor
c) de mesma distância
d) 4 (quatro) metros maior
e) 6 (seis) metros maior

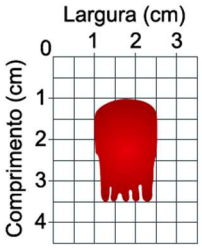
47 - (Unesp SP/2020) Uma das finalidades da Ciência Forense é auxiliar nas investigações relativas à justiça civil ou criminal. Observe uma ideia que pode ser empregada na análise de uma cena de crime.
Uma gota de sangue que cai perfeitamente na vertical, formando um ângulo de 90° com a horizontal, deixa uma mancha redonda. À medida que o ângulo de impacto com a horizontal diminui, a mancha fica cada vez mais longa.
As ilustrações mostram o alongamento da gota de sangue e a relação trigonométrica envolvendo o ângulo de impacto e suas dimensões.





(Ana Paula Sebastiany *et al*. "A utilização da Ciência Forense e da Investigação Criminal como estratégia didática na compreensão de conceitos científicos". *Didáctica de la Química*, 2013. Adaptado.)

Considere a coleta de uma amostra de gota de sangue e a tabela trigonométrica apresentadas a seguir.

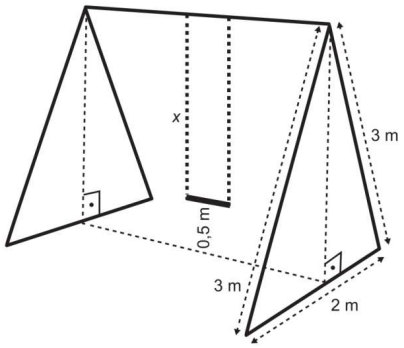


α	sen α	cos α	tg α
31°	0,51	0,85	0,60
37°	0,60	0,80	0,75
53°	0,80	0,60	1,32
59°	0,85	0,51	1,66
74°	0,96	0,28	3,50

De acordo com as informações, o ângulo de impacto da gota de sangue coletada na amostra foi de

a) 37°
b) 74°
c) 59°
d) 53°
e) 31°

48 - (ENEM MEC/2021) Um brinquedo muito comum em parques de diversões é o balanço. O assento de um balanço fica a uma altura de meio metro do chão, quando não está em uso. Cada uma das correntes que o sustenta tem medida do comprimento, em metro, indicada por x. A estrutura do balanço é feita com barras de ferro, nas dimensões, em metro, conforme a figura.



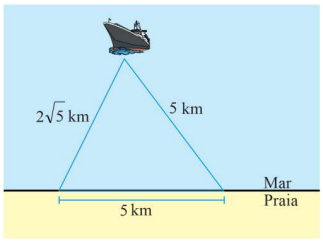
Nessas condições, o valor, em metro, de x é igual a

a) $\sqrt{2}-0,5$
b) $1,5$
c) $\sqrt{8}-0,5$

d) $\sqrt{10}-0,5$

e) $\sqrt{8}$

49 - (Fac. Israelita de C. da Saúde Albert Einstein SP/2021) O radar de uma embarcação indica que a região segura de navegação até a praia é delimitada pelo triângulo cujas medidas dos lados estão descritas na figura.



Desprezando-se os efeitos da curvatura da Terra, a menor distância entre a embarcação e a linha reta da praia, em quilômetros, é igual a

a) $\frac{7}{2}$

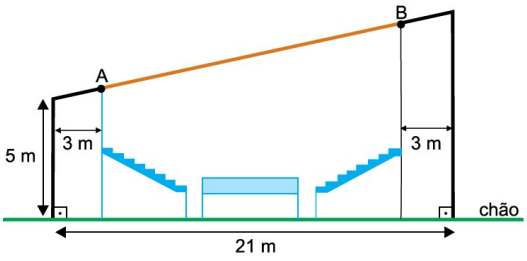
b) $\sqrt{15}$

c) $\frac{3\sqrt{5}}{2}$

d) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$

e) 4

50 - (Santa Casa SP/2022) A figura indica o projeto de construção de uma arena de esportes, sendo $\overline{AB}$ a representação de uma luminária cujo ponto mais próximo do chão está a 5,5 m.



O comprimento de $\overline{AB}$, em metros, é igual a

a) $3\sqrt{37}$

b) $2\sqrt{37}$

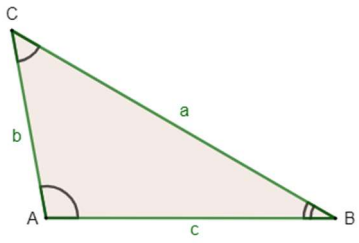
c) $2,5\sqrt{37}$

d) $21,5-2\sqrt{37}$

e) $21,5-\sqrt{37}$

Lei dos Senos e Lei dos Cossenos

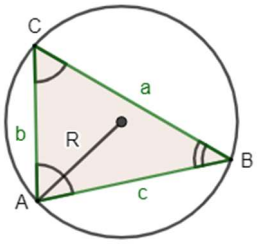
Lei dos Senos



Em qualquer triângulo, os comprimentos dos lados são diretamente proporcionais aos senos dos ângulos opostos a esses lados.

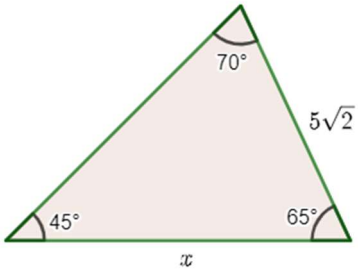
Assim: $\frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{b}{sen\,\hat{B}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}}$

Observação: Todo triângulo pode ser inscrito numa circunferência. Desse modo, podemos afirmar que $\frac{medida\ do\ lado\ do\ triângulo}{seno\ do\ ângulo\ oposto\ a\ esse\ lado} = 2R$, em que R é o raio da circunferência.



Portanto, $\frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{b}{sen\,\hat{B}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}} = 2R$

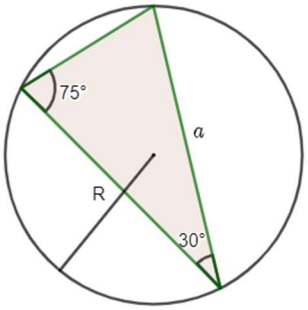
Exemplo 1: **Sabendo que $sen\,70° = 0,94$, calcule o valor de x.**



$$\frac{5\sqrt{2}}{sen\,45°} = \frac{x}{sen\,70°}$$
$$\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}/2} = \frac{x}{0,94}$$
$$10 = \frac{x}{0,94}$$
$$x = 9,4$$

Lembre-se de que $45°$ é um ângulo notável, portanto, é indispensável saber seus valores de seno, cosseno e tangente.

Exemplo 2: **Calcule o valor de a.**

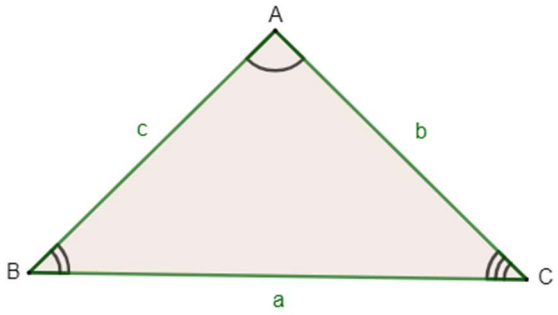


Dados: R= 8 e $sen\,75° = 0,966$.

$$\frac{a}{sen\,75°} = 2R$$
$$\frac{a}{0,966} = 2.8$$
$$a = 15,456$$

Lei dos Cossenos

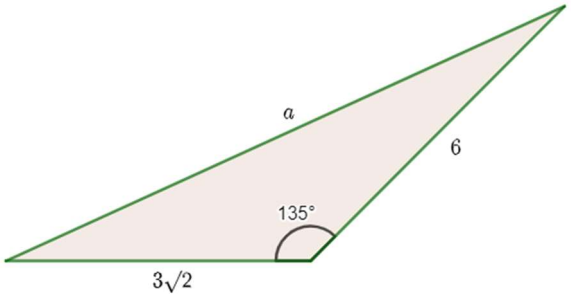
Em qualquer triângulo, o quadrado da medida de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados, subtraída de duas vezes o produto dessas duas medidas pelo cosseno do ângulo formado entre eles.



Isto é:

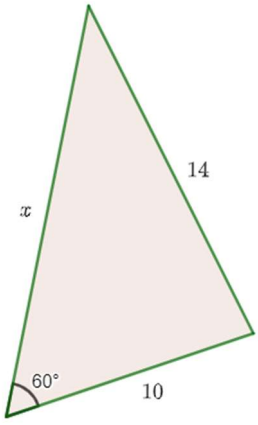
- $a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos\hat{A}$
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.\cos\hat{B}$
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos\hat{C}$

Exemplo 1: **Sabendo que $cos\ 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, calcule o valor de a.**



$$a^2 = \left(3\sqrt{2}\right)^2 + 6^2 - 2.3\sqrt{2}.6.cos\ 135°$$
$$a^2 = 18 + 36 - 36\sqrt{2}.\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$a^2 = 54 + 36$$
$$a = 3\sqrt{10}$$

Exemplo 2: **Calcule o valor de x.**

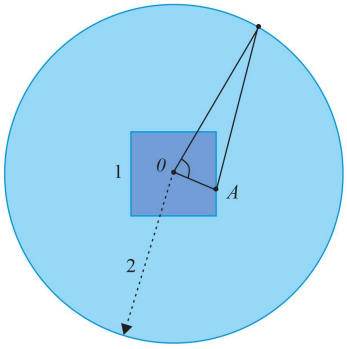


$$14^2 = x^2 + 10^2 - 2.x.10.cos\ 60°$$
$$196 = x^2 + 100 - 2.x.10.\frac{1}{2}$$
$$x^2 - 10x - 96 = 0$$
$$\Delta = b^2 - 4.a.c$$
$$\Delta = (-10)^2 - 4.1.(-96)$$
$$\Delta = 484$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}$$
$$x = \frac{-(-10) \pm \sqrt{22}}{2.1}$$
$$x' = \frac{10 + 22}{2} \rightarrow x' = 16$$
$$x' = \frac{10-2}{2} \rightarrow x' = -6$$ **(esse valor é desconsiderado já que não existe lado de tamanho negativo)**

Lembre-se de que $60°$ é um ângulo notável, portanto, é indispensável saber seus valores de seno, cosseno e tangente.

Exercícios

01 - (Fuvest SP/2022) A figura mostra um quadrado e um círculo, ambos com centro no ponto O. O quadrado tem lado medindo 1 unidade de medida (u.m.) e o círculo tem raio igual a 2 u.m. O ponto A está sobre o contorno do quadrado, o ponto B está sobre o contorno do círculo, e o segmento AB tem tamanho 2 u.m.



Quando o ângulo $\theta = A\hat{O}B$ for máximo, seu cosseno será:

a) $\frac{1}{8}$

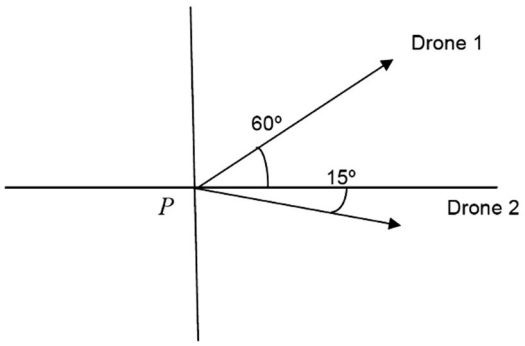
b) $\frac{1}{4}$

c) $\frac{1}{2}$

d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

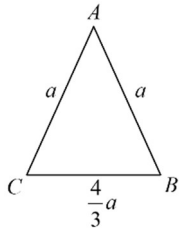
02 - (UFJF MG/2015) Os drones 1 e 2 (veículos aéreos não tripulados) saem em missão de um mesmo ponto geográfico *P* às 20h. Conforme a figura abaixo, o drone 1 tem sua rota dada na direção 60° nordeste, enquanto o drone 2 tem sua rota dada na direção 15° sudeste. Após 1 minuto, o drone 1 percorreu 1,8*Km* e o drone 2 percorreu 1*Km*, ambos em linha reta.



A distância aproximada, considerando $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ aproximadamente 1,4 e 1,7, respectivamente, em quilômetros, entre os dois drones, após 1 minuto, é igual a:

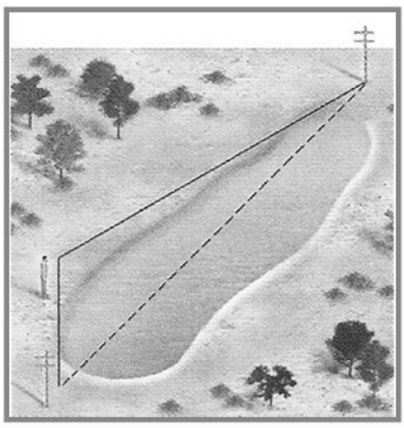
a) 1,8*Km*.
b) 2,2*Km*.
c) 2,6*Km*.
d) 3, 4*Km*.
e) 4,7*Km*.

03 - (Unimontes MG/2015) Considere o triângulo isósceles ABC da figura abaixo. É CORRETO afirmar que o cosseno do ângulo Â vale



a) $\frac{1}{9}$
b) $\frac{2}{9}$
c) $\frac{1}{3}$
d) $\frac{2}{3}$

04 - (IFSP/2015) Uma empresa de fornecimento de energia, ao instalar a rede elétrica em uma fazenda, precisou colocar dois postes em lados opostos de um lago para permitir a passagem da fiação. Com isso, surgiu um pequeno problema: para fazer o projeto da rede, seria necessário saber a distância entre os postes, e a presença do lago impedia a medição direta dessa distância. Um dos engenheiros posicionou-se em um local onde era possível visualizar os dois postes e medir a distância entre eles. Com um aparelho apropriado, ele mediu o ângulo entre a linha de visão dele e os postes, obtendo 120°. Um auxiliar mediu a distância do poste mais afastado do engenheiro e obteve 100m; outro auxiliar mediu o ângulo entre a linha do poste mais próximo do engenheiro e a linha entre os postes, obtendo 45°. Com essas informações, o engenheiro sorriu. Ele já conseguiria calcular a distância aproximada entre os postes. Assinale a alternativa que a apresenta.



a) 300m.
b) 150m.
c) 122,47m.
d) 112,17m.
e) 95,26m.

05 - (IFSP/2015) Observe, no esquema abaixo, as cidades de Recife e Natal, de onde partem aviões e barcos com destino à ilha de Fernando de Noronha.



Distâncias aproximadas:

- Natal a Fernando de Noronha: $4x10^2$km
- Recife a Fernando de Noronha: $3x\sqrt{3}$ km

Fonte(adaptado)<www.noronha.pe.gov.br>

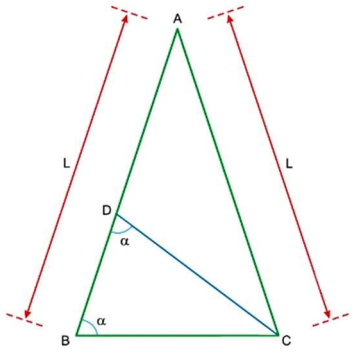
Considere os pontos N, R e F para designar, respectivamente, Natal, Recife e Fernando de Noronha. Sabendo que o ângulo $N\hat{F}R$ é igual a 30°, é correto afirmar que a distância aproximada entre as cidades de Natal e Recife é de

a) $2\sqrt{3}\times10^2\,\text{km}$
b) $\sqrt{3}\times10^2\,\text{km}$
c) $\sqrt{7}\times10^2\,\text{km}$
d) $4+\sqrt{7}\times10^2\,\text{km}$
e) $2+\sqrt{3}\times10^2\,\text{km}$

06 - (IFPE/2015) Sandro é velejador e está participando de uma competição. O barco de Sandro está se deslocando em linha reta e ele identifica os pontos A, B e C marcados na carta náutica por onde o seu barco vai passar. Quando o barco está no ponto A, ele avista um farol (F) na costa e mede o ângulo $F\hat{A}C$ de 30°. Após navegar 4 milhas náuticas, o barco chega no ponto B. Ele calcula o ângulo $F\hat{B}C$ e encontra 75°. Qual a distância, em milhas náuticas, do ponto B ao farol?

a) $\sqrt{2}$
b) $2\sqrt{2}$
c) 4
d) $4\sqrt{2}$
e) 8

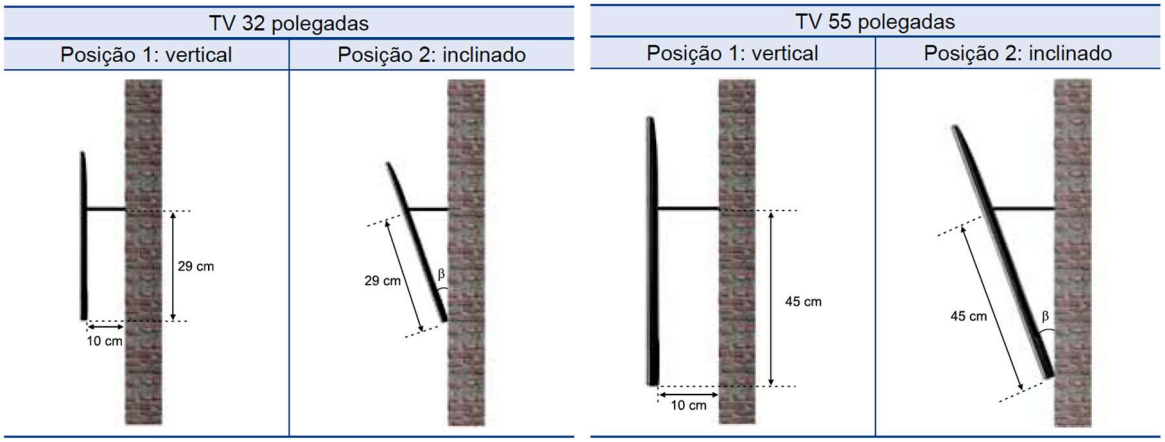
07 - (FMABC SP/2019) Na figura, ABC é um triângulo isósceles com AB = AC = L, e D é um ponto do lado $\overline{AB}$ tal que $m(C\hat{B}A) = m(C\hat{D}B) = \alpha$



Nessas condições, a medida do segmento $\overline{BD}$ é igual a

a) $2L\,\text{sen}^2\,\alpha$
b) $L\,\text{sen}^2\,\alpha$
c) $4L\,\cos^2\,\alpha$
d) $2L\,\cos^2\,\alpha$
e) $4L\,\text{sen}^2\,\alpha$

08 - (Fac. Israelita de C. da Saúde Albert Einstein SP/2019) Uma empresa desenvolveu um suporte para fixação de televisores (TVs) em paredes. O suporte pode ser utilizado em TVs de 32 até 55 polegadas e permite que o aparelho fique na vertical ou inclinado, conforme a ilustração, em que β refere-se ao ângulo máximo de inclinação.



Considere os seguintes valores aproximados para seno, cosseno e tangente:

β	sen β	cos β	tg β
10º	0,174	0,985	0,176
11º	0,191	0,982	0,194
12º	0,208	0,978	0,213
13º	0,225	0,974	0,230
14º	0,242	0,970	0,250
15º	0,259	0,966	0,268

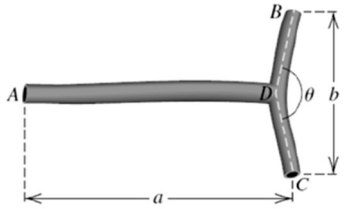
β	sen β	cos β	tg β
16º	0,276	0,961	0,287
17º	0,292	0,956	0,306
18º	0,309	0,951	0,325
19º	0,326	0,946	0,344
20º	0,342	0,940	0,364
21º	0,358	0,934	0,384

A diferença entre o ângulo máximo de inclinação da TV de 32 polegadas e da TV de 55 polegadas é um valor entre

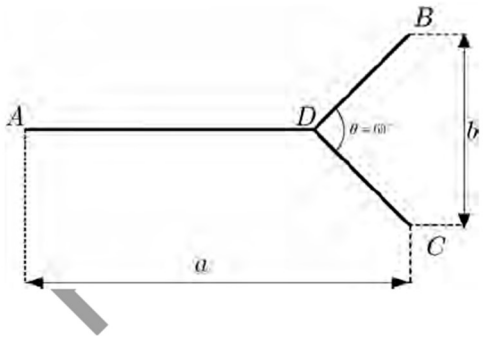
a) 1º e 3º.
b) 9º e 11º.
c) 7º e 9º.
d) 3º e 5º.

e) 5° e 7°.

09 - (UCB DF/2019) Uma forma comum de ramificação cardiovascular é a bifurcação, na qual uma artéria se divide em dois vasos sanguíneos menores. O ângulo θ de bifurcação é o ângulo formado pelas duas artérias menores. Na figura, a reta $\overline{AD}$ é perpendicular à reta $\overline{BC}$.



Para um procedimento cirúrgico, é necessário estimar o comprimento da artéria do ponto A ao ponto B. A medição é feita por meio de uma ressonância magnética que modela a bifurcação, como se verifica na figura geométrica representada a seguir, em que $\overline{BD} = \overline{CD}, \overline{AD} \perp \overline{BC}$ e $\theta = 60°$.



Qual é o comprimento da artéria que vai do ponto *A* ao ponto *B*, em função das medidas *a* e *b*?

a) $a + \frac{b}{2}(1 - \sqrt{3})$

b) $a + b(1 - \frac{\sqrt{3}}{2})$

c) $\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\sqrt{3}$

d) $a\sqrt{3} + \frac{b}{2}(1 - \sqrt{3})$

e) $\frac{a}{2} + \frac{b}{2}(1 + \sqrt{3})$

10 - (UESB BA/2020) Considere um paralelogramo de lados medindo 2 6cm e 3 6cm. Se o ângulo interno agudo desse paralelogramo mede 60°, o comprimento, em centímetros, da maior diagonal desse paralelogramo é

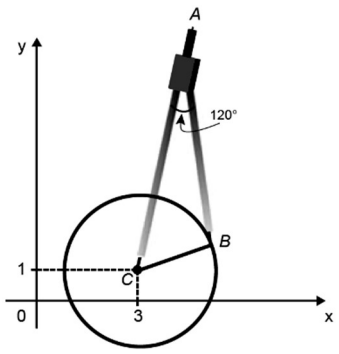
01. $\sqrt{19}$
02. $\sqrt{38}$
03. $\sqrt{57}$
04. $\sqrt{114}$

05. $2\sqrt{57}$

11 - (UECE/2016) A medida do cosseno do maior dos ângulos internos do triângulo cujas medidas dos lados são respectivamente 8 m, 10 m e 15 m é igual a

a) –0,38125.
b) –0,42112.
c) –0,43713.
d) –0,46812.

12 - (ENEM MEC/2017) Uma desenhista projetista deverá desenhar uma tampa de panela em forma circular. Para realizar esse desenho, ela dispõe, no momento, de apenas um compasso, cujo comprimento das hastes é de 10 cm, um transferidor e uma folha de papel com um plano cartesiano. Para esboçar o desenho dessa tampa, ela afastou as hastes do compasso de forma que o ângulo formado por elas fosse de 120°. A ponta seca está representada pelo ponto C, a ponta do grafite está representada pelo ponto B e a cabeça do compasso está representada pelo ponto A conforme a figura.



Após concluir o desenho, ela o encaminha para o setor de produção. Ao receber o desenho com a indicação do raio da tampa, verificará em qual intervalo este se encontra e decidirá o tipo de material a ser utilizado na sua fabricação, de acordo com os dados.

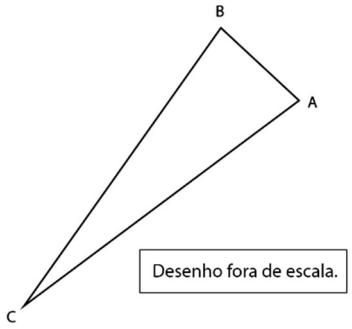
Tipo de material	Intervalo de valores do raio (cm)
I	$0 < R \leq 5$
II	$5 < R \leq 10$
III	$10 < R \leq 15$
IV	$15 < R \leq 21$
V	$21 < R \leq 40$

Considere 1,7 como aproximação para $\sqrt{3}$.

O tipo de material a ser utilizado pelo setor de produção será

a) I.
b) II.
c) III.
d) IV.
e) V.

13 - (Fatec SP/2017) A maior parte dos refugiados sírios que solicita abrigo na Europa escolhe a Alemanha como destino. No entanto, muitos refugiados sírios têm vindo também para o Brasil.
Considere o triângulo ABC no qual o vértice A representa a cidade de Aleppo, na Síria; o vértice B representa a cidade de Berlim, na Alemanha, e o vértice C representa a cidade de Campinas, no Brasil.



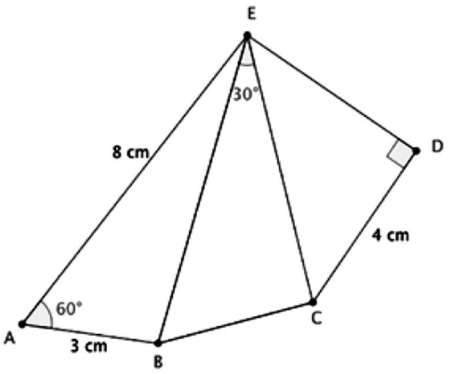
Nesse triângulo, a distância entre A e B é de 3 700 km, a medida de $A\hat{C}B$ é igual a 18° e a medida de $A\hat{B}C$ é igual a 81°.
Com base nos dados apresentados, se um refugiado sírio viaja de Aleppo a Berlim e, em seguida, de Berlim a Campinas, terá percorrido no mínimo x quilômetros em todo o trajeto.
Adote:

sen 18° = 0,31	sen 81° = 0,98
cos 18° = 0,95	cos 81° = 0,16

O valor de x é mais próximo de

a) 11 300.
b) 12 300.
c) 13 300.
d) 14 300.
e) 15 300.

14 - (Fac. Israelita de C. da Saúde Albert Einstein SP/2017) No pentágono ABCDE da figura, o lado $\overline{AB}$ mede 3 cm; o lado $\overline{AE}$ mede 8 cm; o lado $\overline{CD}$ mede 4 cm e os ângulos BÊC, Â e $\hat{D}$ medem 30°, 60° e 90° respectivamente.



Sendo a área do triângulo BCE igual a 10,5 cm², a medida, em cm, do lado $\overline{DE}$ é

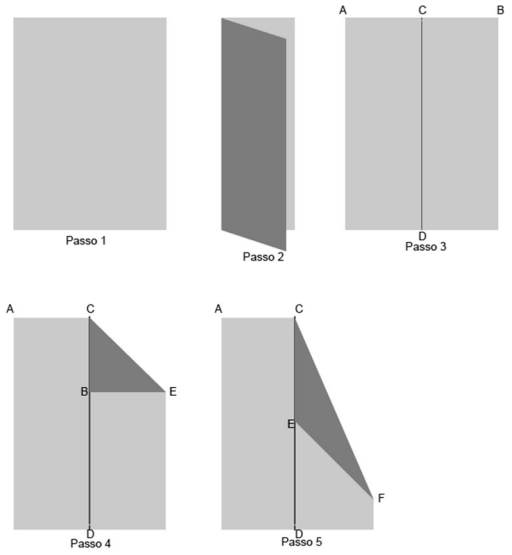
a) $\sqrt{18}$

b) $\sqrt{20}$

c) $\sqrt{22}$

d) $\sqrt{24}$

15 - (Udesc SC/2017) As instruções da figura referem-se ao início da construção de um avião de origami (papel dobrado).



Passos para construir um avião

1 - Dobre a folha exatamente ao meio no sentido mais longo para fazer um vinco e desdobre (Passo 1, 2 e 3).

2 - Dobre o canto B para baixo de forma a colocar o segmento CB sobre o segmento CD (Passo 4).

3 - Dobre o papel de forma que o segmento CE fique sobre o segmento CD (Passo 5).

Se a folha de papel inicial tem 25cm x 40cm, o lado maior do triângulo isósceles CEF, formado após a última dobra indicada, é:

a) $\frac{25\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{2}$ cm

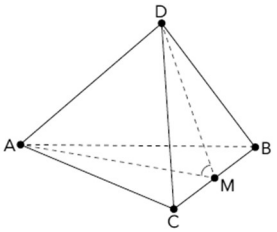
b) 12,5 cm

c) $\frac{25\sqrt{2}}{2}$ cm

d) 25 cm

e) $25\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}$ cm

16 - (UERJ/2017) Uma pirâmide com exatamente seis arestas congruentes é denominada tetraedro regular. Admita que a aresta do tetraedro regular ilustrado a seguir, de vértices ABCD, mede 6 cm e que o ponto médio da aresta BC é M.



O cosseno do ângulo $A\hat{M}D$ equivale a:

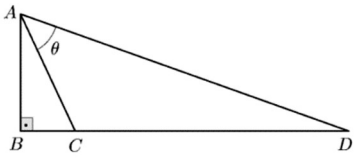
a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{3}$

c) $\frac{2}{3}$

d) $\frac{2}{5}$

17 - (Unicamp SP/2017) Considere o triângulo retângulo ABD exibido na figura abaixo, em que AB = 2 cm, BC = 1 cm e CD = 5 cm. Então, o ângulo θ é igual a



a) 15°.
b) 30°.
c) 45°.
d) 60°.

18 - (EBMSP BA/2018) Inspirado no modelo da figura uma pessoa decidiu fabricar um nicho suspenso, do mesmo tipo, com algumas modificações. Para tanto usou uma placa circular com 40cm de diâmetro, a ser suspensa, verticalmente, de um ponto 60cm acima do centro da placa por seis fios, de mesmo comprimento, que foram afixados à circunferência do disco em intervalos iguais de modo a mantê-lo em um plano horizontal.



Desprezando-se a espessura da placa e dos fios, pode-se afirmar que o valor do cosseno do ângulo entre dois fios adjacentes mede

a) $\frac{7}{10}$

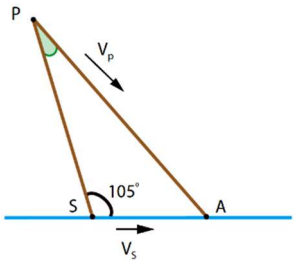
b) $\frac{3}{4}$

c) $\frac{4}{5}$

d) $\frac{9}{10}$

e) $\frac{19}{20}$

19 - (UERJ/2018) Considere os pontos S e P, que se deslocam em movimento retilíneo e com velocidade constante, sendo V_s = 1 m/s e V_p = 3,5 m/s. Eles partem no mesmo instante e se encontram no ponto A, conforme ilustrado abaixo.



Observe na tabela os valores aproximados de seno, cosseno e tangente de alguns ângulos:

α	15°	16°	17°	18°	19°	20°
seno	0,26	0,28	0,29	0,31	0,32	0,34
cosseno	0,98	0,97	0,96	0,95	0,945	0,94
tangente	0,28	0,29	0,31	0,325	0,34	0,36

Se o ângulo $A\hat{S}P$ mede 105°, a medida do ângulo agudo $A\hat{P}S$, em graus, é:

a) 16
b) 17
c) 18
d) 19

20 - (UECE/2020) A medida, em graus, do maior dos ângulos internos de um triângulo, cujas medidas dos lados são, respectivamente, 3m, 5m e 7m, é
a) 120.
b) 80.
c) 130.
d) 100.

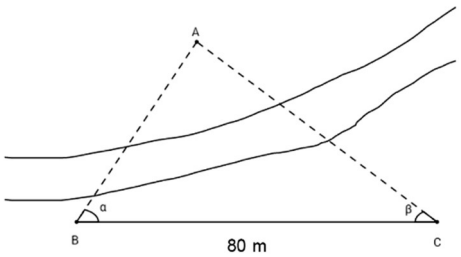
21 - (ITA SP/2018) Os lados de um triângulo de vértices A, B e C medem AB = 3 cm, BC = 7 cm e CA = 8 cm. A circunferência inscrita no triângulo tangencia o lado $\overline{AB}$ no ponto N e o lado $\overline{CA}$ no ponto K. Então, o comprimento do segmento $\overline{NK}$, em cm, é

a) 2.
b) $2\sqrt{2}$.
c) 3.
d) $2\sqrt{3}$.
e) $\frac{7}{2}$.

22 - (UECE/2018) Se as medidas de dois dos lados de um triângulo são respectivamente 7m e $5 \cdot \sqrt{2}$ m e se a medida do ângulo entre esses lados é 135 graus, então, a medida, em metros, do terceiro lado é

a) 12.
b) 15.
c) 13.
d) 14.

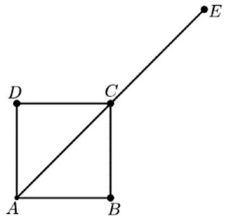
23 - (Unemat MT/2018) Um topógrafo deseja medir a distância entre dois pontos (A e C), situados em margens opostas de um rio. Para isso, ele escolheu um ponto B, à 80m do ponto C, com o qual ele obteve os ângulos $\alpha = 60^{\circ}$ e $\beta = 30^{\circ}$, indicados na figura abaixo.



De acordo com a figura, assinale a alternativa que corresponde à distância (em metros) do ponto A ao ponto C, considerando $\sqrt{3} = 1{,}73$.

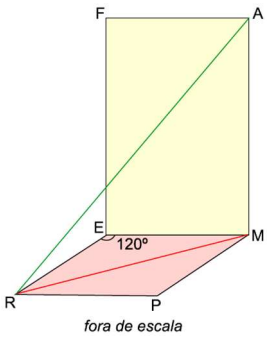
a) 34,60m
b) 40m
c) 46,13m
d) 69,20m
e) 138,40m

24 - (Unicamp SP/2018) Considere que o quadrado ABCD, representado na figura abaixo, tem lados de comprimento de 1 cm, e que C é o ponto médio do segmento AE. Consequentemente, a distância entre os pontos D e E será igual a



a) $\sqrt{3}$ cm.
b) 2 cm.
c) $\sqrt{5}$ cm.
d) $\sqrt{6}$ cm.

25 - (Famerp SP/2020) A figura indica o retângulo FAME e o losango MERP desenhados, respectivamente, em uma parede e no chão a ela perpendicular. O ângulo $M\hat{E}R$ mede 120°, ME = 2 m e a área do retângulo FAME é igual a 12 m².



Na situação descrita, a medida de $\overline{RA}$ é

a) $3\sqrt{3}\text{m}$
b) $4\sqrt{3}\text{m}$
c) $5\sqrt{2}\text{m}$
d) $3\sqrt{2}\text{m}$
e) $4\sqrt{2}\text{m}$

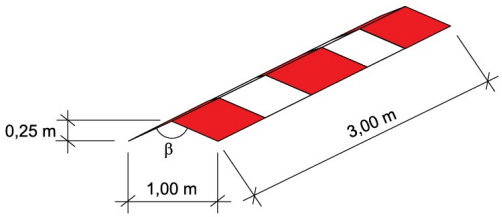
26 - (PUC RS/2021) Uma empresa gaúcha possui três grandes centros de distribuição nas cidades de Pelotas, Porto Alegre e Santa Cruz do Sul. O transporte de suas cargas é feito por aeronave e o percurso entre as cidades é feito em linha reta, conforme a figura abaixo.



A distância, em linha reta, de Pelotas a Porto Alegre é de 200 km e a distância de Pelotas a Santa Cruz do Sul é de 250 km. Sabendo que a aeronave saiu de Porto Alegre e levou 30 minutos para chegar a Santa Cruz do Sul, qual foi a velocidade média da aeronave, em km/h? Considere $\cos\ \beta \cong 0{,}8$.

a) 100
b) 150
c) 300
d) 350

27 - (Unesp SP/2021) Na aviação, o perímetro da região que define a fase final da manobra de aproximação para um helicóptero pairar ou pousar pode ser definido por meio de sinalizadores uniformemente espaçados. As características dimensionais desses sinalizadores de perímetro estão indicadas na figura a seguir.



(Agência Nacional de Aviação Civil. RBAC, no 155. Adaptado.)

Uma empresa contratada para produzir esse sinalizador está definindo os parâmetros para a produção em escala do artefato. Para tanto, é necessário conhecer o valor do ângulo β de abertura do sinalizador, indicado na figura, respeitadas as medidas nela apresentadas.

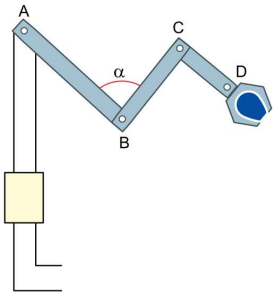
Considere a tabela trigonométrica a seguir.

Ângulo φ	14,5°	26,6°	30,0°	60,0°	63,4°	72,9°
sen φ	0,25	0,45	0,50	0,87	0,89	0,96
cos φ	0,97	0,89	0,87	0,50	0,45	0,29
tg φ	0,26	0,50	0,58	1,73	2,00	3,25

De acordo com a tabela, o ângulo β necessário para a produção do sinalizador é igual a:

a) 126,8°
b) 120,0°
c) 116,5°
d) 150,0°
e) 107,1°

28 - (Unesp SP/2023) A figura indica o projeto de um braço mecânico em que $\overline{AB}$ assume função próxima de um bíceps humano, $\overline{BC}$ de um antebraço e $\overline{CD}$ de um punho. Sabe-se que a medida de $\overline{AB}$ supera a de $\overline{CD}$ em 11 cm e que a medida de $\overline{BC}$ é 8 cm.

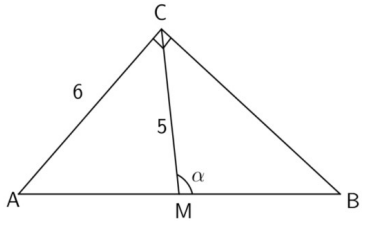


Se, para a $\alpha = 60^{\circ}$, a distância entre os pontos A e C do mecanismo é igual a $8\sqrt{3}$ cm, a extensão máxima horizontal do braço mecânico, em cm, é igual a

a) 31.
b) 28.
c) 30.
d) 27.

e) 29.

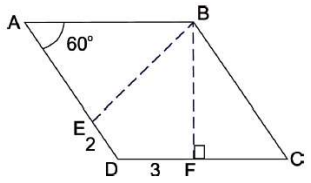
29 - (Unicamp SP/2023) A figura seguinte mostra um triângulo retângulo ABC. O ponto M é o ponto médio do lado AB, que é a hipotenusa.



O valor de sen α é

a) 24/25.
b) 5/6.
c) 1/2.
d) $\sqrt{3}/2$.

30 - (Unicamp SP/2024) No losango abaixo, qual é a medida do comprimento do segmento BE?

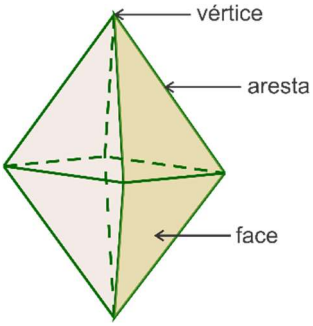


a) $\sqrt{26}$
b) $\sqrt{27}$
c) $\sqrt{28}$
d) $\sqrt{29}$

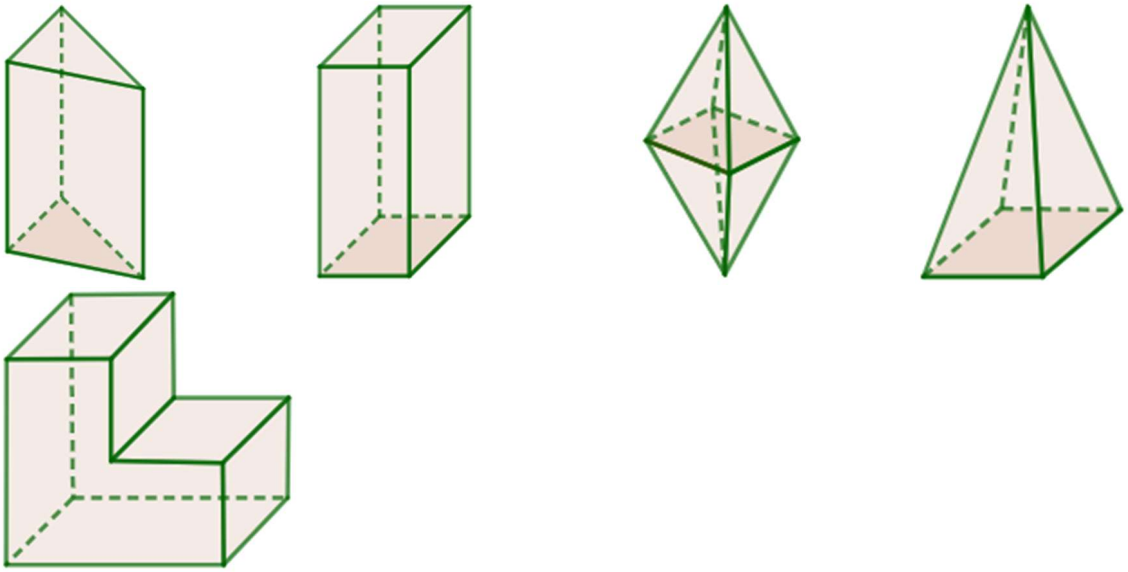
Poliedros, Prismas e Cilindros

Poliedros

Os poliedros são formados pela reunião de faces e do espaço limitado por elas. Nos poliedros, cada lado do polígono comum a duas faces é chamado de aresta, e cada vértice de uma face é um vértice do poliedro.

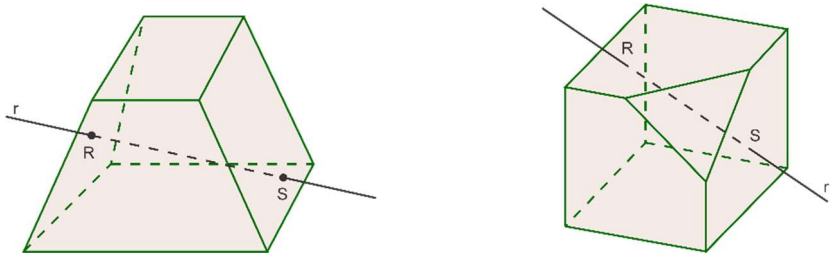


São exemplos de poliedros:

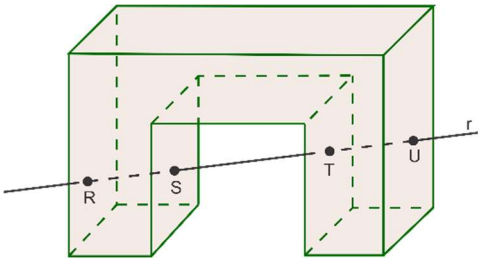


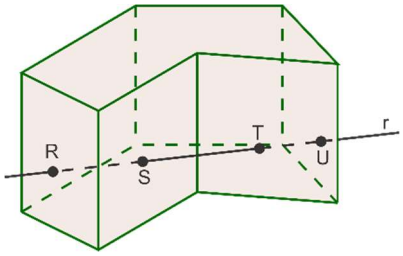
Poliedro Convexo e Não Convexo

Um poliedro é convexo quando uma reta qualquer, não paralela a nenhuma das faces, intersecta suas faces em apenas dois pontos.



Do mesmo modo, um poliedro é não convexo quando uma reta qualquer, não paralela a nenhuma das faces, intersecta suas faces em mais de dois pontos.





Relação de Euler

É uma relação entre os números de vértices (V), arestas (A) e faces (F) de um poliedro convexo. Essa relação é dada por:

$$\boldsymbol{V - A + F = 2}$$

Exemplo: Determine o número de faces de um poliedro convexo que possui 12 vértices e 30 arestas.

Para encontrarmos o número de faces de um poliedro a partir do número de vértices e de arestas devemos utilizar a relação de Euler. Assim,

$$V - A + F = 2 \Rightarrow 12 - 30 + F = 2 \Rightarrow F = 20 \text{ faces.}$$

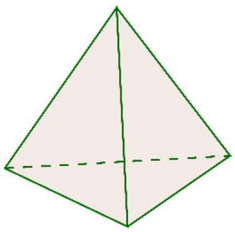
Atenção!

Observações sobre a relação de Euler

- Alguns poliedros não convexos também obedecem à relação de Euler.
- No poliedro não convexo a expressão V-A+F pode ser diferente de 2.
- Considerando três números, V, A e F, para V-A+F=2, nem sempre há um poliedro com V vértices, A arestas e F faces.

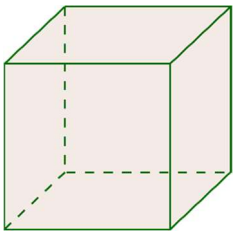
Poliedros Regulares

Os poliedros regulares são poliedros convexos em que todas as suas faces são polígonos regulares e congruentes e em todos os seus vértices convergem o mesmo número de arestas.
Existem apenas cinco poliedros regulares. São eles:

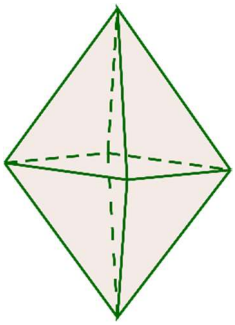


Tetraedro:

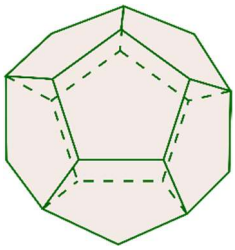
- 4 faces triangulares equiláteras.
- 3 arestas que concorrem em cada vértice.



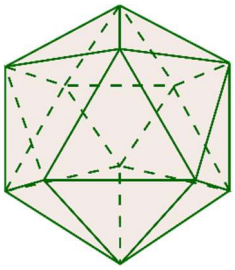
Cubo:
- 6 faces quadradas.
- 3 arestas que concorrem em cada vértice.



Octaedro:
- 8 faces triangulares equiláteras.
- 4 arestas que concorrem em cada vértice.



Dodecaedro:
- 12 faces pentagonais regulares e congruentes.
- 3 arestas que concorrem em cada vértice.

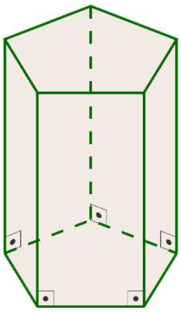


Icosaedro:
- 20 faces triangulares equiláteras.
- 5 arestas que concorrem em cada vértice.

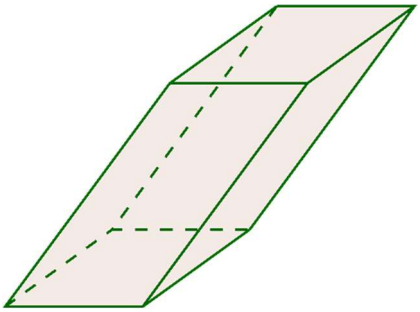
Prismas

Prismas são poliedros que possuem duas faces paralelas e opostas ligadas por faces retangulares.

São exemplos de prismas:

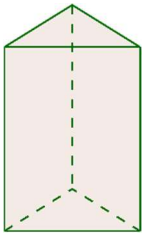


Prisma Reto



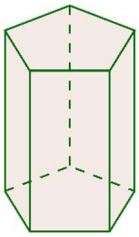
Prisma Oblíquo

Prismas Retos



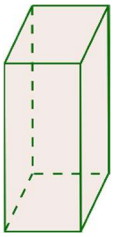
Prisma Reto de Base Triangular

- Possui bases triangulares.
- As faces laterais são retangulares.



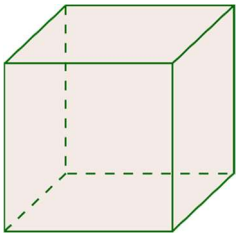
Prisma Reto de Base Pentagonal

- Possui bases pentagonais.
- As faces laterais são retangulares.



Prisma Reto de Base Retangular

- Também chamado de paralelepípedo retângulo.
- Todas as faces são retangulares.



Hexaedro Regular

- Também chamado de cubo.
- É um caso particular de paralelepípedo retângulo, em que todas as faces são um quadrado.

Atenção!

Paralelepípedo

- É o prisma cuja base é um paralelogramo.

- O paralelepípedo é um caso particular de prisma já que qualquer uma de suas faces pode ser considerada como base. Isso acontece porque em qualquer par de faces opostas elas estão localizadas em planos paralelos e são ligadas por arestas paralelas entre si.

Área da Superfície de um Prisma

A área total de um prisma é igual à área das bases adicionada da área lateral do prisma.

Portanto: $\boldsymbol{A_{total} = 2 \cdot A_{base} + A_{lateral}}$

Exemplo 1: Calcular a área do prisma reto de base retangular e regular com altura $\boldsymbol{h = 10\ cm}$ e lado da base $\boldsymbol{l = 4\ cm}$.

Para calcularmos a área de um prisma reto devemos encontrar os valores da área da base e da área lateral. Desse modo, temos

Para área da base:

$$A_b = l^2 \Rightarrow A_b = 4^2 \Rightarrow A_b = 16\ cm^2.$$

Para área lateral:
Devemos lembrar de que o prisma de base retangular possui 4 faces laterais, portanto, devemos multiplicar o valor da área da face por 4. Assim,

$$A_l = 4 \cdot l \cdot h \Rightarrow A_l = 4 \cdot 4 \cdot 10 \Rightarrow A_l = 160\ cm^2.$$

Aplicando a fórmula da área do prisma, temos

$$A_{total} = 2 \cdot A_{base} + A_{lateral} \Rightarrow A_{total} = 2 \cdot 16 + 160 \Rightarrow A_{total} = 192\ cm^2.$$

Logo, a área do prisma é igual a $192\ cm^2$.

Volume do Prisma

O volume de um prisma é dado pelo produto da área da base pela altura.

Logo: $\boldsymbol{V = A_b \cdot h}$

Exemplo: Calcular o volume do prisma reto de base triangular regular com lados da base medindo $\boldsymbol{2\ cm}$ e altura do prisma medindo $\boldsymbol{6\ cm}$.

O primeiro passo para calcularmos o volume do prisma é encontrar o valor da área de sua base. Então, se o prisma possui base triangular e regular de medida 2 cm, podemos afirmar que a base desse prisma é um triângulo equilátero de lado 2 cm. Logo,

$$A_b = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_b = \frac{2^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_b = \sqrt{3}.$$

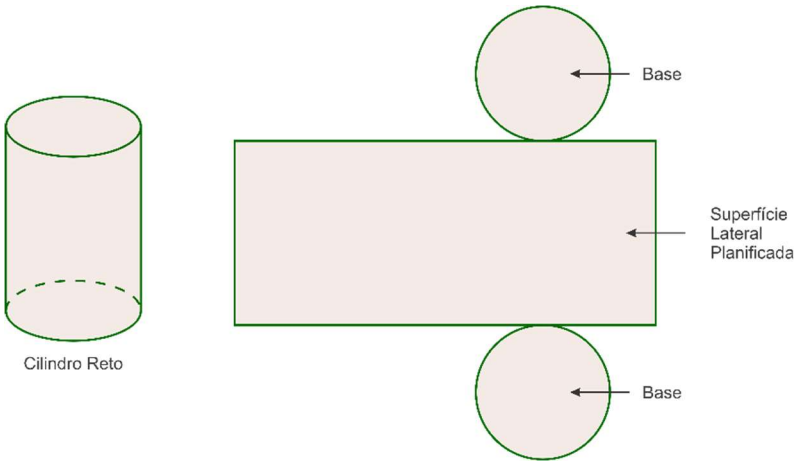
Em seguida, aplicamos a fórmula do volume de um prisma.

$$V = A_b \cdot h \Rightarrow V = \sqrt{3} \cdot 6 \Rightarrow V = 6\sqrt{3}\ cm^3.$$

Portanto, o volume do prisma é igual a $6\sqrt{3}\ cm^2$.

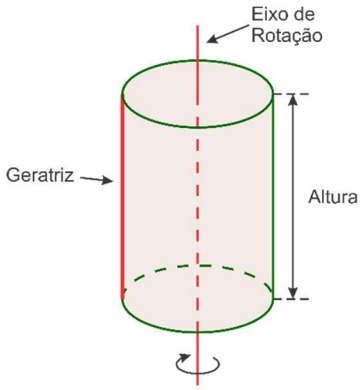
Cilindros

Os cilindros são sólidos cuja superfície é formada por duas partes planas, chamadas de base, e uma parte não plana, chamada de superfície lateral.

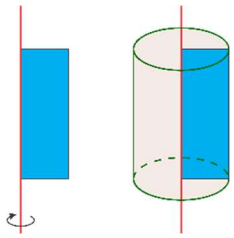


- **Elementos do cilindro:**

- **Altura**: distância entre os planos da base.
- **Eixo**: reta que passa pelo centro das bases.
- **Geratriz**: segmentos paralelos ao eixo em que as extremidades são pontos das circunferências das bases.

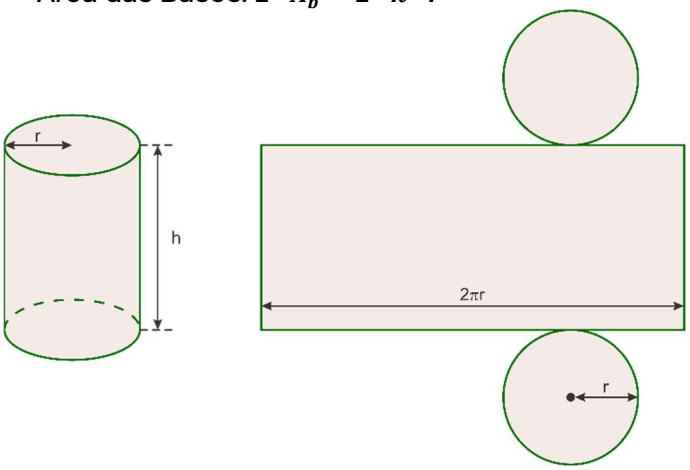


Observação: O cilindro pode ser chamado de cilindro de revolução. Isso acontece porque ele pode ser obtido através do giro completo de um retângulo em torno do eixo determinado por um de seus lados.



Área da Superfície de um Cilindro Reto

- Área Lateral: $A_l = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$
- Área das Bases: $2 \cdot A_b = 2 \cdot \pi \cdot r^2$
- Área Total: $A_t = 2\pi r(h + r)$



Exemplo: Calcular a área total da superfície de um cilindro de raio 2 cm e altura 10 cm.

Para calcularmos a área total da superfície de um cilindro podemos calcular e somar as áreas das bases e lateral, ou aplicar diretamente na fórmula da área total do cilindro.

Calculando e somando as áreas das bases e lateral, temos:

Passo 1: Calcular área das bases.

$$2 \cdot A_b = 2 \cdot \pi \cdot r^2 \Rightarrow 2 \cdot A_b = 2 \cdot \pi \cdot 2^2 \Rightarrow 2 \cdot A_b = 8\pi\ cm^2.$$

Passo 2: Calcular área lateral.

$$A_l = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h \Rightarrow A_l = 2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 10 \Rightarrow A_l = 40\pi\ cm^2.$$

Passo 3: Somar as áreas encontradas.

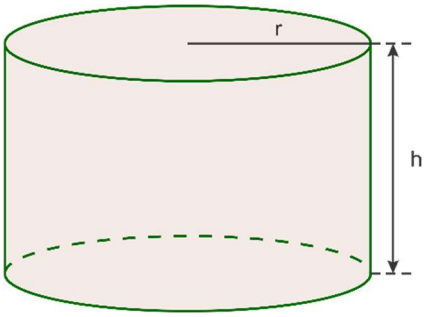
$$A_t = 2 \cdot A_b + A_l \Rightarrow A_t = 8\pi + 40\pi \Rightarrow A_t = 48\pi\ cm^2.$$

Aplicando diretamente na fórmula da área total do cilindro, temos:

$$A_t = 2\pi r(h + r) \Rightarrow A_t = 2\pi \cdot 2(10 + 2) \Rightarrow A_t = 48\pi\ cm^2.$$

Logo, a área total do cilindro é $A_t = 48\pi\ cm^2$.

Volume do Cilindro



O volume do cilindro é dado por:

$V_{cilindro} = A_{base}.h$

$\boldsymbol{V_{cilindro} = \pi.r^2.h}$

Exemplo: Calcular o volume do cilindro de raio 5 cm e altura 8 cm.
Calculamos o volume do cilindro aplicando os valores do raio e da altura na fórmula do volume de um cilindro.

$$V_{cilindro} = \pi . r^2 . h \Rightarrow V_{cilindro} = \pi \cdot 5^2 \cdot 8 \Rightarrow V_{cilindro} = 200\pi \ cm^2.$$

Exercícios

01 - (ENEM MEC/2023) Uma piscina de um clube tem o formato de paralelepípedo reto retângulo com 50 m de comprimento, 25 m de largura e 3 m de profundidade. O proprietário do clube construirá duas novas piscinas, de formatos diferentes, e necessita que cada uma tenha o mesmo volume da existente ou o mais próximo possível desse volume. A empresa de construção contratada disponibilizou, para a avaliação desse proprietário, uma proposta com cinco projetos de piscina: três com o formato de cilindro circular reto e duas com o formato de paralelepípedo reto retângulo:

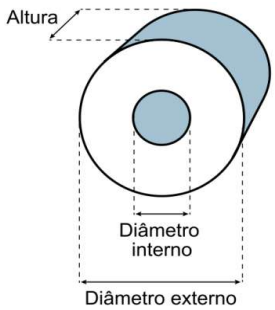
- piscina cilíndrica I (C_1): 50 m de diâmetro de base e 2 m de profundidade;
- piscina cilíndrica II (C_2): 40 m de diâmetro de base e 3 m de profundidade;
- piscina cilíndrica III (C_3): 46 m de diâmetro de base e 2,5 m de profundidade;
- piscina em formato de paralelepípedo I (P_1): 62 m de comprimento, 24 m de largura e 2 m de profundidade;
- piscina em formato de paralelepípedo II (P_2): 64 m de comprimento, 30 m de largura e 2 m de profundidade.

Considere 3 como valor aproximado de π.

Para atender às suas necessidades, dentre os projetos propostos, o proprietário desse clube deverá escolher as piscinas

a) C_1 e P_2.
b) C_1 e C_3.
c) C_2 e P_1.
d) C_3 e P_2.
e) P_1 e P_2.

02 - (ENEM MEC/2023) Um rolo de papel higiênico tradicional é representado por um cilindro circular reto retirando-se outro cilindro circular reto interior, de mesmo eixo de simetria, mesma altura e diâmetro menor, conforme a figura.



Considere um rolo de papel higiênico com 12 cm de diâmetro externo, 4 cm de diâmetro interno e 10 cm de altura.

O volume, em centímetro cúbico, desse rolo é

a) 80π.
b) 160π.
c) 320π.
d) 640π.
e) $1\,280\pi$.

03 - (ENEM MEC/2023) A água utilizada pelos 75 moradores de um vilarejo provém de um reservatório de formato cilíndrico circular reto cujo raio da base mede 5 metros, sempre abastecido no primeiro dia de cada mês por caminhões-pipa. Cada morador desse vilarejo consome, em média, 200 litros de água por dia.
No mês de junho de um determinado ano, o vilarejo festejou o dia do seu padroeiro e houve um gasto extra de água nos primeiros 20 dias. Passado esse período, as pessoas verificaram a quantidade de água presente no reservatório e constataram que o nível da coluna de água estava em 1,5 metro. Decidiram, então, fazer um racionamento de água durante os 10 dias seguintes.

Considere 3 como aproximação para π.

Qual é a quantidade mínima de água, em litro, que cada morador, em média, deverá economizar por dia, de modo que o reservatório não fique sem água nos próximos 10 dias?

a) 50
b) 60
c) 80
d) 140
e) 150

Horário (h)	Nível da água (m)
6:00	0,5
8:00	1,1
12:00	2,3
15:00	3,2



04 - (ENEM MEC/2023) A foto mostra a construção de uma cisterna destinada ao armazenamento de água. Uma cisterna como essa, na forma de cilindro circular reto com 3 m^2 de área da base, foi abastecida por um curso-d'água com vazão constante. O seu proprietário registrou a altura do nível da água no interior da cisterna durante o abastecimento em diferentes momentos de um mesmo dia, conforme o quadro.

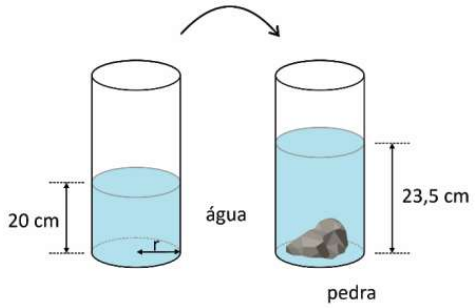
Disponível em: www.paraibamix.com. Acesso em: 3 dez. 2012.

Qual foi a vazão, em metro cúbico por hora, do curso-d'água que abasteceu a cisterna?

a) 0,3

b) 0,5
c) 0,9
d) 1,8
e) 2,7

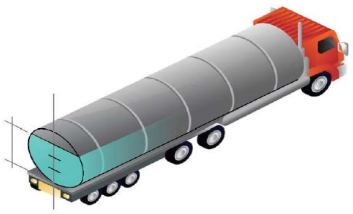
05 - (Fuvest SP/2023) Para medir o volume de uma pedra com formato irregular, Ana utilizou um recipiente cilíndrico de raio r = 8 cm e com água até a altura de 20 cm. Após colocar a pedra no recipiente, a altura da água subiu para 23,5 cm.



O volume da pedra é:

a) $128\,\pi\ cm^3$
b) $224\,\pi\ cm^3$
c) $240\,\pi\ cm^3$
d) $282\,\pi\ cm^3$
e) $320\,\pi\ cm^3$

06 - (Fuvest SP/2024) O reservatório de um caminhão-pipa tem a forma de um cilindro circular reto com eixo horizontal e dimensões internas de 6 metros de comprimento e 2 metros de diâmetro. Uma escola contratou o serviço do caminhão-pipa para abastecer sua caixa d'água. Após o abastecimento, o motorista percebeu que o reservatório do caminhão estava cheio até 3/4 de sua altura, conforme ilustrado na figura.



Qual foi o volume, em metros cúbicos, de água utilizada para abastecer a caixa d'água da escola, sabendo que o reservatório do caminhão estava cheio antes do abastecimento?

a) $\left(2\pi - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$
b) $\left(2\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

c) $\left(2\pi+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

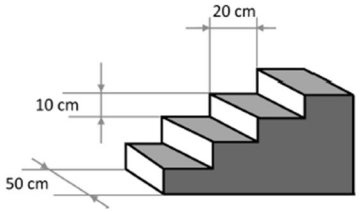
d) $\left(4\pi+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

e) $\left(4\pi+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

07 - (UFPR/2019) Diana pretende distribuir 6 litros de geleia em 25 potes iguais. Cada pote possui internamente o formato de um paralelepípedo de base quadrada com 5 cm de lado. Dividindo igualmente a geleia em todos os potes, qual é a altura interna que a geleia atingirá em cada recipiente?

a) 6,0 cm.
b) 7,5 cm.
c) 9,6 cm.
d) 15,0 cm.
e) 24,0 cm.

08 - (Fuvest SP/2019) A figura mostra uma escada maciça de quatro degraus, todos eles com formato de um paralelepípedo reto-retângulo. A base de cada degrau é um retângulo de dimensões 20 cm por 50 cm, e a diferença de altura entre o piso e o primeiro degrau e entre os degraus consecutivos é de 10 cm. Se essa escada for prolongada para ter 20 degraus, mantendo o mesmo padrão, seu volume será igual a



a) 2,1 m^3
b) 2,3 m^3
c) 3,0 m^3
d) 4,2 m^3
e) 6,0 m^3

09 - (Fac. Cesgranrio RJ/2019) Considere um recipiente que tem a forma de um paralelepípedo retângulo, de arestas medindo 25 cm, 25 cm e 90 cm, ilustrado na Figura I. Ele está apoiado em uma de suas faces quadradas, sobre uma mesa horizontal, e encontra-se totalmente vazio.
Um segundo recipiente tem a forma de um cubo de aresta 30 cm e encontra-se totalmente cheio de água (Figura II). O conteúdo do cubo é despejado no paralelepípedo enchendo-o até uma altura x.

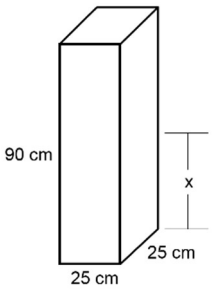


Figura I

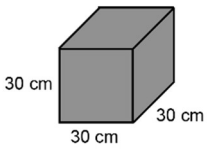


Figura II

Nessas circunstâncias, desprezando a espessura dos recipientes, o valor de x, em centímetros, é

a) 25,2
b) 27
c) 30
d) 43,2
e) 45

10 - (IFSC/2019) Edison gerencia um clube que possui uma piscina com 6 metros de largura, 15 metros de comprimento e profundidade de 2 metros. Para que a água dentro da piscina fique com uma altura ideal aos visitantes, ele necessita enchê-la com 70% do volume máximo de água que a piscina suporta. Dessa forma, o volume de água que Edison necessita para encher a piscina conforme desejado é de:

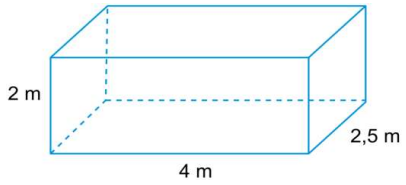
Assinale a alternativa CORRETA.

a) 126.000 L
b) 126 L
c) 54000 L
d) 12600 L
e) 54 L°

11 - (UECE/2019) Em um prisma triangular reto, a base XYZ é um triângulo retângulo cuja medida dos catetos são respectivamente 3 m e 4 m. Se a medida do volume desse prisma é 18 m^3, então, a medida, em metros quadrados, da superfície total desse prisma é

a) 36.
b) 48.
c) 32.
d) 52.

12 - (UEA AM/2020) De acordo com o projeto original, um reservatório, com formato de paralelepípedo reto retângulo, de volume V, teria 4 m de comprimento, 2,5 m de largura e 2 m de altura, conforme figura.



Pretende-se modificar esse projeto, mantendo-se a forma do reservatório, o volume V e a altura igual a 2 m. Nessas condições, se a medida da largura for reduzida em 20%, a medida do comprimento deverá ser

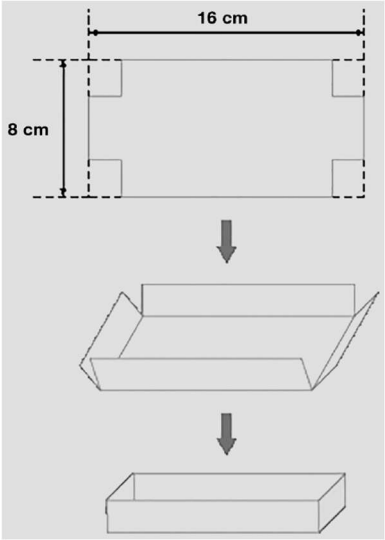
a) 4,75 m.
b) 4,5 m.
c) 4,25 m.
d) 4,8 m.
e) 5,0 m.

13 - (Cefet MG/2020) Carlos solicitou a um carpinteiro a construção de uma caixa no formato de um paralelepípedo retangular, com dimensões x, 2x e 3x cm. Após analisar todos os materiais que precisavam ser guardados nessa caixa, o carpinteiro explicou a Carlos que o espaço seria insuficiente e que, portanto, ela deveria ser maior que aquela inicialmente solicitada. Assim, a caixa construída passou a ter as seguintes dimensões (x + 1), (2x + 2), (3x + 2) cm.

A diferença entre o volume da caixa construída pelo carpinteiro e o volume da caixa inicialmente solicitada por Carlos, em cm^3 é

a) $2\ (8x^2 + 7x + 2)$
b) $3\ (2x^2 + 5x + 1)$
c) $4\ (x^2 + 3x + 4)$
d) $6\ (2x^2 + 6x + 2)$

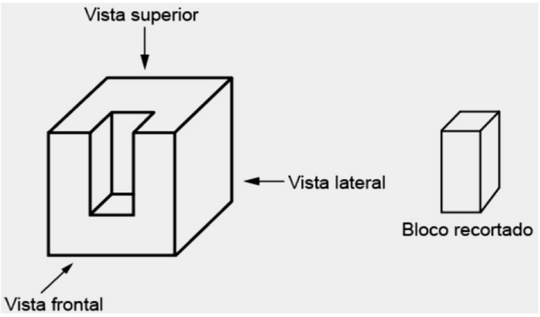
14 - (IFBA/2020) Uma folha retangular de papel reciclado tem 16 cm de comprimento e 8 cm de largura, e será utilizado para formar uma pequena caixa aberta, sem tampa. Foram recortados quatro pequenos quadrados de 2 cm nos cantos de cada lado dessa folha, conforme mostra a figura abaixo. Em seguida, dobra-se essa folha, obtendo um paralelepípedo reto-retângulo, sem tampa.



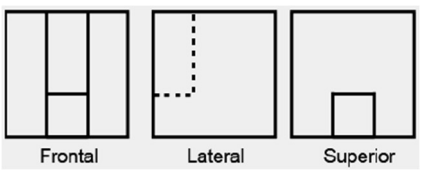
A caixa formada tem um volume de

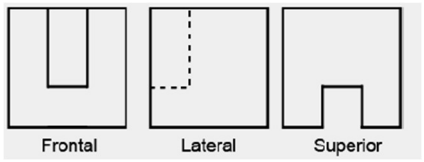
a) 80 cm^3
b) 96 cm^3
c) 108 cm^3
d) 120 cm^3
e) 128 cm^3

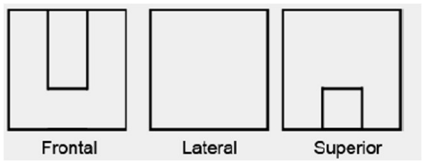
15 - (ENEM MEC/2020) No projeto de uma nova máquina, um engenheiro encomendou a um torneiro mecânico a fabricação de uma peça, obtida a partir do recorte em um cubo, como ilustrado na figura. Para isso, o torneiro forneceu, juntamente com o desenho tridimensional da peça, suas vistas frontal, lateral e superior, a partir das posições indicadas na figura. Para facilitar o trabalho do torneiro, as arestas dos cortes que ficam ocultos nas três vistas devem ser representadas por segmentos tracejados, quando for o caso.

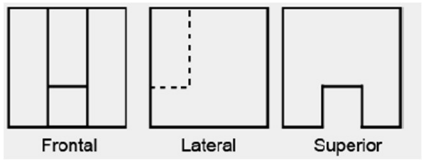


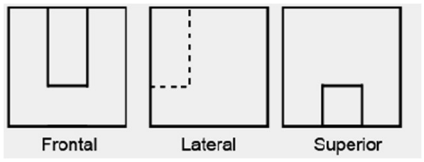
As vistas frontal, lateral e superior que melhor representam o desenho entregue ao torneiro são

a)


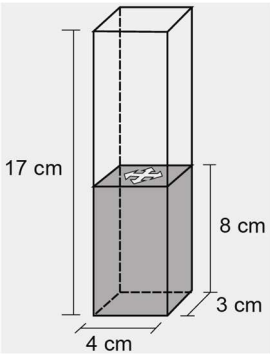
b)


c)


d)


e)


16 - (ENEM MEC/2020) Num recipiente com a forma de paralelepípedo reto-retângulo, colocou-se água até a altura de 8 cm e um objeto, que ficou flutuando na superfície da água.
Para retirar o objeto de dentro do recipiente, a altura da coluna de água deve ser de, pelo menos, 15 cm. Para a coluna de água chegar até essa altura, é necessário colocar dentro do recipiente bolinhas de volume igual a 6 cm^3 cada, que ficarão totalmente submersas.



O número mínimo de bolinhas necessárias para que se possa retirar o objeto que flutua na água, seguindo as instruções dadas, é de

a) 14.
b) 16.
c) 18.
d) 30.
e) 34.

17 - (ENEM MEC/2020) Um clube deseja produzir miniaturas em escala do troféu que ganhou no último campeonato. O troféu está representado na Figura 1 e é composto por uma base em formato de um paralelepípedo reto-retângulo de madeira, sobre a qual estão fixadas três hastes verticais que sustentam uma esfera de 30 cm de

diâmetro, que fica centralizada sobre a base de madeira. O troféu tem 100 cm de altura, incluída sua base.

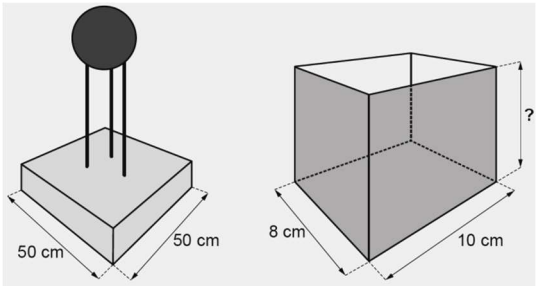


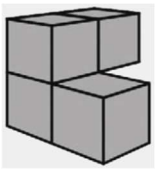
Figura 1 Figura 2

A miniatura desse troféu deverá ser instalada no interior de uma caixa de vidro, em formato de paralelepípedo reto-retângulo, cujas dimensões internas de sua base estão indicadas na Figura 2, de modo que a base do troféu seja colada na base da caixa e distante das paredes laterais da caixa de vidro em pelo menos 1 cm. Deve ainda haver uma distância de exatos 2 cm entre o topo da esfera e a tampa dessa caixa de vidro. Nessas condições deseja-se fazer a maior miniatura possível.

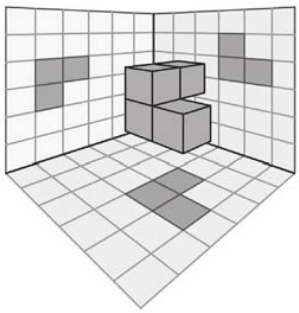
A medida da altura, em centímetro, dessa caixa de vidro deverá ser igual a

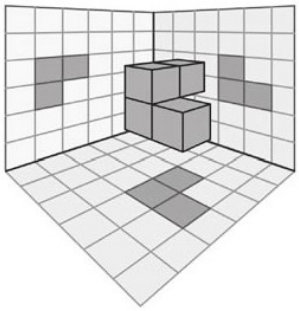
a) 12.
b) 14.
c) 16.
d) 18.
e) 20.

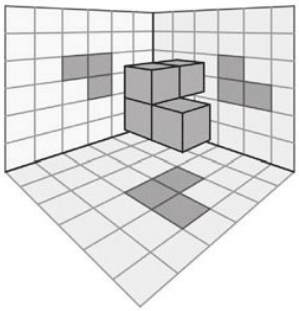
18 - (ENEM MEC/2020) Em um jogo desenvolvido para uso no computador, objetos tridimensionais vão descendo do alto da tela até alcançarem o plano da base. O usuário pode mover ou girar cada objeto durante sua descida para posicioná-lo convenientemente no plano horizontal. Um desses objetos é formado pela justaposição de quatro cubos idênticos, formando assim um sólido rígido, como ilustrado na figura.

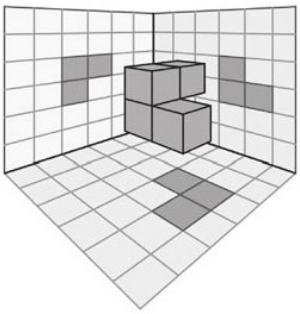


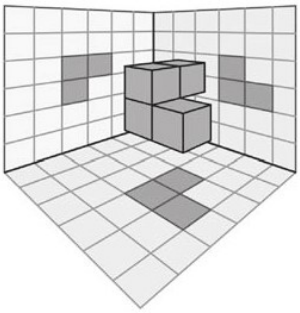
Para facilitar a movimentação do objeto pelo usuário, o programa projeta ortogonalmente esse sólido em três planos quadriculados perpendiculares entre si, durante sua descida.
A figura que apresenta uma possível posição desse sólido, com suas respectivas projeções ortogonais sobre os três planos citados, durante sua descida é

a) 

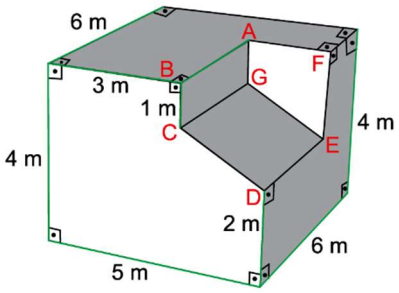
b) 

c) 

d) 

e) 

19 - (Santa Casa SP/2020) De um paralelepípedo reto-retângulo de arestas 4 m, 5 m e 6 m, retira-se o prisma reto ABCDEFG, conforme indica a figura.

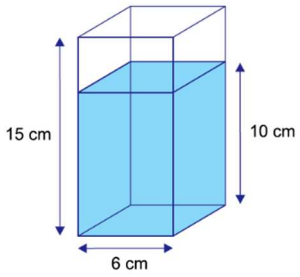


fora de escala

Em relação ao volume do paralelepípedo inicial, o volume do prisma retirado corresponde a

a) 15%.
b) 20%.
c) 16%.
d) 10%.
e) 12%.

20 - (Famema SP/2020) Um recipiente transparente possui o formato de um prisma reto de altura 15 cm e base quadrada, cujo lado mede 6 cm. Esse recipiente está sobre uma mesa com tampo horizontal e contém água até a altura de 10 cm, conforme a figura.

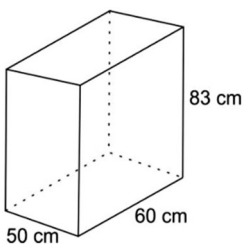


fora de escala

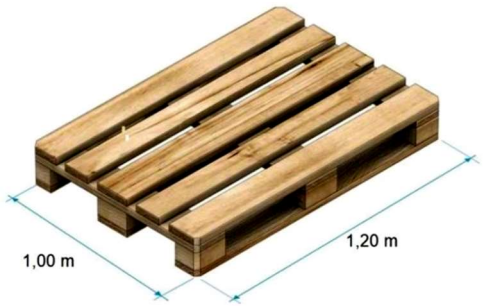
Se o recipiente for virado e apoiado na mesa sobre uma de suas faces não quadradas, a altura da água dentro dele passará a ser de

a) 4 cm.
b) 3,5 cm.
c) 3 cm.
d) 2,5 cm.
e) 2 cm.

21 - (UFT TO/2020) Uma empresa de logística trabalha com caixas de papelão padronizadas. Um dos modelos de caixa de papelão, denominado TIPO 1, tem dimensões 50cmx60cmx83cm conforme imagem a seguir:



Esta empresa utiliza um único modelo de palete com dimensões 1,20mx1,00m, conforme ilustração seguinte:



Por questões operacionais e de logística, a empresa definiu que cada palete deve ser carregado com no máximo três metros cúbicos ($3m^3$) de volume. Além disso, as caixas não podem ser empilhadas sobre o palete, de forma a ultrapassarem as dimensões de sua base.
Com base nessas informações e levando em consideração que as caixas de papelão estejam com seu volume máximo, é **CORRETO** afirmar que o número máximo de caixas do TIPO 1 que podem ser carregadas em um palete é:

a) 4
b) 10
c) 12
d) 16

22 - (ENEM MEC/2021) O projeto de um contêiner, em forma de paralelepípedo reto retangular, previa a pintura dos dois lados (interno e externo) de cada uma das quatro paredes com tinta acrílica e a pintura do piso interno com tinta epóxi. O construtor havia pedido, a cinco fornecedores diferentes, orçamentos das tintas necessárias, mas, antes de iniciar a obra, resolveu mudar o projeto original, alterando o comprimento e a largura para o dobro do originalmente previsto, mantendo inalterada a altura. Ao pedir novos orçamentos aos fornecedores, para as novas dimensões, cada um deu uma resposta diferente sobre as novas quantidades de tinta necessárias.
Em relação ao previsto para o projeto original, as novas quantidades de tinta necessárias informadas pelos fornecedores foram as seguintes:

- Fornecedor I: “O dobro, tanto para as paredes quanto para o piso.”
- Fornecedor II: “O dobro para as paredes e quatro vezes para o piso.”
- Fornecedor III: “Quatro vezes, tanto para as paredes quanto para o piso.”
- Fornecedor IV: “Quatro vezes para as paredes e o dobro para o piso.”
- Fornecedor V: “Oito vezes para as paredes e quatro vezes para o piso.”

Analisando as informações dos fornecedores, o construtor providenciará a quantidade adequada de material. Considere a porta de acesso do contêiner como parte de uma das paredes.
Qual dos fornecedores prestou as informações adequadas, devendo ser o escolhido pelo construtor para a aquisição do material?

a) I
b) II

c) III
d) IV
e) V

23 - (UEMA/2021) Suponha que um carrinho de mão possui as dimensões de um tronco de pirâmide, conforme a figura a seguir.



Quantos volumes desse carrinho de mão, completamente cheios de terra, serão necessários para transportar 1,90 m^3 de areia?

a) 17
b) 40
c) 9
d) 25
e) 13

24 - (UnirG TO/2021) Uma empresa pretende transportar 100 pacotes de dimensões 20 cm x 20 cm x 30 cm. Para segurança no transporte, resolve que esses pacotes serão acomodados em caixas resistentes de dimensões 40 cm x 40 cm x 60 cm. Qual a menor quantidade de caixas que será utilizada para este envio?

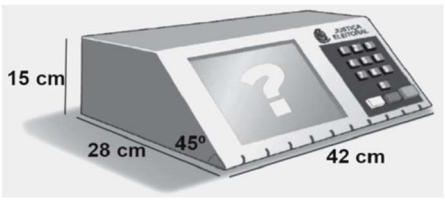
a) 7 caixas.
b) 10 caixas.
c) 13 caixas.
d) 16 caixas.

25 - (Unifor CE/2021) Em 1996, o Superior Tribunal Eleitoral (TSE) adotou, pela primeira vez, urnas eletrônicas para computar os votos dos brasileiros. O Terminal do Eleitor (TE), que é o equipamento onde o eleitor registra o voto, tem as seguintes dimensões:

- Largura 42,0 cm
- Altura 15 cm
- Profundidade 28 cm
- Inclinação do painel frontal 45°

Disponível em www.tre-sc.jus.br. Acesso em 13 nov. 2020. (Adaptado)

A figura a seguir ilustra o TE.



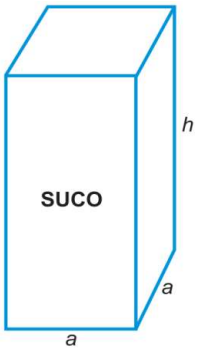
Sabendo que 1 cm^3 equivale a 0,001 litro, é correto afirmar que o volume do TE é de, aproximadamente,

a) 07 litros.
b) 10 litros.
c) 13 litros.
d) 15 litros.
e) 17 litros.

26 - (UFU MG/2022) Nas dependências de um clube esportivo, uma piscina no formato de um paralelepípedo reto-retângulo com 10 metros de comprimento, 2 metros de profundidade e x metros de largura está sendo construída. A responsável pelo projeto planeja revestir todo o seu interior com ladrilhos quadrados de 20 cm de lado. Para esse fim, a gerente da obra adquiriu 3410 ladrilhos, que corresponde a um valor 10% superior à quantidade mínima necessária para ladrilhar toda a piscina.
Segundo essas informações, o valor numérico de **x**, em metros, é um número

a) ímpar.
b) múltiplo de 3.
c) divisível por 5.
d) quadrado perfeito.

27 - (ENEM MEC/2022) Uma indústria de sucos utiliza uma embalagem no formato de prisma reto de base quadrada, com aresta da base de medida *a* e altura de medida *h*, ambas de mesma unidade de medida, como representado na figura.



Deseja-se criar uma linha de produção para uma nova embalagem de igual formato, mas que deverá ter uma capacidade igual ao triplo da atual. A altura da nova embalagem será igual a $\frac{4}{3}$ da altura da embalagem atual. As arestas da base da nova embalagem serão denominadas de *x*.

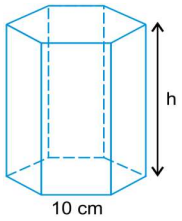
Qual a relação de dependência entre a medida *x* da nova aresta da base e a medida *a* da aresta atual?

a) x = a
b) x = 3a
c) x = 9a

d) $x = \frac{3a}{2}$

e) $x = a\sqrt{3}$

28 - (FMABC SP/2022) Considere uma embalagem na forma de um prisma hexagonal regular com dimensões indicadas em centímetros, conforme mostra a figura.



Se a razão entre a área da base e a área lateral, nesta ordem, é $\frac{5\sqrt{3}}{24}$, então a medida da altura do prisma, indicada por h na figura, é igual a

a) 16 cm.
b) 14 cm.
c) 18 cm.
d) 12 cm.
e) 15 cm.

29 - (Fac. Cesgranrio RJ/2022) Para ajustar o preço de frete de cargas de baixa densidade, que ocupam muito espaço e pesam pouco, a ANTT (Agência Nacional de Transporte Terrestre) sugere a aplicação do fator cambagem, que é a razão entre a quantidade máxima da carga (em quilogramas) que o caminhão pode transportar e a capacidade interna do baú do caminhão, em metros cúbicos.
O baú de certo caminhão tem formato de paralelepípedo reto-retângulo com dimensões internas iguais a 3 m (altura), 12 m (profundidade) e 2,5 m (largura).

Se esse caminhão suporta uma carga máxima de 27.000 kg, qual é o seu fator de cambagem, em kg/m^3?

a) 111
b) 225
c) 300
d) 450
e) 900

30 - (ENEM MEC/2022) Um casal planeja construir em sua chácara uma piscina com o formato de um paralelepípedo reto retângulo com capacidade para 90 000 L de água. O casal contratou uma empresa de construções que apresentou cinco projetos com diferentes combinações nas dimensões internas de profundidade, largura e comprimento. A piscina a ser construída terá revestimento interno em suas paredes e fundo com uma mesma cerâmica, e o casal irá escolher o projeto que exija a menor área de revestimento.
As dimensões internas de profundidade, largura e comprimento, respectivamente, para cada um dos projetos, são:

- projeto I: 1,8 m, 2,0 m e 25,0 m;

- projeto II: 2,0 m, 5,0 m e 9,0 m;
- projeto III: 1,0 m, 6,0 m e 15,0 m;
- projeto IV: 1,5 m, 15,0 m e 4,0 m;
- projeto V: 2,5 m, 3,0 m e 12,0 m.

O projeto que o casal deverá escolher será o

a) I.
b) II.
c) III.
d) IV.
e) V.

31 - (ENEM MEC/2022) Dentre as diversas planificações possíveis para o cubo, uma delas é a que se encontra apresentada na Figura 1.

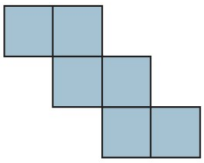


Figura 1

Em um cubo, foram pintados, em três de suas faces, quadrados de cor cinza escura, que ocupam um quarto dessas faces, tendo esses três quadrados um vértice em comum, conforme ilustrado na Figura 2.

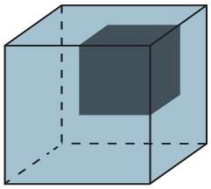
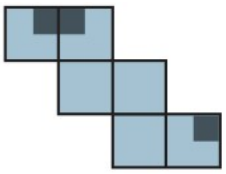
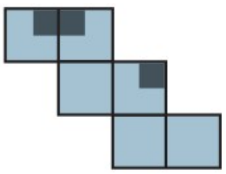
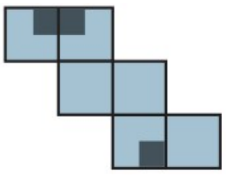


Figura 2

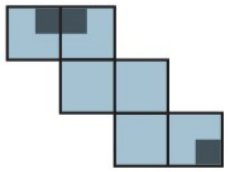
A planificação do cubo da Figura 2, conforme o tipo de planificação apresentada na Figura 1, é

a)


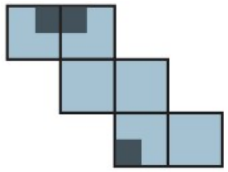
b)


c)


d)



e)

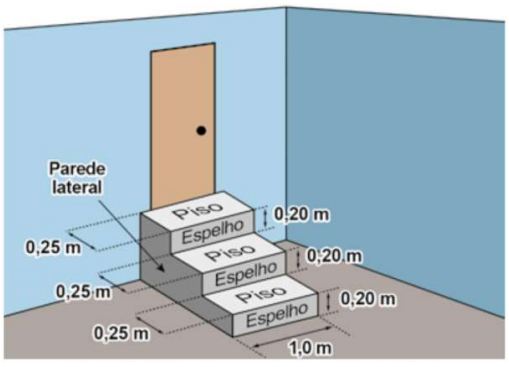


32 - (ENEM MEC/2023) Uma pessoa tinha um projeto para um salão de festas no formato de paralelepípedo reto retângulo. Ela comprou a quantidade exata de azulejos para cobrir as paredes laterais, incluindo as regiões destinadas a uma porta e uma janela. Os azulejos que cobririam essas regiões seriam reservados para futuras substituições. Esse projeto previa que o salão teria, como dimensões internas, 10 m de comprimento por 6 m de largura por 2,5 m de altura.
Em decorrência de uma mudança no projeto, o salão ficará com 12 m de comprimento por 5 m de largura e as mesmas dimensões para porta e janela. Como a compra de azulejos já foi feita, essa pessoa ajustará a altura do salão de modo que a área lateral, incluindo as regiões da porta e da janela, seja equivalente à área lateral antes da alteração do projeto.

Qual é a medida, em metro, dessa nova altura, expressa com duas casas decimais?

a) 3,25
b) 3,00
c) 2,50
d) 2,35
e) 2,00

33 - (ENEM MEC/2023) A figura representa uma escada com três degraus, construída em concreto maciço, com suas medidas especificadas.



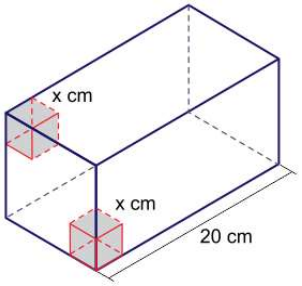
Nessa escada, pisos e espelhos têm formato retangular, e as paredes laterais têm formato de um polígono cujos lados adjacentes são perpendiculares. Pisos, espelhos e paredes laterais serão revestidos em cerâmica.

A área a ser revestida em cerâmica, em metro quadrado, mede

a) 1,20.

b) 1,35.
c) 1,65.
d) 1,80.
e) 1,95.

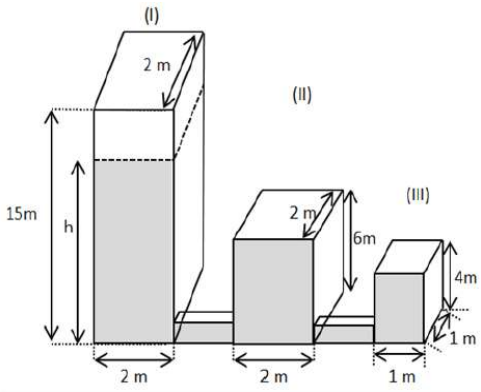
34 - (Unesp SP/2023) De um paralelepípedo reto-retângulo de dimensões 20 cm por $6\sqrt{2}$ cm por $6\sqrt{2}$ cm serão retirados dois cubos, cujos lados medem x cm. Esses cubos têm três arestas contidas em três arestas do paralelepípedo e uma das faces contida em uma mesma face quadrada do paralelepípedo.



Ao adotar o valor máximo para x, o volume do prisma remanescente, após a retirada dos cubos, será igual a:

a) $36\left(40-3\sqrt{2}\right)$ cm³
b) $108\left(10-\sqrt{2}\right)$ cm³
c) $30\left(9-\sqrt{3}\right)$ cm³
d) $36\left(10-3\sqrt{2}\right)$ cm³
e) $30\left(10-3\sqrt{2}\right)$ cm³

35 - (UEG GO/2024) Um sistema de abastecimento conta com três caixas d'água (em formato de paralelepípedos, de bases quadradas) interligadas por dois tubos, conforme imagem ao lado. Considere os dados na imagem e que o volume armazenado em cada tubo de ligação é igual a 1m³. O nível, da água, para que o volume seja igual a 80% da capacidade total de armazenamento, é, aproximadamente,



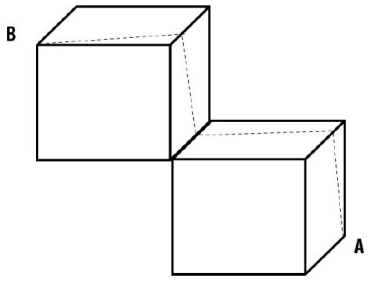
a) o quíntuplo do comprimento de um dos lados da base da caixa d'água (I).
b) o quádruplo do comprimento de um dos lados da base da caixa d'água (II).
c) metade da altura da caixa d'água (I).

d) o dobro da altura da caixa d'água (II).
e) nove vezes a área da base da caixa d'água (III).

36 - (Fac. Medicina de Petrópolis RJ/2023) Uma empresa produz dois tipos de recipientes: o primeiro tem a forma de um prisma retangular reto, e o segundo tipo é uma réplica ampliada do primeiro, obtida multiplicando-se as medidas das suas arestas (cm) por 4.
A medida do volume (cm^3) do segundo tipo de recipiente será igual à medida do volume (cm^3) do primeiro tipo de recipiente multiplicada por

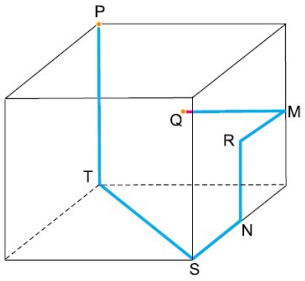
a) 2
b) 4
c) 8
d) 16
e) 64

37 - (FGV /2024) A figura abaixo exibe um sólido formado por dois cubos idênticos, que compartilham uma aresta (como se fossem dois degraus de uma escada). As faces dos cubos que compartilham a aresta citada são perpendiculares. Estão destacados na figura os vértices A e B, cada um em um cubo. Sobre a superfície dos cubos, foi traçada a linha de menor comprimento que liga o vértice A ao vértice B. Sabendo-se que os cubos têm aresta igual a 1, o comprimento da linha traçada é



a) $\sqrt{19}$
b) $\sqrt{17}$
c) $\sqrt{23}$
d) $\sqrt{29}$
e) $\sqrt{22}$

38 - (Famema SP/2024) A figura indica o projeto da linha de um conduíte (linha azul) que será instalado em um galpão cúbico de aresta 8 m. O caminho da linha inicia em P, que é um dos vértices superiores do galpão, e termina em Q, que fica no centro de uma das faces laterais do galpão. Ainda em relação ao projeto, $\overline{TS}$ localiza-se na diagonal do chão do galpão, N e M são pontos médios das arestas do galpão a que pertencem, e R é centro de uma face lateral do galpão.



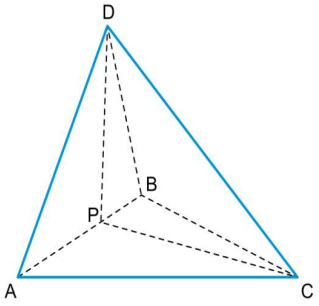
A extensão total da linha de conduíte que será instalada nesse galpão, em metros, é um número entre

a) 35,1 e 35,4.
b) 35,4 e 35,7.
c) 35,7 e 36.
d) 36 e 36,3.
e) 36,3 e 36,6.

39 - (Fuvest SP/2022) Um *deltaedro* é um poliedro cujas faces são todas triângulos equiláteros. Se um deltaedro convexo possui 8 vértices, então o número de faces desse deltaedro é:

a) 4
b) 6
c) 8
d) 10
e) 12

40 - (FMABC SP/2023) Considere o tetraedro ABCD de base ABC. Seja P o ponto sobre a aresta $\overline{AB}$ tomado de forma que $AP = \frac{2}{3}AB$, como mostra a figura.

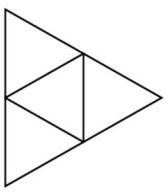


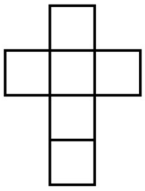
Se o tetraedro ABCD tem volume 24 cm³, então o volume do tetraedro APCD é

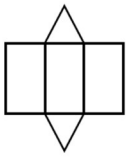
a) 14 cm³.
b) 15 cm³.
c) 17 cm³.
d) 16 cm³.
e) 13 cm³.

41 - (Encceja/2018) Durante uma feira de matemática em uma escola, os alunos resolveram oferecer lembrancinhas em forma de sólidos geométricos. Foram

disponibilizados, para a confecção das lembrancinhas, moldes planificados nos formatos representados nas figuras.


Figura 1


Figura 2


Figura 3

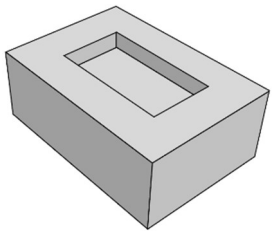
Os sólidos que correspondem às planificações apresentadas, respectivamente, nas figuras 1, 2 e 3 são

a) pirâmide de base triangular, cubo e prisma de base triangular.
b) prisma de base triangular, prisma de base hexagonal e pirâmide de base triangular.
c) pirâmide de base triangular, prisma de base hexagonal e prisma de base triangular.
d) prisma de base triangular, cubo e prisma de base pentagonal.

42 - (UEFS BA/2018) Sabe-se que todo poliedro convexo com A arestas, V vértices e F faces satisfaz a relação A + 2 = V + F. Se um poliedro convexo possui 13 vértices, uma face pentagonal, uma face octogonal e as demais faces triangulares, então o número de faces que ele possui é

a) 15.
b) 18.
c) 17.
d) 19.
e) 16.

43 - (ENEM MEC/2019) No ano de 1751, o matemático Euler conseguiu demonstrar a famosa relação para poliedros convexos que relaciona o número de suas faces (F), arestas (A) e vértices (V): $V + F = A + 2$. No entanto, na busca dessa demonstração, essa relação foi sendo testada em poliedros convexos e não convexos. Observou-se que alguns poliedros não convexos satisfaziam a relação e outros não. Um exemplo de poliedro não convexo é dado na figura. Todas as faces que não podem ser vistas diretamente são retangulares.



Qual a relação entre os vértices, as faces e as arestas do poliedro apresentado na figura?

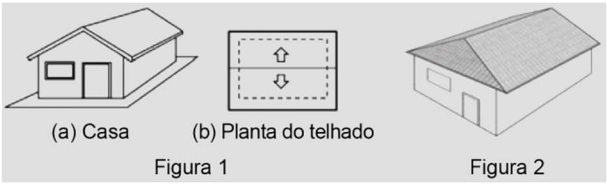
a) V + f = A
b) V + f = A – 1
c) V + f = A + 1
d) V + f = A + 2

e) V + f = A + 3

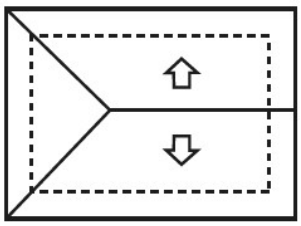
44 - (EsPCEx SP/2020) Um poliedro possui 20 vértices. Sabendo-se que de cada vértice partem 3 arestas, o número de faces que poliedro possui é igual a

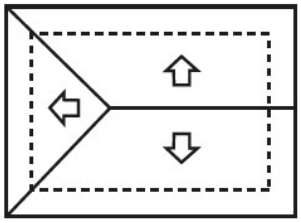
a) 12.
b) 22.
c) 32.
d) 42.
e) 52.

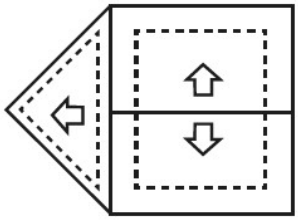
45 - (ENEM MEC/2020) A Figura 1 apresenta uma casa e a planta do seu telhado, em que as setas indicam o sentido do escoamento da água de chuva. Um pedreiro precisa fazer a planta do escoamento da água de chuva de um telhado que tem três caídas de água, como apresentado na Figura 2.

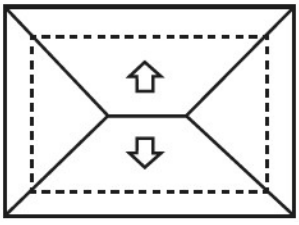


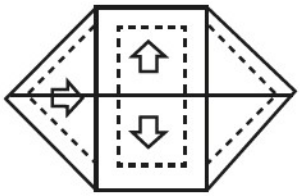
A figura que representa a planta do telhado da Figura 2 com o escoamento da água de chuva que o pedreiro precisa fazer é

a)


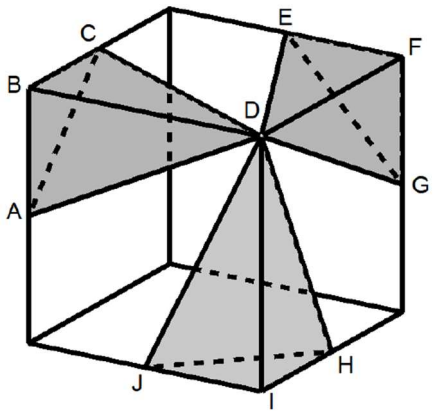
b)


c)


d)


e) 

46 - (UFRGS RS/2020) Considere o cubo e os tetraedros ABCD, EFGD e HIJD, nos quais os pontos A, C, E, G, H e J são pontos médios de arestas do cubo, como representado na figura abaixo.



A razão entre a soma dos volumes dos tetraedros ABCD, EFGD e HIJD e o volume do cubo é

a) $\frac{1}{8}$.

b) $\frac{1}{6}$.

c) $\frac{1}{3}$.

d) $\frac{2}{3}$.

e) $\frac{3}{4}$.

47 - (UECE/2020) O volume, em m^3, de um poliedro convexo, cujos vértices são os centros das faces de um cubo, cuja medida da aresta é igual a 1m, é

a) $\frac{1}{6}$.

b) $\frac{1}{2}$.

c) $\frac{1}{3}$.

d) $\frac{2}{3}$.

48 - (ITA SP/2020) Considere as seguintes afirmações:

I. Todo poliedro formado por 16 faces quadrangulares possui exatamente 18 vértices e 32 arestas.
II. Em todo poliedro convexo que possui 10 faces e 16 arestas, a soma dos ângulos de todas as faces é igual a 216°.
III. Existe um poliedro com 15 faces, 22 arestas e 9 vértices.

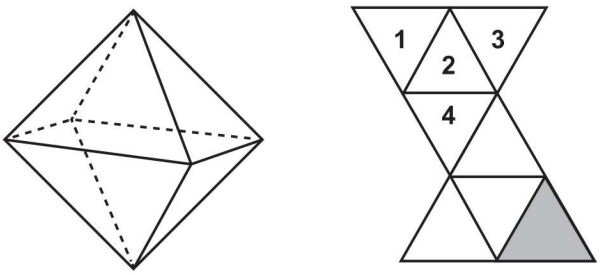
É(são) VERDADEIRA(S)

a) apenas I.
b) apenas II.
c) apenas III.
d) apenas I e II.
e) apenas II e III.

49 - (UEG GO/2020) O poliedro convexo regular cujo número de arestas é o dobro do número de vértices é o octaedro. O número de vértices do octaedro é

a) 4
b) 20
c) 12
d) 8
e) 6

50 - (ENEM MEC/2021) Num octaedro regular, duas faces são consideradas opostas quando não têm nem arestas, nem vértices em comum. Na figura, observa-se um octaedro regular e uma de suas planificações, na qual há uma face colorida na cor cinza escuro e outras quatro faces numeradas.



Qual(is) face(s) ficará(ão) oposta(s) à face de cor cinza escuro, quando o octaedro for reconstruído a partir da planificação dada?

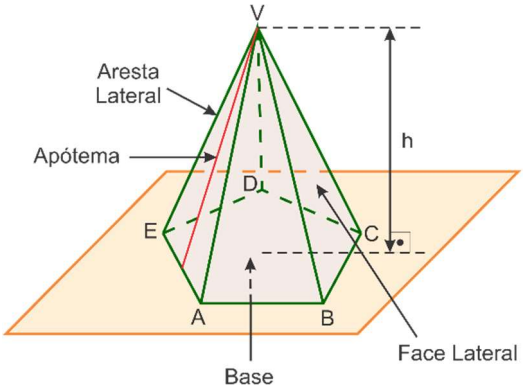
a) 1, 2, 3 e 4
b) 1 e 3
c) 1
d) 2
e) 4

51 - (Famema SP/2024) De acordo com a relação de Euler, em qualquer poliedro convexo o número de arestas supera em 2 unidades a soma do número de faces com o número de vértices. Em um dodecaedro regular, que é um poliedro de 20 vértices e 12 faces regulares idênticas, suas faces são polígonos regulares de

a) 5 lados.
b) 15 lados.
c) 12 lados.
d) 10 lados.
e) 6 lados.

Pirâmides e Cones

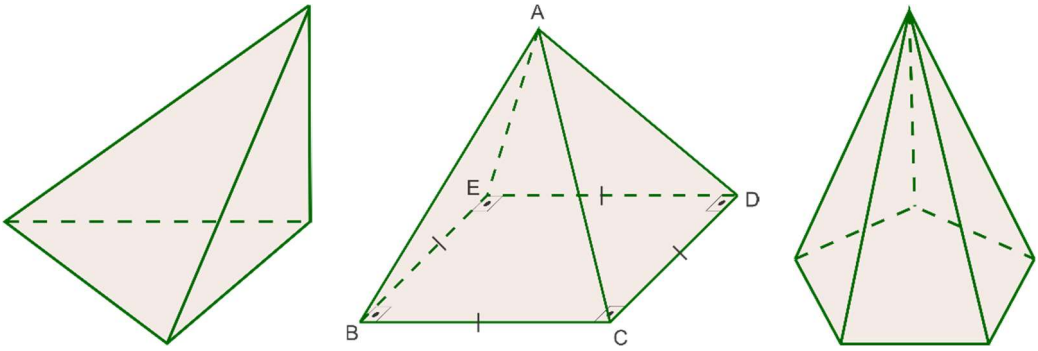
Pirâmides



As pirâmides são formadas por:

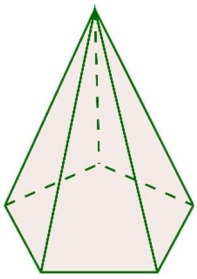
- Base
- Arestas laterais
- Faces laterais
- Altura
- Apótema

São exemplos de pirâmides:



Pirâmide Regular

Pirâmide regular é uma pirâmide reta que possui como base um polígono regular.



Numa pirâmide regular:

- A distância do vértice ao centro da base é chamada de altura.
- As faces laterais são formadas por triângulos isósceles e congruentes.
- A altura de cada face é chama de apótema da pirâmide.

Atenção!

Teorema de Pitágoras na Pirâmide Regular

É importante observar quatro triângulos retângulos nas pirâmides regulares, já que as relações encontradas a partir desses triângulos costumam ser fundamentais para a resolução das questões envolvendo pirâmides.

Aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

(imagens)

$r^2 = {a_b}^2 + \left(\frac{l_b}{2}\right)^2$
$l^2 = a^2 + \left(\frac{l_b}{2}\right)^2$
$l^2 = h^2 + r^2$
$a^2 = h^2 + {a_b}^2$

r: raio da circunferência circunscrita à base.
h: altura da pirâmide.
a_b: apótema da base.
a: apótema da pirâmide.
l_b: aresta da base.
l: aresta lateral.

Área da Superfície da Pirâmide

A área da superfície da pirâmide é dada pela área da base somada à área lateral.

Desse modo:

- Área Lateral: $A_l = (n° \; de \; faces) \cdot A_{face}$

$$\boldsymbol{A_l = n \cdot \frac{b \cdot h}{2}}$$

- Área da Base: área do polígono que forma a base (triângulo, quadrado, pentágono, entre outros).
- Área Total: $\boldsymbol{A_t = A_l + A_b}$

Exemplo: Calcule a área da pirâmide de base quadrada de lados $l = 3$ cm e altura das faces $h = 5$ cm.

Calculamos a área de uma pirâmide por meio do somatório da área da base com a área das faces. Assim,

$$A_t = A_l + A_b \Rightarrow A_t = n \cdot \frac{b \cdot h}{2} + l^2 \Rightarrow A_t = 4 \cdot \frac{3 \cdot 5}{2} + 3^2 \Rightarrow A_t = 39 \; cm^2.$$

Portanto, a área da pirâmide é igual a $39 \; cm^2$.

Volume da Pirâmide

O volume da pirâmide é igual à divisão por três do produto entre a área de sua base e sua altura:

$$\boldsymbol{V = \frac{1}{3} . A_b . h}$$

Exemplo: Calcule o volume da pirâmide de base quadrada de lado $l = 9$ cm e altura $h = 12$ cm.

Para calcularmos o volume de uma pirâmide devemos aplicar a fórmula:

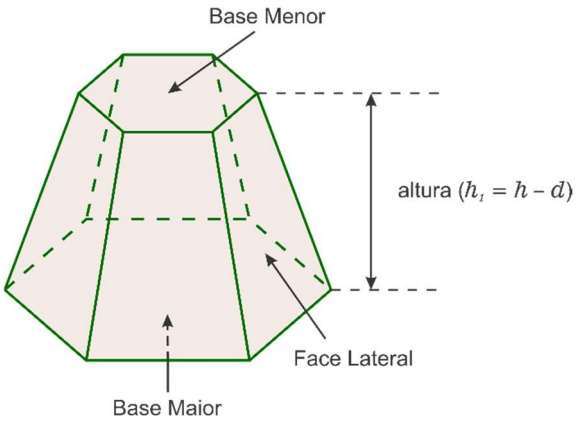
$$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$$

Desse modo,

$$V = \frac{1}{3} \cdot l^2 \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 9^2 \cdot 12 \Rightarrow V = 324\ cm^3.$$

Assim, o volume da pirâmide é $V = 324\ cm^3$.

Tronco de Pirâmide



pirâmide e sua secção.

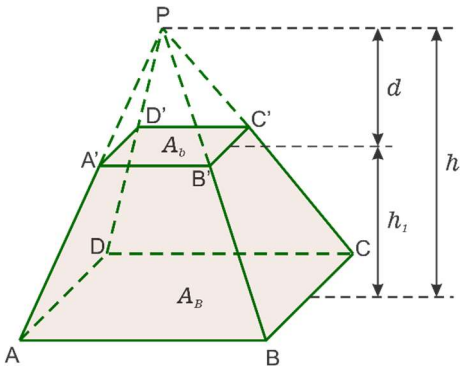
Características do tronco de uma pirâmide:

– Possui duas bases, a base da pirâmide inicial (base maior) e a base formada pela secção da pirâmide (base menor).

– Suas faces laterais são trapézios.

– A distância entre as bases do tronco (altura do tronco) é calculada por $h_t = h - d$, sendo d a distância entre o vértice da

- **Volume do Tronco de uma Pirâmide**



$$\boldsymbol{V = \frac{h_t}{3} \cdot \left(A_B + \sqrt{A_B \cdot A_b} + A_b\right)}$$

Observação: O volume de um tronco também pode ser calculado por meio da subtração do volume total da pirâmide pelo volume da pirâmide retirada pela secção.

Exemplo: Calcular volume do tronco de uma pirâmide de base quadrada cujos lados da base maior medem 4 cm e da base menor medem 3 cm. A altura do tronco é igual a 9 cm.

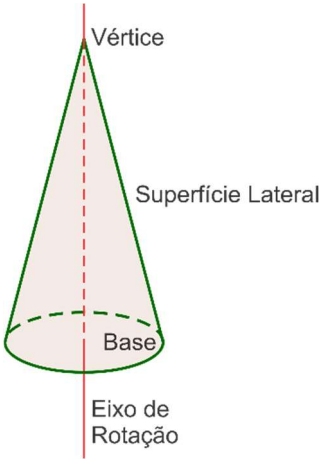
Para calcularmos o volume do tronco de uma pirâmide basta substituirmos os dados da questão na fórmula do volume do tronco de pirâmide.

$$V = \frac{h_t}{3}.\left(A_B + \sqrt{A_B.A_b} + A_b\right) \Rightarrow V = \frac{9}{3}\cdot\left(4^2 + \sqrt{4^2+3^2} + 3^2\right) \Rightarrow V = 90\ cm^3.$$

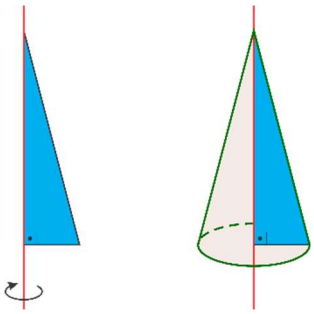
Portanto, o volume do tronco de pirâmide é $90\ cm^3$.

Cones

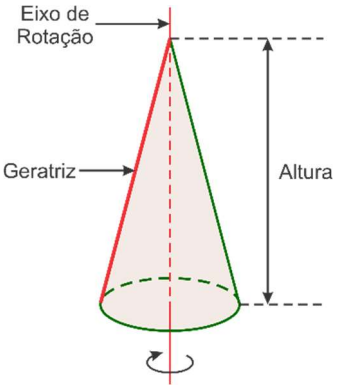
Os cones são sólidos formados por uma parte plana circular, chamada de base, e por uma parte não plana (curva, arredondada), a superfície lateral.



Observação: O cone é considerado um sólido de revolução, uma vez que pode ser obtido através do giro completo de um triângulo retângulo que possui um dos catetos como eixo.



Cone Reto e Cone Oblíquo

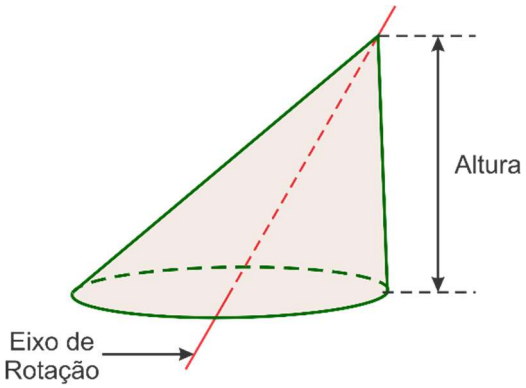


Cone Reto:

- Eixo perpendicular à base.
- A medida do eixo é igual à medida da altura.
- Possui geratriz.

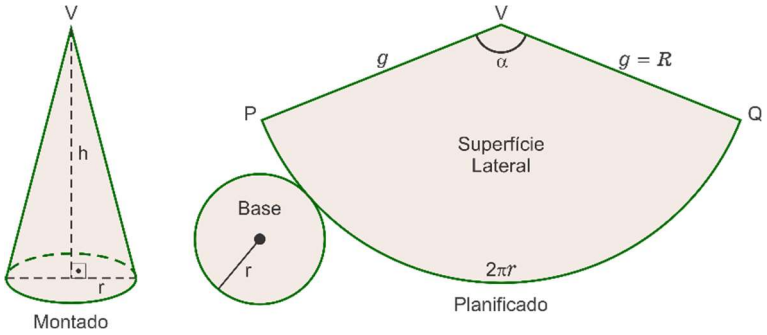
Cone Oblíquo:

- Eixo oblíquo à base.
- O eixo e a altura possuem medidas diferentes.
- Não possui geratriz.



Área da Superfície do Cone

A área superficial total de um cone reto é dada pela soma da área da base com a área da superfície lateral.



Assim:

- Área Lateral (área do setor circular): $A_l = \pi \cdot r \cdot g$.
- Área da Base (área do círculo): $A_b = \pi \cdot r^2$.
- Área Total: $A_t = \pi \cdot r \cdot (g + r)$.

Exemplo: Calcular a área superficial total de um cone cujo raio mede 2 cm e a geratriz mede 6 cm.

Para calcularmos a área total da superfície de um cone podemos calcular e somar as áreas da base e lateral, ou aplicar diretamente na fórmula da área total do cone.

Calculando e somando as áreas da base e lateral, temos:

Passo 1: Calcular área da base.

$$A_b = \pi \cdot r^2 \Rightarrow A_b = \pi \cdot 2^2 \Rightarrow A_b = 4\pi\ cm^2.$$

Passo 2: Calcular área lateral.

$$A_l = \pi \cdot r \cdot g \Rightarrow A_l = \pi \cdot 2 \cdot 6 \Rightarrow A_l = 12\pi\ cm^2.$$

Passo 3: Somar as áreas encontradas.

$$A_t = A_b + A_l \Rightarrow A_t = 4\pi + 12\pi \Rightarrow A_t = 16\pi\ cm^2.$$

Aplicando a fórmula da área total do cone, temos:

$$A_t = \pi \cdot r \cdot (g + r) \Rightarrow A_t = \pi \cdot 2 \cdot (6 + 2) \Rightarrow A_t = 16\pi\ cm^2.$$

Logo, a área total do cone é $A_t = 16\pi\ cm^2$.

Volume do Cone

O volume de um cone é calculado dividindo-se por três o produto da área da base pela altura:

$$V = \frac{1}{3}.A_b.h$$
$$\boldsymbol{V = \frac{1}{3}.\pi.r^2.h}$$

Exemplo: Calcular o volume de um cone de raio $r = 4$ cm e altura $h = 6$ cm.

Para calcularmos o volume de um cone devemos aplicar a fórmula:

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$$

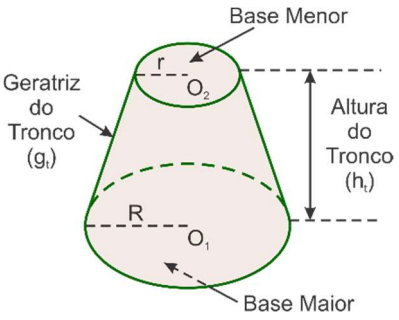
Desse modo,

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 4^2 \cdot 6 \Rightarrow V = 32\ cm^3.$$

Assim, o volume do cone é $V = 32\ cm^3$.

Tronco de Cone

Características de um tronco de cone:



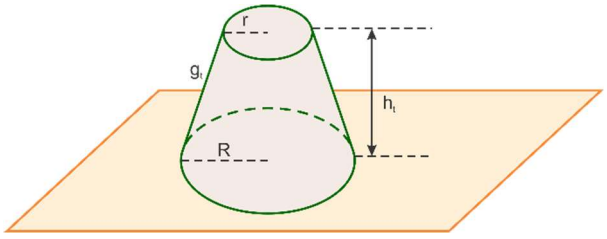
- Possui duas bases, a base do cone inicial (base maior) e a base formada pela secção do cone (base menor).
- A distância entre as bases do tronco (altura do tronco) é calculada por $h_t = h - d$, sendo d a distância entre o vértice do cone e sua secção.
- A geratriz do tronco de cone é igual à diferença entre as medidas da geratriz do cone inicial (g) e da geratriz do cone formado após a secção (g_1), isto é, $g_t = g - g_1$.

- **Área do Tronco de Cone**

  Área Lateral: $\boldsymbol{A_l = \pi \cdot g_t \cdot (R + r)}$

- **Volume do Tronco de Cone**

  $\boldsymbol{V = \frac{\pi.h_t}{3} \cdot (R^2 + R.r + r^2)}$



Observação: O volume do tronco de um cone também pode ser calculado por meio da subtração do volume total do cone pelo volume do cone retirado pela secção.

Exemplo: Calcular volume do tronco do cone cujo raio da base maior mede 8 cm e da base menor mede 6 cm. A altura do tronco é igual a 12 cm.

Para calcularmos o volume do tronco de um cone basta substituirmos os dados da questão na fórmula do volume do tronco de cone.

$$V = \frac{\pi \cdot h_t}{3} \cdot (R^2 + R \cdot r + r^2) \Rightarrow V = \frac{\pi \cdot 12}{3} \cdot (8^2 + 8 \cdot 6 + 6^2) \Rightarrow V = 592\pi\ cm^3.$$

Portanto, o volume do tronco de cone é $V = 592\ cm^3$.

Exercícios

01 - (FGV /2018) Um trapézio é delimitado pelos eixos x e y do plano cartesiano e pelas retas de equações y = 2x + 1 e x = 4. O sólido de revolução obtido quando esse trapézio sofre uma rotação completa em torno do eixo y tem volume, em unidades cúbicas de comprimento dos eixos cartesianos, igual a

a) $\frac{304\pi}{3}$
b) 101π
c) $\frac{302\pi}{3}$
d) 96π
e) $\frac{286\pi}{3}$

02 - (IFMT/2018) Cada imagem apresentada abaixo representa um sólido na vida cotidiana. Então, a alternativa correta que representa cada sólido, respectivamente, é:

I) 
II) 
III) 

a) I- Cone reto, II- Prisma hexagonal e III-Cilindro reto.
b) I-Cone reto, II-Tronco de Pirâmide e III- Cilindro reto.
c) I-Cilindro reto, II-Prisma hexagonal e III- Cone reto.
d) I-Pirâmide , II-Cilindro reto e III- Esfera.
e) I-Prisma quadrangular, II- Pirâmide hexagonal e III- Cilindro reto.

03 - (PUC SP/2018) A altura de um cone reto mede o dobro do raio de sua base. Se a área lateral desse cone é $9\sqrt{5}\pi$ cm², o volume do cone é

a) 18π cm³.
b) 27π cm³.
c) 36π cm³.
d) 45π cm³.

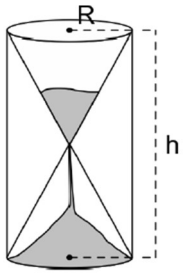
04 - (Mackenzie SP/2018) Se um cone reto tem altura igual a 12 cm e seu volume é 64 π cm^3, então sua geratriz, em cm, mede

a) 20
b) $10\sqrt{2}$
c) $4\sqrt{10}$
d) $4\sqrt{2}$
e) $2\sqrt{10}$

05 - (UniCesumar PR/2018) Sobre uma mesa, estão dispostos dois sólidos geométricos: o primeiro sólido é um cilindro, cujo raio da base e altura medem, respectivamente, 6 cm e 48 cm, e o segundo sólido é um cone, cujo raio da base e altura medem, respectivamente, r cm e 12 cm, sendo que o volume do cilindro é o triplo do volume do cone. Dessa forma, a medida r do raio do cone é igual a

a) 6 cm.
b) 8 cm.
c) 10 cm.
d) 12 cm.
e) 14 cm.

06 - (PUC Campinas SP/2018) O desenho mostra uma *ampulheta* e suas medidas. O volume de areia que foi depositado dentro dela corresponde a $\frac{2}{3}$ do volume de um dos cones que a compõem.



O volume de areia que foi depositado dentre dessa ampulheta é igual a

a) $\frac{2\pi R^2 \cdot h}{3}$
b) $\frac{\pi R^2 \cdot h}{9}$
c) $\frac{2\pi R \cdot h^2}{3}$
d) $\frac{2\pi R^2 \cdot h}{9}$
e) $\frac{\pi R^2 \cdot h}{6}$

07 - (PUC RS/2018) Dados os triângulos nos gráficos das figuras 1 e 2 abaixo, consideremos os sólidos de volumes V_1 e V_2 obtidos pela rotação completa dos triângulos das figuras 1 e 2, respectivamente, em torno do eixo y.

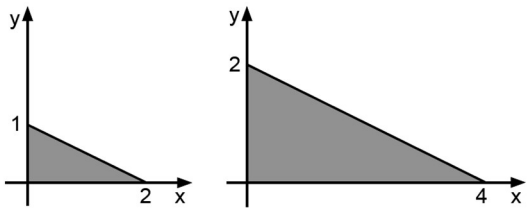


Figura 1 Figura 2

A razão entre os volumes V_1 e V_2 é igual a

a) 1/8
b) 1/2
c) 2
d) 8

08 - (Famema SP/2018) A medida da aresta da base quadrada de um prisma reto é igual à medida do diâmetro da base de um cone reto. A altura do prisma é 5,5 cm maior que a altura do cone e o volume do cone é $\frac{1}{6}$ do volume do prisma. Considerando $\pi = 3{,}1$, é correto afirmar que a altura do prisma é

a) 13,5 cm.
b) 18,0 cm.
c) 8,5 cm.
d) 10,0 cm.
e) 15,5 cm.

09 - (Unifenas MG/2019) Existem muitos formatos de copos, um deles é a taça na forma de cone. Considere uma em que o cone possua raio da base igual a 5 cm e altura, 10 cm. Um líquido foi colocado, e o nível marcado foi igual à metade da altura do cone. Qual é o volume da taça que permaneceu vazio?



a) $\frac{228,75}{3}\pi$ cm³.
b) $\frac{250}{3}\pi$ cm³.
c) $\frac{31}{3}\pi$ cm³.
d) $\frac{228,75}{6}\pi$ cm³.
e) $\frac{28}{3}\pi$ cm³.

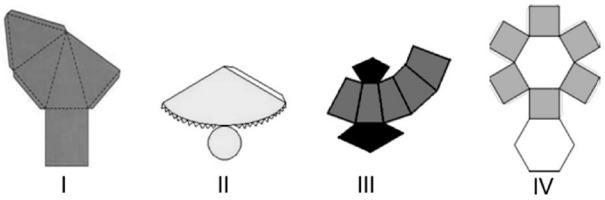
10 - (IFMT/2019)



Um empresário de Primavera do Leste-MT possui um silo para armazenagem e secagem da produção de grãos, no formato de um cilindro reto, sobreposto por um cone (veja a figura) com capacidade para 540 m^3. Ele tem duas opções para escoar seus grãos: via trem, a um custo de R$ 6.700,00 por vagão com capacidade para 135 m^3, ou via caminhões, a um custo de R$ 1.000,00 por cada caminhão com capacidade de 20 m^3. Ao sabermos que o proprietário optou por escoar sua safra pelo meio de transporte com menor custo, podemos afirmar que o meio escolhido foi:

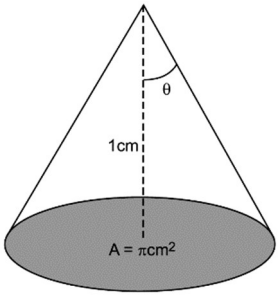
a) Via trem, com um custo total de R$ 26.000,00
b) Via caminhão, com um custo total de R$ 27.000,00
c) Via trem, com um custo total de R$ 27.000,00
d) Via caminhão, com um custo total de R$ 26.800,00
e) Via trem, com um custo total de R$ 26.800,00

11 - (IFMT/2019) Cada imagem apresentada abaixo, representa um sólido na vida cotidiana. A partir dessas planificações, a alternativa CORRETA que representa cada sólido, respectivamente é:



a) I-Pirâmide quadrangular, II-Cone reto, III-Tronco de pirâmide e IV- Prisma hexagonal.
b) I-Prisma quadrangular, II-Cone reto, III-Tronco de cone e IV- Prisma hexagonal.
c) I-Prisma quadrangular, II-Cilindro reto, III-Tronco de pirâmide e IV-Pirâmide hexagonal.
d) I-Tronco de Pirâmide, II- Cone reto, III-Pirâmide quadrangular e IV- Prisma hexagonal.
e) I-Pirâmide quadrangular, II-Cone reto, III-Prisma quadrangular e IV-Tronco de Pirâmide de base hexagonal.

TEXTO: 1 - Comuns às questões: 12, 13



Um feixe cônico de radiação, emitido por uma fonte a 1cm de distância da pele de um paciente, atinge uma área circular plana de πcm^2, como na figura.

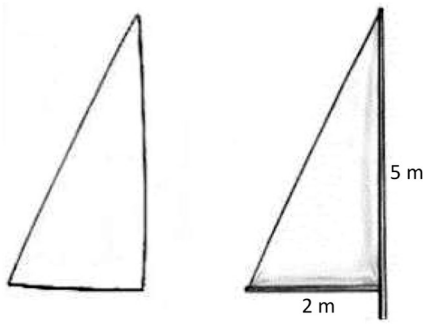
12 - (Unit AL/2019) Se o ângulo θ de abertura do feixe for reduzido em 1/3, a área atingida ficará cerca de

a) 25% menor.
b) 33% menor.
c) 44% menor.
d) 56% menor.
e) 67% menor.

13 - (Unit AL/2019) O volume, em cm^3, da região cônica coberta pelo feixe mede

a) $\frac{\pi}{4}$
b) $\frac{\pi}{3}$
c) $\frac{\pi}{2}$
d) $\frac{2\pi}{3}$
e) π

14 - (IFAL/2019) A vela de uma jangada da praia de Pajuçara em Maceió, tem um formato de um triângulo retângulo de catetos 2 m e 5 m, de acordo com a figura abaixo:



Se a vela fizer um giro de 360º em torno do eixo vertical que a segura, qual o volume do sólido de revolução imaginário formado pela vela?

a) $5m^3$.
b) $10\pi m^3$.
c) $20\pi m^3$.
d) $\frac{20\pi}{3}$ m^3.
e) $\frac{20\pi^2}{3}$ m^3.

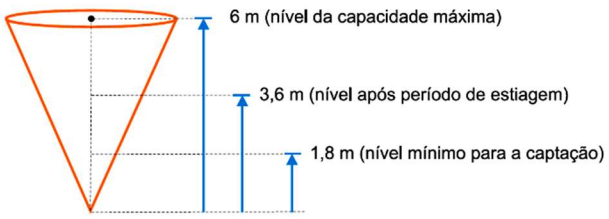
15 - (Famema SP/2019) A área lateral de um cilindro circular reto é $72\pi cm^2$ e seu volume é 6 vezes o volume de um cone circular reto que tem 18 cm de altura. Sabendo que a

medida do raio da base do cilindro é o dobro da medida do raio da base do cone, então a medida do raio da base do cone é

a) 8 cm.
b) 2 cm.
c) 4 cm.
d) 10 cm.
e) 6 cm.

16 - (IBMEC SP Insper/2019) Uma companhia de abastecimento de água gerencia o fornecimento de água de uma represa, cujo formato é de um cone circular reto. Após 112 dias de estiagem, aliados ao abastecimento normal de água aos usuários, o nível de água dessa represa baixou de 6,0 m para 3,6 m. Sabe-se que, devido à quantidade excessiva de lodo no fundo da represa, o fornecimento de água é interrompido se o nível baixar para 1,8 m.

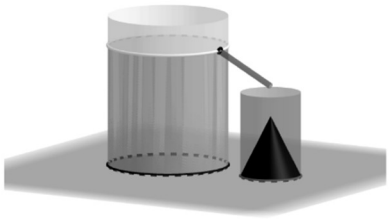
A seguir é apresentada uma ilustração da situação:



Como medida preventiva, a companhia de abastecimento decidiu reduzir o fornecimento para um terço do normal. Nessas condições, o abastecimento será interrompido se o período de estiagem se estender por mais

a) 252 dias.
b) 81 dias.
c) 28 dias.
d) 27 dias.
e) 84 dias.

17 - (PUC RS/2019) A figura abaixo representa dois vasilhames cilíndricos abertos na parte superior, o maior com raio da base R e o menor com raio da base r e altura $\frac{7}{3}r$. O cilindro maior possui um tubo de escoamento acoplado e está cheio de líquido exatamente até o orifício do tubo de escoamento sem que se perca nada. O cilindro menor possui em seu interior um cone sólido cuja altura é a medida do diâmetro de sua base, encaixando-se perfeitamente à base do cilindro.
Em um experimento, ao imergirmos completamente uma esfera de raio r dentro do cilindro com líquido, certa quantidade de líquido escoará para o vasilhame menor pelo tubo.



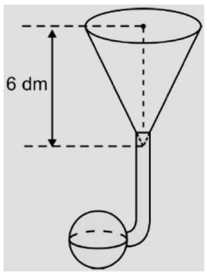
Sobre o resultado do experimento, é possível afirmar que

a) o líquido transbordará.
b) o cilindro menor ficará cheio até a borda.
c) o cone ficará totalmente coberto pelo líquido.
d) um pedaço do cone de altura r/3 ficará acima do líquido.

18 - (ITA SP/2019) A superfície lateral de um cone circular reto corresponde a um setor circular de 216°, quando planificada. Se a geratriz do cone mede 10 cm, então a medida de sua altura, em cm, é igual a

a) 5.
b) 6.
c) 7.
d) 8.
e) 9.

19 - (EPCAR EA/2020) Um sistema de irrigação para plantas é composto por uma caixa d'água, em formato de cone circular reto, interligada a 30 esferas, idênticas.
O conteúdo da caixa d'água chega até as esferas por encanamentos cuja capacidade de armazenamento é desprezível.
O desenho a seguir ilustra a ligação entre a caixa d'água e uma das 30 esferas, cujo raio interno mede $r = \pi^{-\frac{1}{3}}$ dm



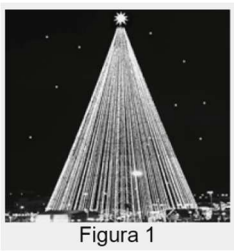
Se a caixa d'água está cheia e as esferas, bem como os encanamentos, estão vazios, então, no momento em que todas as 30 esferas ficarem cheias, restará, no cone, apenas a metade de sua capacidade total.
Assim, a área lateral de um cone equilátero cujo raio da base é congruente ao da caixa d'água, em dm^2, é igual a

a) 80
b) 40
c) 20
d) 10

20 - (Acafe SC/2020) O volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo das abscissas, da região plana delimitada pelas retas y = 2x, y = 0 e x = 2, é:

a) $\frac{32\pi}{2}$ unidades de volume.
b) 32π unidades de volume.
c) $\frac{16\pi}{6}$ unidades de volume.
d) $\frac{32\pi}{2}$ unidades de volume.

21 - (ENEM MEC/2020) No período de fim de ano, o síndico de um condomínio resolveu colocar, em um poste, uma iluminação natalina em formato de cone, lembrando uma árvore de Natal, conforme as figuras 1 e 2.


Figura 1

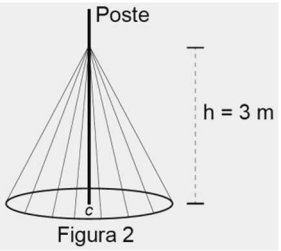


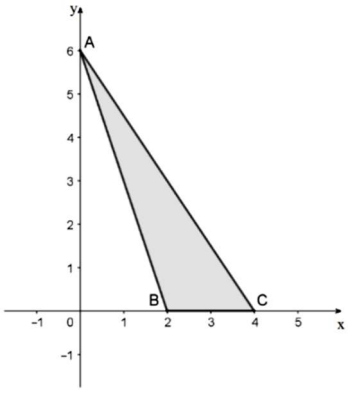
Figura 2

A árvore deverá ser feita colocando-se mangueiras de iluminação, consideradas segmentos de reta de mesmo comprimento, a partir de um ponto situado a 3 m de altura no poste até um ponto de uma circunferência de fixação, no chão, de tal forma que esta fique dividida em 20 arcos iguais. O poste está fixado no ponto *C* (centro da circunferência) perpendicularmente ao plano do chão.
Para economizar, ele utilizará mangueiras de iluminação aproveitadas de anos anteriores, que juntas totalizaram pouco mais de 100 m de comprimento, dos quais ele decide usar exatamente 100 m e deixar o restante como reserva.

Para que ele atinja seu objetivo, o raio, em metro, da circunferência deverá ser de

a) 4,00.
b) 4,87.
c) 5,00.
d) 5,83.
e) 6,26.

22 - (UFRGS RS/2020) Considere os pontos A, B e C, de coordenadas inteiras, que determinam os vértices do triângulo ABC, representado no sistema de coordenadas cartesianas abaixo.
A revolução do triângulo ABC, em torno do eixo x, gera o sólido P, e a revolução do triângulo ABC, em torno do eixo y, gera o sólido Q.



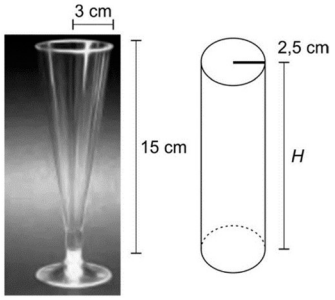
A razão entre os volumes de P e Q é

a) $\frac{2}{3}$.
b) 1.
c) $\frac{3}{2}$.
d) 18.
e) 36.

23 - (UECE/2020) A região do plano, limitada por um triângulo cujas medidas dos lados são respectivamente 3m, 4m e 5m, gira em torno do maior lado do triângulo, gerando um sólido, cuja medida do volume, em m^3, é

a) $\frac{121\pi}{15}$.
b) $\frac{144\pi}{15}$.
c) $\frac{131\pi}{15}$.
d) $\frac{168\pi}{15}$.

24 - (Uncisal AL/2020) A parte interna das taças usadas em um restaurante são cones circulares retos. O raio da base desses cones mede 3 cm e a altura desses cones, 15 cm. O proprietário desse restaurante deseja substituir as taças por copos cilíndricos circulares retos, mas que possuam a mesma capacidade das taças. As figuras a seguir ilustram as taças do restaurante e as medidas da parte interna dos copos.



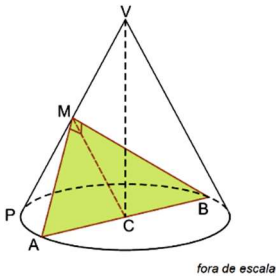
Se o raio da circunferência interna do copo mede 2,5 cm, então, para que ele possua a mesma capacidade das taças, sua altura H deverá ser igual a

a) 6,0 cm.
b) 7,2 cm.
c) 12,5 cm.
d) 21,0 cm.
e) 21,6 cm.

25 - (FGV /2020) Considere os pontos $A(0, 0)$, $B(4, 0)$ e $C(4, 3)$ do plano cartesiano. Ao girarmos a região triangular ABC em torno do eixo das abscissas, obteremos um sólido de revolução cujo volume é:

a) 24π
b) 30π
c) 18π
d) 36π
e) 12π

26 - (FGV /2020) A figura indica um cone reto de revolução de vértice V, altura $\overline{VC}$ e diâmetro da base $\overline{AB}$. O ponto M pertence à geratriz $\overline{VP}$ do cone, AMB é um triângulo de área igual a $3\sqrt{3}$ cm², VC = BM, CM = CA = CB = MV = MP e o ângulo $A\hat{M}B$ é reto.

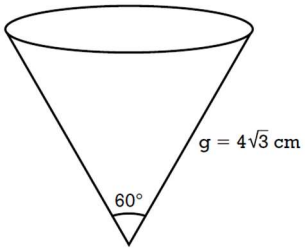


fora de escala

O volume desse cone, em cm³, é igual a

a) $3\sqrt{3}\pi$
b) $3\sqrt{5}\pi$
c) $5\sqrt{2}\pi$
d) $6\sqrt{2}\pi$
e) $6\sqrt{3}\pi$

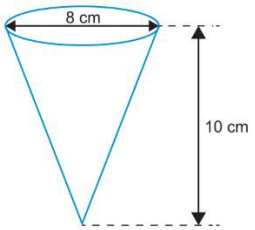
27 - (ESPM SP/2020) A geratriz (g) do cone circular reto mostrado na figura abaixo mede $4\sqrt{3}$ cm. O volume desse cone, em cm³, é igual a:



a) 24π

b) $18\sqrt{3}\pi$
c) $36\,\pi$
d) $12\,\pi$
e) $6\sqrt{3}\pi$

28 - (ENEM MEC/2022) Uma empresa produz e vende um tipo de chocolate, maciço, em formato de cone circular reto com as medidas do diâmetro da base e da altura iguais a 8 cm e 10 cm, respectivamente, como apresenta a figura.

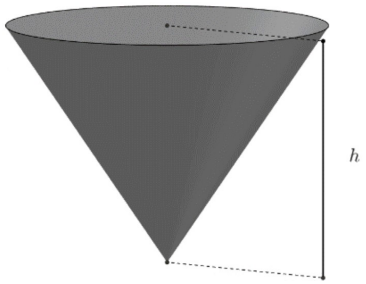


Devido a um aumento de preço dos ingredientes utilizados na produção desse chocolate, a empresa decide produzir esse mesmo tipo de chocolate com um volume 19% menor, no mesmo formato de cone circular reto com altura de 10 cm.

Para isso, a empresa produzirá esses novos chocolates com medida do raio da base, em centímetro, igual a

a) 1,52.
b) 3,24.
c) 3,60.
d) 6,48.
e) 7,20.

29 - (UFPR/2023)



Na figura acima, tem-se um reservatório no formato de um cone circular reto com altura h e área do topo igual a 12 m². Esse reservatório está sendo preenchido com um líquido cujo volume em m³ é dado por:

$$V(t) = \log_2(t^2 + 1)$$

sendo $t \geq 0$ o tempo. Em quanto tempo o líquido atingirá metade da capacidade desse reservatório?

a) $t = \sqrt{4^h - 1}$
b) $t = 2^h - 1$
c) $t = \sqrt{2^h - 1}$

d) $t = 4^h - 1$

e) $t = \sqrt{4^h + 1}$

30 - (Fac. Israelita de C. da Saúde Albert Einstein SP/2017) Para a feira cultural da escola, um grupo de alunos irá construir uma pirâmide reta de base quadrada. A pirâmide terá 3 m de altura e cada aresta da base medirá 2 m. A lateral da pirâmide será coberta com folhas quadradas de papel, que poderão ser cortadas para um melhor acabamento. Se a medida do lado de cada folha é igual a 20 cm, o número mínimo dessas folhas necessárias à execução do trabalho será

Utilize $\sqrt{10} = 3,2$

a) 285
b) 301
c) 320
d) 333

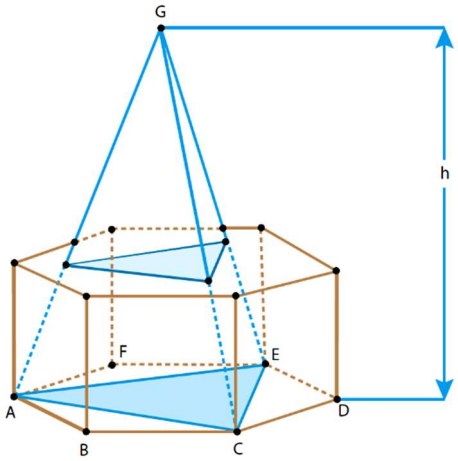
31 - (Mackenzie SP/2017) A altura, em cm, de um tetraedro regular cuja área total mede $48\sqrt{3}$ cm² é

a) $2\sqrt{2}$
b) $4\sqrt{2}$
c) $2\sqrt{3}$
d) $4\sqrt{3}$
e) 6

32 - (UTF PR/2017) Uma barraca de camping foi projetada com a forma de uma pirâmide de altura 3 metros, cuja base é um hexágono regular de lados medindo 2 metros. Assim, a área da base e o volume desta barraca medem, respectivamente:

a) $6\sqrt{3}$ m² e $6\sqrt{3}$ m³.
b) $3\sqrt{3}$ m² e $3\sqrt{3}$ m³.
c) $5\sqrt{3}$ m² e $2\sqrt{3}$ m³.
d) $2\sqrt{3}$ m² e $5\sqrt{3}$ m³.
e) $4\sqrt{3}$ m² e $8\sqrt{3}$ m³.

33 - (UERJ/2018) O esquema a seguir representa um prisma hexagonal regular de base ABCDEF, com todas as arestas congruentes, e uma pirâmide triangular regular de base ACE e vértice G.



Sabe-se que os dois sólidos têm o mesmo volume e que a altura h da pirâmide mede 12 cm.

A medida da aresta do prisma, em centímetros, é igual a:

a) 1,5
b) $\sqrt{3}$
c) 2
d) $2\sqrt{3}$

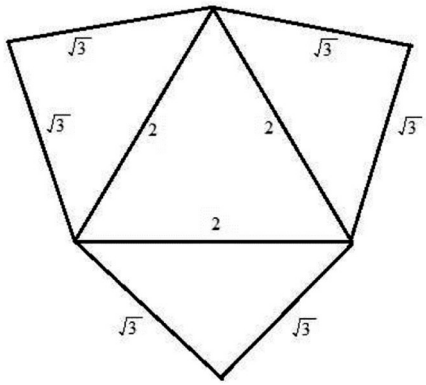
34 - (ITA SP/2018) Considere a classificação: dois vértices de um paralelepípedo são não adjacentes quando não pertencem à mesma aresta. Um tetraedro é formado por vértices não adjacentes de um paralelepípedo de arestas 3 cm, 4 cm e 5 cm. Se o tetraedro tem suas arestas opostas de mesmo comprimento, então o volume do tetraedro é, em cm^3:

a) 10.
b) 12.
c) 15.
d) 20.
e) 30.

35 - (UECE/2018) Considere uma pirâmide regular hexagonal reta cuja medida da altura é 30 m e cuja base está inscrita em uma circunferência cuja medida do raio é igual a 10 m. Desejando-se pintar todas as faces triangulares dessa pirâmide, a medida da área a ser pintada, em m^2, é

a) $115 \cdot \sqrt{39}$.
b) $150 \cdot \sqrt{39}$.
c) $125 \cdot \sqrt{39}$.
d) $140 \cdot \sqrt{39}$.

36 - (UCB DF/2018)



Essa figura representa a planificação de uma pirâmide cujo volume é

a) $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

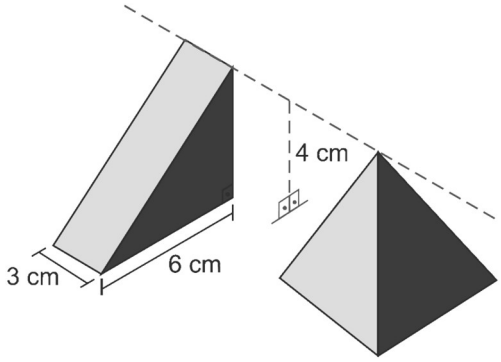
b) $\frac{4}{3}$.

c) $2\sqrt{3}$.

d) $\frac{2}{3}$.

e) $\frac{2\sqrt{5}}{3}$.

37 - (Famerp SP/2018) A figura indica um prisma reto triangular e uma pirâmide regular de base quadrada. A altura desses sólidos, em relação ao plano em que ambos estão apoiados, é igual a 4 cm, como indicam as figuras.



Se os sólidos possuírem o mesmo volume, a aresta da base da pirâmide, em centímetros, será igual a

a) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

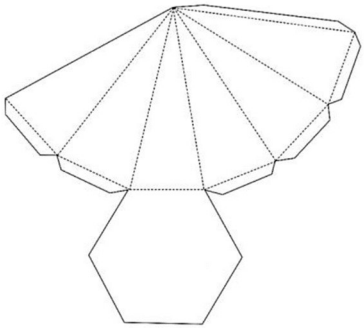
b) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

c) $\sqrt{3}$

d) $3\sqrt{3}$

e) $\frac{6\sqrt{3}}{5}$

38 - (UFPR/2018) A figura abaixo apresenta um molde para construção de uma pirâmide hexagonal regular. Para montar essa pirâmide, basta recortar o molde seguindo as linhas contínuas, dobrar corretamente nas linhas tracejadas e montar a pirâmide usando as abas trapezoidais para fixar sua estrutura com um pouco de cola. Sabendo que cada um dos triângulos tracejados nesse molde é isósceles, com lados medindo 5 cm e 13 cm, qual das alternativas abaixo mais se aproxima do volume dessa pirâmide?

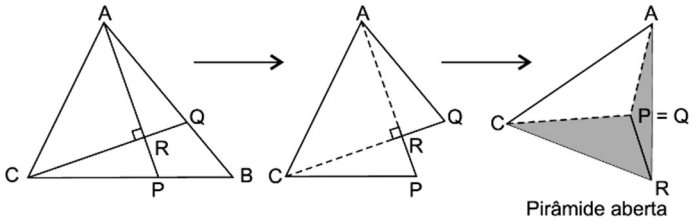


a) 260 cm^3.
b) 276 cm^3.
c) 281 cm^3.
d) 390 cm^3.
e) 780 cm^3.

TEXTO: 2 - Comum à questão: 39

A fabricação de uma peça triangular de vértices A, B e C, a partir da qual será construída uma pirâmide aberta (sem a face APC), exige as seguintes especificações:

I. $\overline{AP}$ e $\overline{CQ}$ são cevianas, perpendiculares em R, do triângulo ABC, com AP = CQ = 4 cm;
II. AQ = CP.



Pirâmide aberta

39 - (IBMEC SP Insper/2018) Se $AC = \sqrt{2}$ cm, então a pirâmide que será construída terá volume, em cm^3, igual a

a) $\frac{1}{4}$
b) $\frac{1}{2}$
c) $\frac{2}{3}$
d) $\frac{3}{4}$
e) $\frac{1}{3}$

TEXTO: 3 - Comuns às questões: 40, 41

Um artista plástico deseja construir uma obra chamada “A pirâmide da desigualdade da riqueza no Brasil”. Ele fará uma réplica do gráfico apresentado, mantendo todas as suas proporções.



Nesse gráfico, considere que a altura da pirâmide referente à riqueza dos 10% mais ricos seja 90% da altura da pirâmide total de distribuição de riqueza e que essas pirâmides sejam semelhantes entre si.

Para construir a obra, ele utilizará quatro triângulos isósceles congruentes entre si e um quadrado, todos feitos de metal, deixando o interior da pirâmide vazio. A pirâmide terá 4 metros de altura, e a base quadrada terá 6 metros de lado.

Questão-40 - (Fatec SP/2018) Para destacar a diferença entre os mais ricos e os mais pobres, o artista pintará toda a área lateral da obra com tons diferentes de tinta, um mais escuro (para os 10% mais ricos) e outro mais claro (para os 90% mais pobres), como no gráfico. O custo da tinta mais escura é de R$ 20,00 por metro quadrado, e o custo da tinta mais clara é de R$ 10,00 por metro quadrado.

A base da pirâmide e as linhas divisórias **não** serão pintadas.

O custo total para pintar essa obra será, em reais, igual a

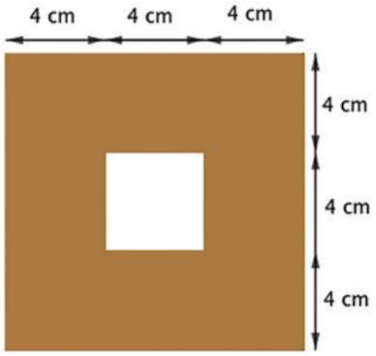
a) 895,00
b) 914,00
c) 1.086,00
d) 1.148,00
e) 1.256,00

41 - (Fatec SP/2018) No gráfico, o percentual que o volume da pirâmide referente aos 10% mais ricos representa do volume total é, aproximadamente, igual a

a) 58%
b) 62%
c) 73%
d) 87%
e) 90%

42 - (Fac. Israelita de C. da Saúde Albert Einstein SP/2018) Uma peça tem a forma de uma pirâmide reta, de base quadrada, com 15 cm de altura e é feita de madeira maciça.

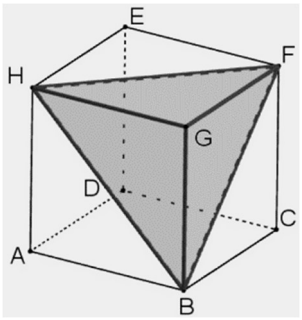
A partir da base dessa peça, foi escavado um orifício na forma de um prisma de base quadrada. A figura mostra a visão inferior da base da peça (base da pirâmide).



Esse orifício tem a maior profundidade possível, isto é, sem atravessar as faces laterais da pirâmide. O volume de madeira, em cm^3, que essa peça contém é

a) 560.
b) 590.
c) 620.
d) 640.

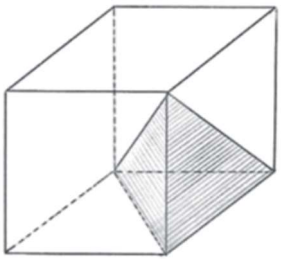
43 - (UFRGS RS/2019) Considere o paralelepípedo de vértices A, B, C, D, E, F, G, H e a pirâmide de vértices B, F, G, H, inscrita no paralelepípedo, representados na figura a seguir.



A razão entre o volume da pirâmide e o volume do paralelepípedo é

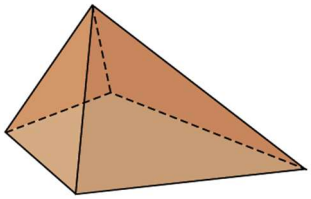
a) $\frac{1}{6}$
b) $\frac{1}{5}$
c) $\frac{1}{4}$
d) $\frac{1}{3}$
e) $\frac{1}{2}$

44 - (IFPR/2019) Um artesão retira uma pirâmide de um cubo sólido de madeira, como ilustra a figura abaixo. A porção de madeira retirada do cubo equivale aproximadamente a:

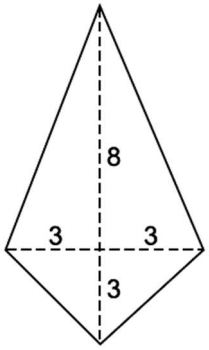


a) 33,1%.
b) 25%.
c) 16,7%.
d) 12,5%.

45 - (Univag MT/2019) Uma pirâmide reta de altura igual a 5 cm tem como base um quadrilátero conhecido como pipa.



Esse quadrilátero pode ser dividido em 4 triângulos retângulos, conforme a figura, que também mostra a medida, em cm, dos catetos dos triângulos.



O volume dessa pirâmide é igual a

a) 40 cm^3.
b) 45 cm^3.
c) 55 cm^3.
d) 50 cm^3.
e) 35 cm^3.

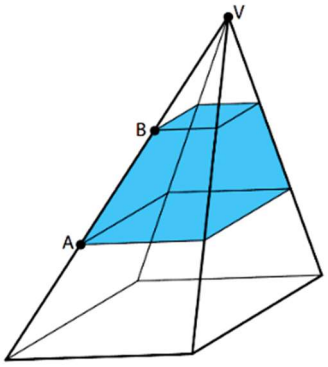
46 - (UEG GO/2019) Em um curso de dobraduras, a instrutora orientou que fosse construída uma pirâmide de base quadrada, de lado igual a 3 cm e altura igual a 10 cm. O volume dessa pirâmide é igual a

a) 25 cm^3
b) 30 cm^3
c) 15 cm^3
d) 9 cm^3
e) 12 cm^3

47 - (UERJ/2019) Observe na imagem uma pirâmide de base quadrada, seccionada por dois planos paralelos à base, um contendo o ponto A e o outro o ponto B. Esses planos dividem cada aresta lateral em três partes iguais.

Considere as seguintes medidas da pirâmide:

- altura = 9 cm;
- aresta da base = 6 cm;
- volume total = 108 cm^3.



O volume da região compreendida entre os planos paralelos, em cm^3, é:

a) 26
b) 24
c) 28
d) 30

48 - (IME RJ/2019) Em um tetraedro ABCD, os ângulos $A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$ são idênticos e a aresta AD é ortogonal à BC. A área do ΔABC é igual à área do ΔACD, e o ângulo $M\hat{A}D$ é igual ao ângulo $M\hat{D}A$, onde M é ponto médio de BC. Calcule a área total do tetraedro ABCD, em cm^2, sabendo que BC = 2cm, e que o ângulo $B\hat{A}C$ é igual a 30°.

a) $\left(2-\sqrt{3}\right)$
b) $\left(2+\sqrt{3}\right)$
c) $4\left(2-\sqrt{3}\right)$
d) $4\left(2+\sqrt{3}\right)$
e) 4

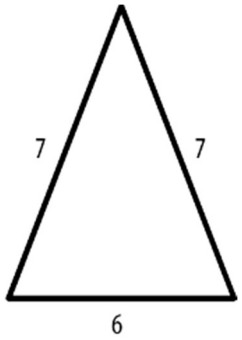
49 - (UECE/2020) Considere um sólido que possui exatamente cinco vértices dos quais quatro são os vértices da base (face inferior) de um cubo e o quinto é um dos vértices da face superior desse cubo. Se a medida da aresta do cubo é 9 m, então, a medida do volume desse sólido, em m^3, é igual a

a) 241.
b) 243.
c) 245.
d) 247.

50 - (UFMS/2020) Um grupo de amigos decidiu acampar em local próximo a uma das cachoeiras da cidade de Bonito. Planejam utilizar uma barraca feita de tecido impermeável no formato de pirâmide regular quadrangular, com medidas da aresta de base de 2 m e altura 2 m. Considerando que a barraca deve isolar o grupo de toda umidade, inclusive a proveniente do solo, quantos metros quadrados de tecido são necessários?

a) $4\sqrt{3}$.
b) $4\left(\sqrt{3}+1\right)$.
c) $4\left(1+4\sqrt{5}\right)$.
d) $4\sqrt{5}$.
e) $\sqrt{80}+4$.

51 - (FGV /2020) Uma pirâmide regular tem base quadrada de lado 6, e 4 faces triangulares congruentes com o triângulo abaixo:



O volume da pirâmide é:

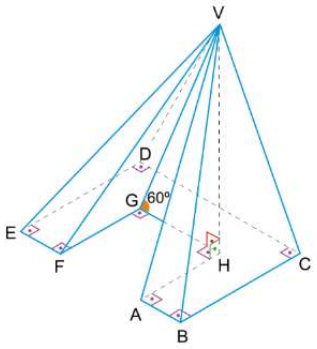
a) $14\sqrt{31}$
b) $12\sqrt{31}$
c) $15\sqrt{31}$
d) $13\sqrt{31}$
e) $11\sqrt{31}$

52 - (Unicamp SP/2020) Se um tetraedro regular e um cubo têm áreas de superfície iguais, a razão entre o comprimento das arestas do tetraedro e o comprimento das arestas do cubo é igual a

a) $\sqrt{2}\sqrt{3}$.
b) $\sqrt[4]{2}\sqrt{3}$.
c) $\sqrt{2}\sqrt[4]{3}$.
d) $\sqrt[4]{2}\sqrt[4]{3}$.

53 - (Unesp SP/2022) A figura indica o projeto de uma escultura maciça em forma de pirâmide de vértice V, base ABCDEFGH e altura $\overline{VH}$, que será feita com espuma

expansiva rígida de poliuretano. Sabe-se que AHGF é um quadrado de área igual a 3 m2, BCDE é um retângulo, com BC = 3 m e CD = 4, e que o ângulo $H\hat{G}V$ mede 60º.



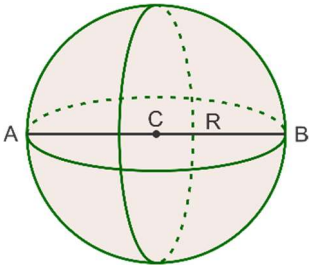
Sabendo que 1 m^3 corresponde a 1 000 litros e que o custo da quantidade de espuma de poliuretano necessária para ocupar a capacidade de 1 litro é de R$ 5,00, para fazer por completo essa escultura, desconsiderando desperdícios, o valor gasto com espuma será de

a) R$ 40.000,00.
b) R$ 37.500,00.
c) R$ 42.500,00.
d) R$ 35.000,00.
e) R$ 45.000,00.

Esfera

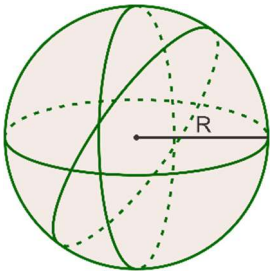
Definição

Considerando uma esfera de centro C e raio R, definimos esfera como o conjunto de todos os pontos do espaço cuja distância ao ponto C é menor ou igual a R.



Elementos da esfera:
C: centro
$\underline{CB} = R$: raio
$\underline{AB}$: diâmetro

Área da Superfície da Esfera



A área de uma esfera de raio R é igual a:

$$A = 4\pi R^2$$

Exemplo: **Calcule a área da esfera abaixo. Considere $\pi = 3{,}14$.**

$$A = 4\pi R^2 \Rightarrow A = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 5^2 \Rightarrow A = 314 \text{ cm}^2$$

Portanto, a área da esfera é de 314 cm^2.

Atenção!

Secção de uma Esfera

A secção plana de uma esfera sempre é um círculo.

Sendo R o raio da esfera, r o raio do círculo formado pela secção da esfera e d a distância do centro C da esfera ao plano de secção β, temos:

$$r^2 = R^2 - d^2$$

Logo, a área da secção é igual a:

$$A_{Secção} = \pi r^2 \Rightarrow A_{Secção} = \pi(R^2 - d^2)$$

Exemplo: Calcule a área de secção de uma esfera intersectada por um plano β a 3 cm do centro de uma esfera cujo raio é igual a 5 cm.

$$A_{Secção} = \pi(R^2 - d^2) \Rightarrow A_{Secção} = \pi(5^2 - 3^2) \Rightarrow A_{Secção} = 16\pi$$

Volume da Esfera

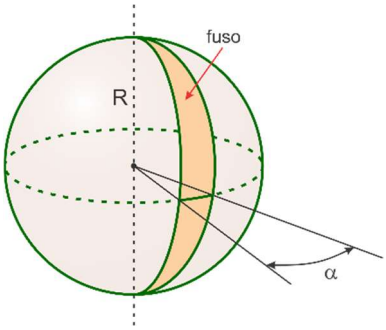
O volume de uma esfera de raio R é dado por: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Exemplo: Calcule o volume de uma esfera com $R = 3$ cm.

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 \Rightarrow V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 3^3 \Rightarrow V = 36\ cm^3.$$

Logo o raio da esfera é $36\ cm^3$.

Fuso Esférico



O fuso esférico é a intersecção da superfície de uma esfera com um diedro em que sua aresta contém um diâmetro dessa superfície esférica.

Observação: O fuso é caracterizado pelo ângulo α do diedro.

A área do fuso é dada por:

- Se α em graus

$$A_{fuso} = \frac{\pi r^2 \alpha}{90}.$$

- Se α em radianos

$$A_{fuso} = 2r^2\alpha.$$

Exemplo: Calcule, em graus e em radianos, a área do fuso da esfera abaixo.

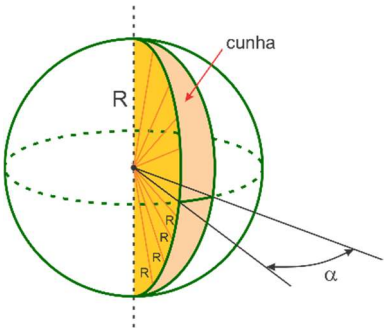
Área em graus:

$$A_{fuso} = \frac{\pi r^2 \alpha}{90} \Rightarrow A_{fuso} = \frac{\pi \cdot 9^2 \cdot 30}{90} \Rightarrow A_{fuso} = 27\pi\ cm^2$$

Área em radianos:

$$A_{fuso} = 2r^2\alpha \Rightarrow A_{fuso} = 2 \cdot 9^2 \cdot 30 \Rightarrow A_{fuso} = 4860\ cm^2.$$

Cunha Esférica



A cunha esférica é a intersecção de uma esfera com um diedro no qual sua aresta contém o diâmetro da esfera.

Observação: Enquanto o fuso é caracterizado pelo ângulo α do diedro, a cunha é caracterizada pelo raio da esfera e pela medida do diedro.

O volume da cunha é dado por:

- Se α em graus:

$$V_{cunha} = \frac{\pi r^3 \alpha}{270}.$$

- Se α em radianos:

$$V_{cunha} = \frac{2r^3 \alpha}{3}.$$

Exemplo: Calcule, em graus e em radianos, o volume da cunha da esfera abaixo.

Volume em graus:

$$V_{cunha} = \frac{\pi r^3 \alpha}{270} \Rightarrow V_{cunha} = \frac{\pi \cdot 9^3 \cdot 15}{270} \Rightarrow V_{cunha} = 40{,}5\pi\ cm^3.$$

Volume em radianos:

$$V_{cunha} = \frac{2r^3 \alpha}{3} \Rightarrow V_{cunha} = \frac{2 \cdot 9^3 \cdot 15}{3} \Rightarrow V_{cunha} = 7290\ cm^3.$$

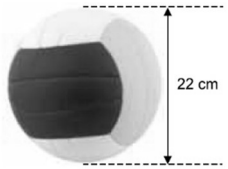
Exercícios

01 - (Unit SE/2016) A capacidade de absorção de nutrientes de uma célula é proporcional à sua área superficial A, mas sua necessidade de nutrientes é proporcional ao seu volume V. Certa célula esférica só consegue se manter se $\frac{A}{V} \geq 200$, com A e V, em unidades de mm^2 e mm^3, respectivamente.

Logo, o raio dessa célula deve ser, no máximo,

a) 0,005mm.
b) 0,01mm.
c) 0,015mm.
d) 0,02mm.
e) 0,025mm.

02 - (UEA AM/2016) Determinado tipo de bola de vôlei é uma esfera com 22 cm de diâmetro, confeccionada com 18 gomos de couro, agrupados em 6 conjuntos coloridos com 3 gomos cada um, sendo 2 conjuntos na cor amarela, 2 conjuntos na cor azul e 2 conjuntos na cor branca, conforme mostra a figura.



(http://uolesporte.blogosfera.uol.com.br)

Utilizando $\pi = 3$ e sabendo que todos os conjuntos coloridos têm a mesma área, é correto concluir que a área aproximada de todos os gomos amarelos dessa bola, em cm^2, é

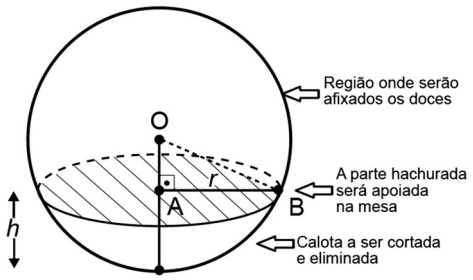
a) 495.
b) 484.
c) 472.
d) 446.
e) 418.

03 - (UFRGS RS/2016) Se um jarro com capacidade para 2 litros está completamente cheio de água, a menor medida inteira, em cm, que o raio de uma bacia com a forma semiesférica deve ter para comportar toda a água do jarro é
a) 8.
b) 10.
c) 12.
d) 14.
e) 16.

04 - (Unicamp SP/2016) Um cilindro circular reto, cuja altura é igual ao diâmetro da base, está inscrito numa esfera. A razão entre os volumes da esfera e do cilindro é igual a

a) $4\sqrt{2}/3$.
b) 4/3.
c) $3\sqrt{2}/4$.
d) $\sqrt{2}$.

05 - (ENEM MEC/2017) Para decorar uma mesa de festa infantil, um chefe de cozinha usará um melão esférico com diâmetro medindo 10 cm, o qual servirá de suporte para espetar diversos doces. Ele irá retirar uma calota esférica do melão, conforme ilustra a figura, e, para garantir a estabilidade deste suporte, dificultando que o melão role sobre a mesa, o chefe fará o corte de modo que o raio r da seção circular de corte seja de pelo menos 3 cm. Por outro lado, o chefe desejará dispor da maior área possível da região em que serão afixados os doces.



Para atingir todos os seus objetivos, o chefe deverá cortar a calota do melão numa altura h, em centímetro, igual a

a) $5-\frac{\sqrt{91}}{2}$
b) $10-\sqrt{91}$
c) 1
d) 4

e) 5

06 - (IFPE/2017) Maria Carolina resolveu sair um pouco do seu regime e foi saborear uma deliciosa sobremesa composta por três bolas de sorvete e 27 uvas, conforme a imagem abaixo. Suponha que as bolas de sorvete e as uvas tenham formatos esféricos e que Maria Carolina comeu toda a sua sobremesa. Usando $\pi = 3$, sabendo que os raios de cada bola de sorvete têm 4 cm e, de cada uva, 1 cm, podemos afirmar que ela consumiu, nessa sobremesa, em centímetros cúbicos, um total de



Disponível em: < http://s1.1zoom.me/big3/144/Ice_cream_Blueberries_440624.jpg>
Acesso em 20 maio 2017.

a) 108.
b) 768.
c) 876.
d) 260.
e) 900.

07 - (Acafe SC/2017) Considere o caso abaixo e responda: quantas gotas dessa medicação, o médico deve administrar utilizando o segundo conta-gotas, para garantir a mesma quantidade de medicamento do primeiro conta-gotas?

Certo paciente deve ingerir exatamente 7 gotas de um medicamento a ser administrado através de um conta-gotas cilíndrico cujo diâmetro mede d cm. Em certa ocasião, o médico tinha disponível apenas um segundo conta-gotas, também cilíndrico, cuja medida do diâmetro é igual a metade do diâmetro do primeiro conta-gotas. Sabe-se que o volume de cada gota equivale ao volume de uma esfera com mesmo diâmetro do conta-gotas utilizado para formá-la.

a) 14 gotas
b) 3,5 gotas
c) 7 gotas
d) 56 gotas

08 - (FMABC SP/2017) O balão intragástrico (BIG), utilizado no controle da obesidade, consiste em uma prótese de silicone no formato de uma esfera preenchida completamente com solução fisiológica, podendo variar sua capacidade entre 400 e 700 mL. Dependendo das necessidades do paciente, este balão pode ocupar de 20% a 70% da capacidade total do estômago.



guidehomeo.com/dyspepsie/

Suponha que um paciente, cuja capacidade do estômago seja de 2 litros, precise reduzir essa capacidade em 25%.

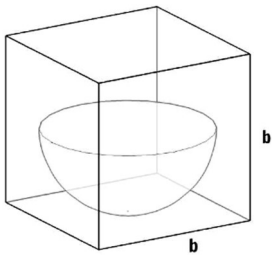
Desprezando a espessura da parede do balão, pode-se afirmar sobre o raio R desse balão, que

a) $1{,}2 \leq R \leq 4{,}4$
b) $R > 5$
c) $4{,}5 \leq R \leq 5{,}3$
d) $R = 5$

09 - (UEG GO/2017) Ao triplicarmos o raio e tomarmos a terça parte de uma esfera, ela possuirá, em relação à esfera original, um volume

a) 2 vezes maior
b) 3 vezes maior
c) 9 vezes maior
d) 12 vezes maior
e) 20 vezes maior

10 - (Uncisal AL/2017) Uma fábrica mudará o formato de suas caixas d'água cúbicas para semiesféricas. O novo formato terá dimensões tais que a esfera gerada pela semiesfera possa ser inscrita no modelo anterior, como mostra a figura.



Se a aresta da caixa d'água cúbica mede b metros, a diminuição de volume que o novo modelo apresentará será, em m^3, de

a) $b^3/2$.
b) $b^3\pi/12$.
c) $b^3\pi/6$.
d) $b^3(6 - \pi)/6$.
e) $b^3(12 - \pi)/12$.

11 - (UFAL/2018)

Bolas dos Jogos do Bilhar – Diferenças

[...]
Existem diversas e diferentes características técnicas em relação às bolas usadas no nosso esporte, que geralmente são desconhecidas pela maioria dos praticantes.
[...]
Bolas Belgas Aramith de 54 mm (2,1/8 Pol): ainda é a mais utilizada no Brasil, sendo desconhecida a origem no uso desse diâmetro para as bolas aqui largamente utilizadas.

Disponível em: <http://snookerclube.com.br/bolas-dos-jogos-do-bilhar-diferencas/>. Acesso em: 04 ago. 2017.

Se adotarmos $\pi = 3$, o volume da bola citada no texto, em mm^3, é

a) 19 683.
b) 59 049.
c) 78 732.
d) 236 196.
e) 629 856.

12 - (UPE/2018) Foram colocadas esferas de raio 5,0cm dentro de um aquário que tem o formato de um paralelepípedo de 1,25m de largura, 2,0m de comprimento e 1,0m de altura, cheio de água, ocupando sua capacidade máxima. Aproximadamente, quantas esferas terão que ser colocadas nesse aquário para que 10% do volume contido no seu interior seja derramado? Adote $\pi = 3,0$



a) 250
b) 300
c) 325
d) 450
e) 500

13 - (UFU MG/2018) Um recipiente, no formato de um cilindro circular reto de raio de base r cm, possui um líquido solvente em seu interior. A altura h desse solvente presente no recipiente é igual a $\frac{16}{3}$ cm, conforme ilustra a Figura 1.

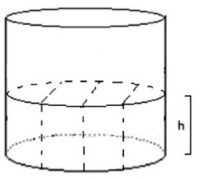


Figura 1
(Ilustrativa e sem escalas)

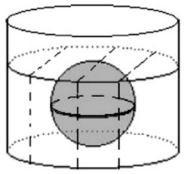


Figura 2
(Ilustrativa e sem escalas)

Quando uma peça maciça, no formato de uma esfera de raio igual a 3cm, é mergulhada nesse recipiente até encostar no fundo, observa-se que o solvente cobre exatamente a esfera, conforme ilustra a Figura 2.

Segundo as condições apresentadas, o raio r, em cm, é igual a

a) $4\sqrt{3}$.
b) $2\sqrt{7}$.
c) $5\sqrt{2}$.
d) $3\sqrt{6}$.

14 - (UFRGS RS/2018) Fundindo três esferas idênticas e maciças de diâmetro 2 cm, obtém-se uma única esfera maciça de raio

a) $\sqrt[3]{3}$.
b) $\sqrt[3]{4}$.
c) $\sqrt[3]{6}$.
d) 3.
e) 6.

15 - (UEG GO/2018) Deseja-se construir um reservatório cilíndrico circular reto com 8 metros de diâmetro e teto no formato de hemisfério. Sabendo-se que a empresa responsável por construir o teto cobra R$ 300,00 por m^2, o valor para construir esse teto esférico será de

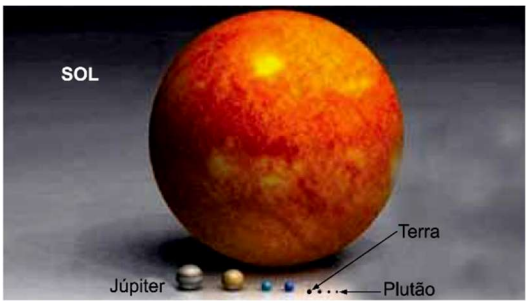
Use $\pi = 3{,}1$

a) R$ 22.150,00
b) R$ 32.190,00
c) R$ 38.600,00
d) R$ 40.100,00
e) R$ 29.760,00

16 - (Unifenas MG/2019) Uma esfera de aço possui raio 2 metros. Caso o raio de outra esfera seja igual a 1 metro, qual é a razão entre os volumes da primeira em relação à segunda?

a) 1/16.
b) 1/8.
c) 2.
d) 4.
e) 8.

17 - (Fac. Israelita de C. da Saúde Albert Einstein SP/2019) Em uma palestra, um cientista ilustrou comparativamente o tamanho dos planetas do sistema solar com auxílio da foto a seguir.



(www.colegioweb.com.br)

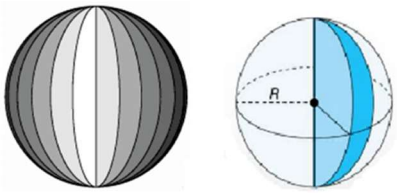
No entanto, o cientista disse que essa foto dificulta a percepção correta da diferença de tamanho entre os planetas. Para ilustrar o que dizia, ele pediu para a plateia considerar que todos os planetas são esféricos e que o tamanho do raio do planeta Júpiter é 11 vezes o tamanho do raio do planeta Terra. Em seguida, lançou a seguinte

pergunta: se associarmos o planeta Terra a uma bola de futebol, o planeta Júpiter deverá ser associado, aproximadamente, a quantas dessas bolas?

A resposta correta para a pergunta do palestrante é

a) 2 048.
b) 121.
c) 33.
d) 22.
e) 1 331.

18 - (IFMT/2019) Uma bola esférica é composta por 24 faixas iguais, e cada faixa tem a forma de uma cunha esférica, como representado na figura.

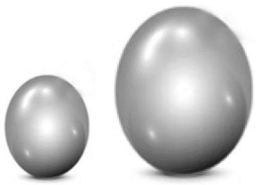


Cunha Esférica

Sabendo-se que o volume da bola é 288π cm^3, então a área total da cunha esférica da superfície é igual a:

a) 24π cm^2
b) 30π cm^2
c) 36π cm^2
d) 42π cm^2
e) 48π cm^2

19 - (IFMT/2019) As bolas de borracha representadas na figura abaixo são totalmente esféricas e têm a mesma espessura. Sabe-se que o raio da bola maior é o dobro do raio da bola menor.



Usando uma certa quantidade de borracha para fazer 24 bolas maiores, então, com essa mesma quantidade de borracha, pode-se fazer um total de bolas menores igual a:

a) 12
b) 36
c) 48
d) 96
e) 120

20 - (UECE/2019) Considere um cubo Q inscrito na esfera S, isto é, os vértices de Q pertencem à superfície esférica de S. Se o volume de Q é igual a 1000 m^3, então, a medida, em metros, do raio da esfera S é

a) $5\sqrt{3}$

b) $3\sqrt{5}$

c) $10\sqrt{2}$

d) $5\sqrt{2}$

21 - (Unesp SP/2019) Os pontos P e Q sobre a superfície da Terra possuem as seguintes coordenadas geográficas:

	Latitude	Longitude
P	30º N	45º L
Q	30º N	15º O

Considerando a Terra uma esfera de raio 6 300 km, a medida do menor arco $\overset{\frown}{PQ}$ sobre a linha do paralelo 30º N é igual a

a) 1 150 $\pi\sqrt{3}$ km

b) 1 250 $\pi\sqrt{3}$ km

c) 1 050 $\pi\sqrt{3}$ km

d) 1 320 $\pi\sqrt{3}$ km

e) 1 350 $\pi\sqrt{3}$ km

22 - (Santa Casa SP/2019) Conheça a maior peça espacial já feita por uma impressora 3D.

Uma empresa acaba de terminar, com a ajuda de uma impressora 3D, a construção de uma gigantesca peça de titânio voltada para o mercado espacial. Trata-se de uma tampa no formato de cúpula semiesférica com 46 polegadas de diâmetro interno, conforme ilustração a seguir.



(https://tecnologia.uol.com.br, 20.07.2018. Adaptado.)

Considere que o interior dessa tampa seja revestido com um material antitérmico, que 1 polegada = 2,5 cm e que $\pi = 3$. A área interna dessa cúpula é um valor

a) entre 1,5 m² e 2,5 m².
b) inferior a 1,5 m².
c) superior a 4,5 m².
d) entre 3,5 m² e 4,5 m².
e) entre 2,5 m² e 3,5 m².

23 - (IFBA/2019) Um recipiente no formato de um cilindro reto com raio interior da base medindo 4,00 cm e altura 20,00 cm contém uma coluna de água de altura 12,00 cm.

Uma esfera é lançada dentro do recipiente e foi constatada que o nível de água subiu numa medida igual à terça parte do raio desta esfera.

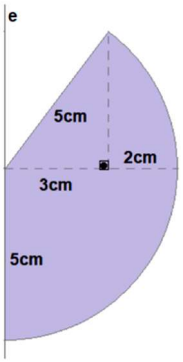
Desta forma, considerando $\pi = 3$, podemos afirmar que o volume da esfera, em cm³, é de:

a) 24
b) 32
c) 8
d) 40
e) 16

24 - (FPS PE/2019) Uma cápsula de medicamento tem a forma de um cilindro reto acoplado a duas semiesferas nas bases. Os raios das semiesferas e da base do cilindro são iguais e a altura do cilindro é igual ao diâmetro de sua base. Se a razão entre o volume da cápsula, em cm³, e a área total da cápsula, em cm², é 1/4 (de cm), qual a medida do raio das semiesferas?

a) 1,0 cm
b) 0,9 cm
c) 0,6 cm
d) 0,7 cm
e) 0,8 cm

25 - (UFMS/2020) Uma escultura foi criada, girando a figura a seguir ao longo do eixo e:



O volume da escultura é:

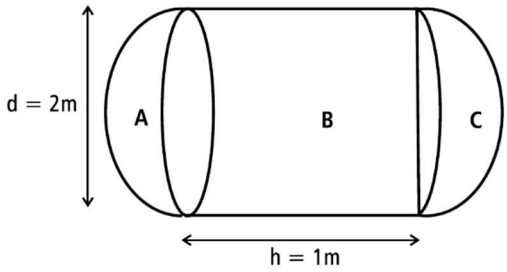
a) menor que 150π cm³.
b) igual a 150π cm³.
c) maior que 150π cm³ e menor que $\frac{500\pi}{3}$ cm³.
d) igual a $\frac{500\pi}{3}$ cm³.
e) maior que $\frac{500\pi}{3}$ cm³.

26 - (Mackenzie SP/2020) Em um recipiente cilíndrico de raio 6 cm e altura 9 cm, completamente cheio de água, foi colocada uma esfera metálica. Assim, observou-se

que a esfera ficou totalmente submersa na água, transbordando 36π cm^3 de água. Então, o raio da esfera, em cm, mede

a) 2
b) 3
c) 4
d) 5
e) 6

27 - (IFPR/2020) Uma cisterna subterrânea para captação de água da chuva é composta por três partes, como mostra a figura abaixo. A e C são semiesferas equivalentes e B é um cilindro. Sabendo que $1dm^3 = 1\ \ell$.



Considerando a constante π igual a $\frac{22}{7}$, a capacidade da cisterna é, em litros, de aproximadamente:

a) 140.
b) 7300.
c) 1430.
d) 750.

28 - (FCM MG/2020) Uma empresa realiza um estudo dimensional para a definição do formato das cápsulas de determinado medicamento.



Numa das propostas, o volume da cápsula é composto pela junção de um cilindro equilátero com duas semiesferas.

Se a quantidade de medicação alocada na cápsula corresponde à soma do volume do cilindro com metade do volume da esfera, a razão entre o volume de medicamento alojado e o volume da cápsula será de:

a) 0,20.
b) 0,25.
c) 0,80.
d) 1,25.

TEXTO: 1 - Comum à questão: 29

O mar e o aquecimento global

O termo aquecimento global é usado para caracterizar o aumento da temperatura média da Terra ao longo dos anos. Segundo a Organização Meteorológica Mundial, hoje o planeta está quase um grau mais quente do que estava antes do processo de industrialização.

Esse aumento de temperatura causa o derretimento de geleiras e placas de gelo ao redor do mundo e essa perda de grandes áreas de gelo na superfície pode acelerar o aquecimento global, pois menos energia proveniente do Sol seria refletida pela Terra.

Um resultado imediato do derretimento de geleiras é o aumento do nível médio do mar. Os cientistas notaram que esse aumento foi de 17 centímetros no decorrer do século 20 e projetam elevação contínua do nível do mar ao longo do século 21, prevendo-se inundações em algumas cidades próximas à costa.

(Disponível em: **meioambiente.culturamix.com.** Adaptado)

29 - (PUC Campinas SP/2020) Suponha que uma geleira tivesse o formato de uma esfera de raio igual a 1.000 metros e que, com o efeito do aquecimento global, ela tenha derretido, reduzindo-se a uma esfera com $\frac{1}{8}$ do volume original. O raio da geleira após o derretimento passou a ser, em metros:

a) 500
b) 600
c) 125
d) 800
e) 100

30 - (Unioeste PR/2020) Um monumento deverá ser construído. O projeto original prevê para este monumento uma esfera de 1 metro de diâmetro, confeccionada em titânio. Devido ao alto custo do titânio, apenas 60% do volume de titânio necessário foi adquirido. Os arquitetos decidiram substituir a esfera por um cilindro circular reto com o titânio adquirido. O diâmetro da base do cilindro deve ainda ser de 1 metro. Assim, é **CORRETO** afirmar que a altura, em centímetros, deste cilindro será:

a) 100.
b) 80.
c) 60.
d) 50.
e) 40.

31 - (ENEM MEC/2022) Peças metálicas de aeronaves abandonadas em aeroportos serão recicladas. Uma dessas peças é maciça e tem o formato cilíndrico, com a medida do raio da base igual a 4 cm e a da altura igual a 50 cm. Ela será derretida, e o volume de metal resultante será utilizado para a fabricação de esferas maciças com diâmetro de 1 cm, a serem usadas para confeccionar rolamentos. Para estimar a quantidade de esferas que poderão ser produzidas a partir de cada uma das peças cilíndricas, admite-se que não ocorre perda de material durante o processo de derretimento.

Quantas dessas esferas poderão ser obtidas a partir de cada peça cilíndrica?

a) 800
b) 1 200
c) 2 400
d) 4 800
e) 6 400

32 - (Fac. Cesgranrio RJ/2021) Um cilindro reto de 24 cm de altura e raio **r** tem o mesmo volume de uma esfera cujo raio é, também, igual a **r**.

A medida do raio **r**, em cm, é de

a) 18
b) 32
c) 36
d) 64
e) 72

33 - (ENEM MEC/2022) Uma cozinheira produz docinhos especiais por encomenda. Usando uma receita-base de massa, ela prepara uma porção, com a qual produz 50 docinhos maciços de formato esférico, com 2 cm de diâmetro. Um cliente encomenda 150 desses docinhos, mas pede que cada um tenha formato esférico com 4 cm de diâmetro. A cozinheira pretende preparar o número exato de porções da receita-base de massa necessário para produzir os docinhos dessa encomenda.

Quantas porções da receita-base de massa ela deve preparar para atender esse cliente?

a) 2
b) 3
c) 6
d) 12
e) 24

34 - (ENEM MEC/2023) Uma empresa produziu uma bola de chocolate, em formato esférico, para utilizar na decoração de sua loja. Essa bola tem 20 cm de diâmetro externo, sendo oca por dentro, e a medida da espessura entre as superfícies interna e externa corresponde a 1 cm. Considere que, na confecção dessa bola, foi utilizado um tipo de chocolate em que 1 g equivale a 0,75 cm^3.

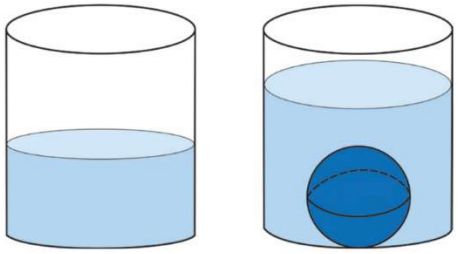
A quantidade de chocolate, em grama, utilizado na confecção dessa bola é

a) $\frac{76\pi}{3}$
b) $\frac{304\pi}{9}$
c) $\frac{4336\pi}{9}$

d) $\frac{4000\pi}{3}$

e) $\frac{18256\pi}{9}$

35 - (Unicamp SP/2023) Um recipiente cilíndrico de altura *h* tem água em seu interior. Ao mergulhar uma esfera de chumbo de raio *R* neste recipiente, a água cobre a esfera e nenhuma quantidade de água se perde, como ilustrado na figura a seguir.



Sabendo que o raio da base do cilindro é o dobro do raio da esfera, a diferença entre a altura da água antes e depois do mergulho da esfera é igual a

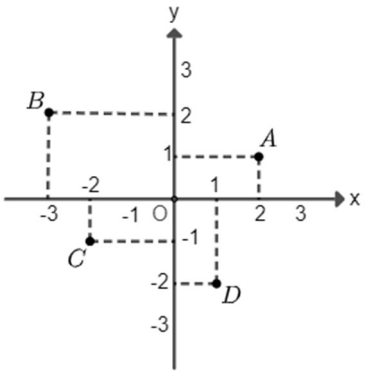
a) 2R.
b) R.
c) R/3.
d) 2R/3.

Ponto, Reta e Circunferência

Sistema Cartesiano Ortogonal

O sistema cartesiano ortogonal é formado pelos eixos ortogonais (eixo x e eixo y), que são retas orientadas que possibilitam a localização de pontos no plano ou no espaço.

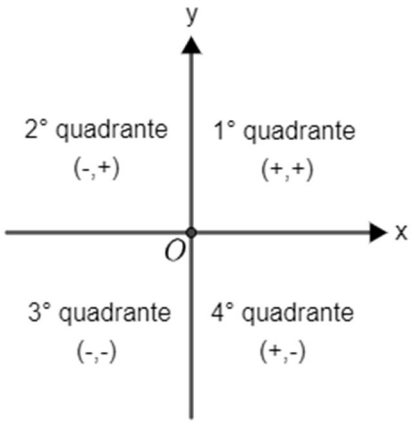
A localização dos pontos é feita a partir do conhecimento de suas coordenadas. Como exemplo, temos os pontos A, B, C e D.



- Ponto $A(2,1)$: o número 2 é a coordenada x (abscissa) e o número 1 é a coordenada y (ordenada).
- Ponto $B(-3,2)$: o número -3 é a coordenada x (abscissa) e o número 2 é a coordenada y (ordenada).
- Ponto $C(-2,-1)$: o número -2 é a coordenada x (abscissa) e o número -1 é a coordenada y (ordenada).
- Ponto $D(1,-2)$: o número 1 é a coordenada x (abscissa) e o número -2 é a coordenada y (ordenada).

Observações:

- A intersecção dos eixos ortogonais é chamada de origem (ponto O).
- Os eixos x e y dividem o plano cartesiano em quatro quadrantes.
- O sinal (positivo ou negativo) da abscissa e da ordenada dependem do quadrante em que se encontram.
- Se um ponto P pertencer ao eixo x, suas coordenadas são $(a, 0)$, sendo $a \in R$.
- Se um ponto P pertencer ao eixo y, suas coordenadas são $(0, b)$, sendo $b \in R$.

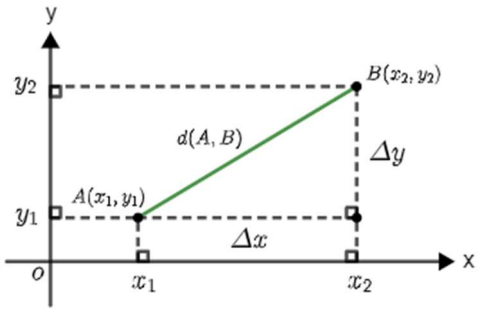


Ponto

Distância entre Dois Pontos

A distância entre dois pontos, A e B, é a medida do segmento de reta com extremidades em A e B.

A distância entre dois pontos, $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, é calculada pela seguinte fórmula:



$$d(A,B) = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

$$d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Exemplo: Calcule a distância $d(A,B)$ entre os pontos $A(-6,-2)$ e $B(4,8)$.

Considerando $x_1 = -6, y_1 = -2, x_2 = 4$ e $y_2 = 8$, temos

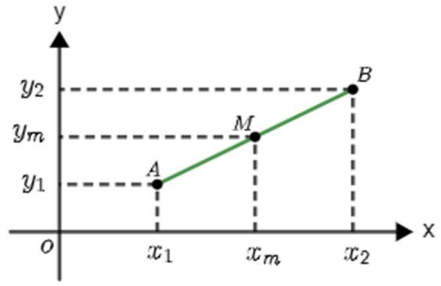
$$d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \Rightarrow d(A,B) = \sqrt{(4-(-6))^2 + (8-(-2))^2}$$

Logo,

$$d(A,B) = \sqrt{10^2 + 10^2} \Rightarrow d(A,B) = 10\sqrt{2}$$

Desse modo, a distância $d(A,B)$ entre os pontos A e B é igual a $10\sqrt{2}$.

Ponto Médio de um Segmento de Reta



As coordenadas do ponto médio M de um segmento de reta AB, em que $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ são pontos distintos, são determinadas a partir do cálculo da média aritmética dos valores das abscissas e das ordenadas dos pontos A e B.

Desse modo, $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$.

Exemplo: Calcule as coordenadas do ponto médio M do segmento de reta de extremidades $A(8,-2)$ e $B(-4,6)$.

O ponto médio possui coordenadas $M(x_m, y_m)$. Considerando $x_1 = 8, y_1 = -2, x_2 = -4$ e 6, para x_m, temos

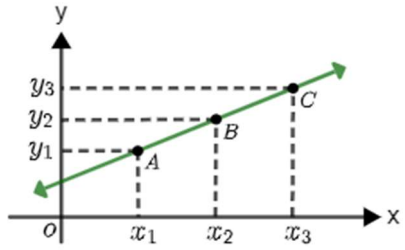
$$x_m = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow x_m = \frac{8+(-4)}{2} \Rightarrow x_m = 2.$$

Para y_m, temos

$$y_m = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow y_m = \frac{-2+6}{2} \Rightarrow y_m = 2.$$

Assim, as coordenadas do ponto médio do segmento de reta $\overline{AB}$ são $M(2,2)$.

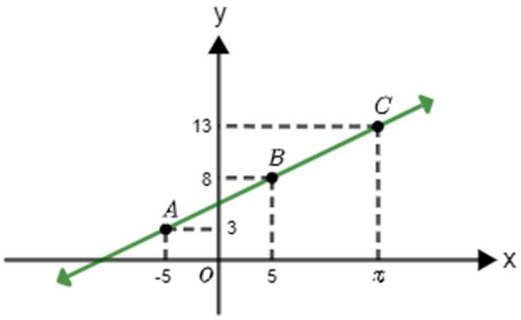
Alinhamento de Três Pontos



Consideremos três pontos, A, B e C. Podemos dizer que esses pontos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$ estão alinhados quando:

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Exemplo: Determine o valor de x para que os pontos A, B e C do gráfico estejam alinhados.



$$D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$D = \begin{vmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 5 & 8 & 1 \\ x & 13 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$-40 + 3x + 65 - 8x + 65 - 15 = 0 \Rightarrow$$
$$-5x = -75 \Rightarrow x = 15.$$

Logo, o valor de x para que os três pontos estejam alinhados é 15.

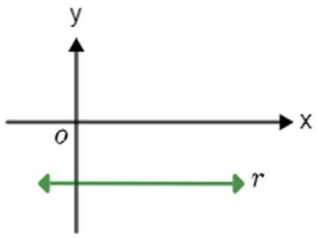
Reta

Inclinação de uma Reta

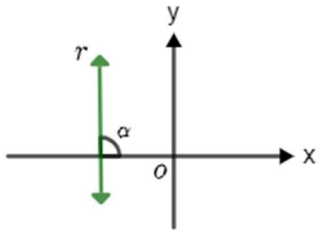
A inclinação de uma reta no plano cartesiano é determinada pela medida do ângulo α formado entre a reta r e o eixo x do plano, no sentido anti-horário. Assim, para cada reta r, o ângulo α é tal que $0° \leq \alpha < 180°$.

Exemplos:

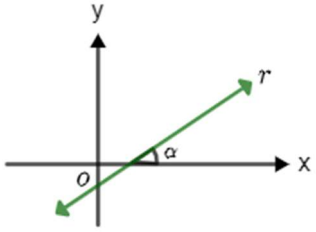
Para $\alpha = 0°$



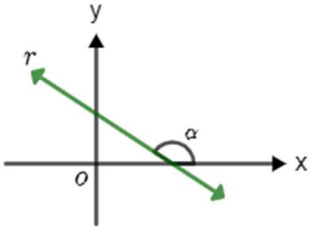
Para $\alpha = 90°$



Para $0° < \alpha < 90°$



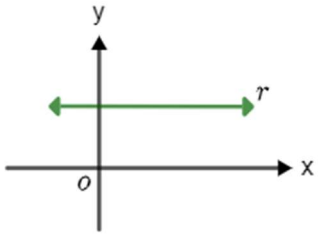
Para $90° < \alpha < 180°$



Coeficiente Angular

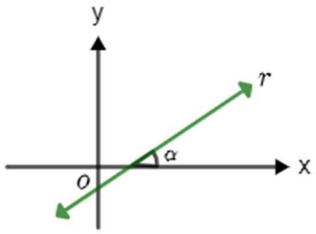
O coeficiente angular m de uma reta é o número real que expressa a tangente trigonométrica de sua inclinação α. Isto é, $\boldsymbol{m = \tan \alpha}$.

Assim,



Para $\boldsymbol{\alpha = 0°}$

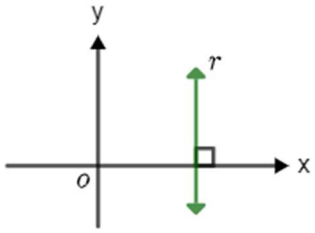
$$m = \tan 0°$$
$$m = 0$$



Para $\boldsymbol{0° < \alpha < 90°}$

$$\tan \alpha > 0$$

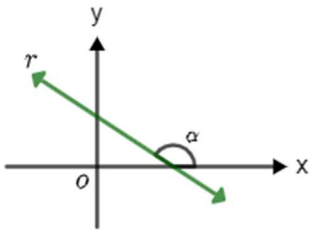
Logo, se $m = \tan \alpha$, $m > 0$.



Para $\boldsymbol{\alpha = 90°}$

Não há valor definido para $\tan 90°$.

Portanto, quando a reta possui $\alpha = 90°$ ela não apresenta declividade.



Para $\boldsymbol{90° < \alpha < 180°}$

$$\tan \alpha < 0$$

Logo, se $m = \tan \alpha$, $m < 0$.

Existem duas maneiras de calcular o coeficiente angular de uma reta. São elas:

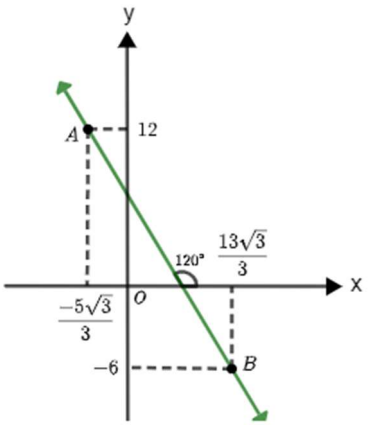
1. Quando temos a inclinação α da reta:

$$\boldsymbol{m = \tan \alpha}$$

2. Quando temos os pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ da reta:

$$\boldsymbol{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

Exemplo: Calcule o coeficiente angular da reta demonstrada no gráfico.



Como $\alpha = 120°$, temos

$$m = \tan\alpha \Rightarrow m = \tan 120°$$

Como o ângulo de 120° é suplementar ao ângulo de 60°, podemos afirmar que $\tan 120° = -\tan 60°$. Assim:

$$m = \tan 120° \Rightarrow m = -\tan 60° \Rightarrow m = -\sqrt{3}$$

Outra maneira de calcular é utilizando os pontos $A\left(-\frac{5\sqrt{3}}{3}, 12\right)$ e $B\left(\frac{13\sqrt{3}}{3}, -6\right)$ indicados no gráfico. Então:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow m = \frac{-6 - 12}{\frac{13\sqrt{3}}{3} - \left(-\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)} \Rightarrow m = \frac{-18}{6\sqrt{3}}$$

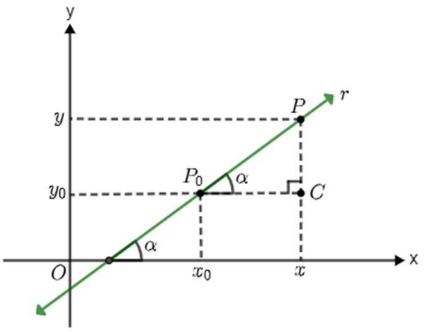
Portanto, $m = -\sqrt{3}$.

O coeficiente angular m da reta demonstrada no gráfico é $-\sqrt{3}$.

Equação Fundamental da Reta

A equação fundamental é determinada por:

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0} \Rightarrow \boldsymbol{y - y_0 = m.(x - x_0)}$$



Lembre-se de que se a reta r for paralela ao eixo x (ou seja, $\alpha = 0°$) teremos $m = 0$. Assim, a equação da reta será expressa por $y = y_0$.

Por outro lado, se a reta r for perpendicular ao eixo x (isto é, $\alpha = 90°$) todos os pontos da reta terão o mesmo valor para x. desse modo, a equação da reta será definida por $x = x_0$.

Exemplo: Determine a equação da reta que passa pelos pontos $A(12, -2)$ e $B(-6, 4)$.

Primeiramente, vamos descobrir o valor do coeficiente angular através da relação $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, logo

$$m = \frac{4 - (-2)}{-6 - 12} \Rightarrow m = -\frac{1}{3}$$

Em seguida, utilizando as coordenadas do ponto $B(-6,4)$, encontramos a equação da reta. Temos

$$y - y_0 = m \cdot (x - x_0) \Rightarrow y - 4 = -\frac{1}{3} \cdot \left(x - (-6)\right) \Rightarrow y - 4 = -\frac{1}{3} \cdot (x + 6)$$
$$\Rightarrow 3y - 12 = -x - 6 \Rightarrow x + 3y - 6 = 0$$

A equação da reta que passa pelos pontos $A(12, -2)$ e $B(-6,4)$ é $x + 3y - 6 = 0$.

Equações da Reta

A partir da equação fundamental da reta é possível obter outras quatro formas de equações. São elas:

- **Equação Reduzida**

Obtida quando a reta intersecta o eixo y, ou seja, a coordenada de um de seus pontos é $(0, n)$.

$$y = m \cdot x + n.$$

$\boldsymbol{m}$: coeficiente angular da reta.
$\boldsymbol{n}$: coeficiente linear da reta (ponto em que a reta intersecta o eixo y).

Exemplos:

a) $y = 3x + 2$;
b) $y = -\frac{1}{2}x + 5$;
c) $y = 4x$ ($n = 0 \rightarrow$ a reta passa pela origem).

- **Equação Segmentária**

Obtida quando a reta intersecta os eixos x e y nos pontos $(a, 0)$ e $(0, b)$.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Exemplos:

a) $\frac{x}{7} + \frac{y}{1} = 1$;
b) $\frac{x}{5} + \frac{y}{-2} = 3$.

- **Equação Geral**

Equação em que a, b e c são constantes, não podendo a e b serem simultaneamente nulos.

$$ax + by + c = 0.$$

Exemplos:

a) $2x + y - 2 = 0$;
b) $-\frac{1}{3}x + 0y + 5 = 0 \rightarrow -\frac{1}{3}x + 5 = 0$ (reta paralela ao eixo y);
c) $0x - 4y + 1 = 0 \rightarrow -4y + 1 = 0$ (reta paralela ao eixo x).

- **Equação Paramétrica**

É uma maneira de representar retas utilizando um parâmetro, isto é, uma variável que conecta duas equações derivadas da equação de uma única reta.

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

As funções $f(t)$ e $g(t)$ são funções afins, portanto, cada uma indica uma reta.

Exemplo:

a) $\begin{cases} x = 2t + 1; \\ y = 5t - 3. \end{cases}$

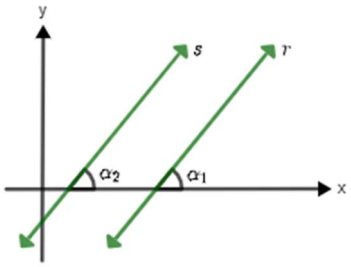
b) $\begin{cases} x = 3t - 2; \\ y = -7t. \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = 4t; \\ y = t + 1. \end{cases}$

Posições Relativas entre Duas Retas

- **Retas Paralelas**

São retas que possuem a mesma inclinação (coeficiente angular).



Logo, se uma reta r de inclinação α_1 é paralela a uma reta s de inclinação α_2, podemos afirmar que:

$$\boldsymbol{\alpha_1 = \alpha_2 \Leftrightarrow \tan \alpha_1 = \tan \alpha_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2 \Leftrightarrow r \parallel s}$$

Atenção!

Observações:

1. Os valores de α_1 e α_2 devem estar entre $0°$ e $180°$.
2. Se as retas, além do coeficiente angular, possuírem também o coeficiente linear igual, essas retas são coincidentes.

Exemplo: Qual a posição da reta r de equação $x - 2y - 8 = 0$ em relação à reta s de equação $\frac{1}{2}x - y + 4 = 0$?

Considerando a reta $r: x - 2y - 8 = 0$, vamos identificar a relação que existe entre as variáveis x e y.

$$2y = x - 8 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - 4.$$

Assim, o coeficiente angular da reta r é $m_r = \frac{1}{2}$.

Considerando a reta s: $\frac{1}{2}x - y + 4 = 0$, vamos identificar a relação que existe entre as variáveis x e y.

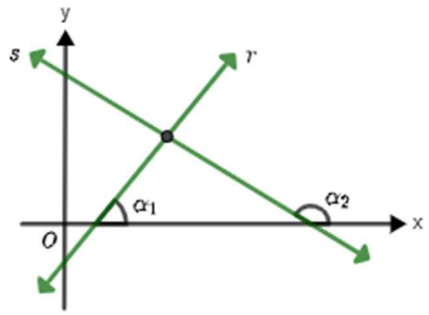
$$y = \frac{1}{2}x + 4$$

Então, o coeficiente angular da reta s é $m_s = \frac{1}{2}$.

Portanto, como as retas possuem coeficientes angulares iguais, podemos afirmar que elas são paralelas.

- **Retas Concorrentes**

São retas que possuem inclinações (coeficientes angulares) diferentes.



Portanto, se uma reta r de inclinação α_1 é concorrente a uma reta s de inclinação α_2, podemos afirmar que:

$\boldsymbol{\alpha_1 \neq \alpha_2 \Leftrightarrow \tan\alpha_1 \neq \tan\alpha_2 \Leftrightarrow m_1 \neq m_2 \Leftrightarrow r}$ **e** $\boldsymbol{s}$ **: concorrentes**

Para encontrarmos o ponto de intersecção entre duas retas concorrentes devemos resolver o sistema formado pelas equações das duas retas.

Dependendo do tipo de sistema, é possível determinar a posição relativa de duas retas:

- Sistema possível e determinado (um ponto em comum): retas concorrentes.
- Sistema possível e indeterminado (infinitos pontos em comum: retas coincidentes.
- Sistema impossível (nenhum ponto em comum): retas paralelas distintas.

Exemplo 1: Qual é a posição da reta r, de equação $3x - 5y + 25 = 0$, em relação à reta s, de equação $8x + 5y - 80 = 0$?

Considerando a reta r: $3x - 5y + 25 = 0$. Vamos identificar a relação que existe entre as variáveis x e y.

$$5y = 3x + 25 \Rightarrow y = \frac{3}{5}x + 5$$

Assim, o coeficiente angular da reta r é $m_r = \frac{3}{5}$.

Considerando a reta s: $8x + 5y - 80 = 0$. Vamos identificar a relação que existe entre as variáveis x e y.

$$5y = -8x + 80 \Rightarrow y = \frac{-8}{5}x + 16$$

Então, o coeficiente angular da reta s é $m_r = \frac{-8}{5}$.

Portanto, como as retas possuem coeficientes angulares diferentes, podemos afirmar que elas são concorrentes.

Exemplo 2: Determine o ponto P de intersecção das retas r, de equação $2x + y - 12 = 0$, e s, de equação $x + y - 8 = 0$.

Resolvendo o sistema formado pelas equações, temos:

$$\begin{cases} 2x + y - 12 = 0 \\ x + y - 8 = 0 \quad \cdot(-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y - 12 = 0 \\ -x - y + 8 = 0 \end{cases}$$

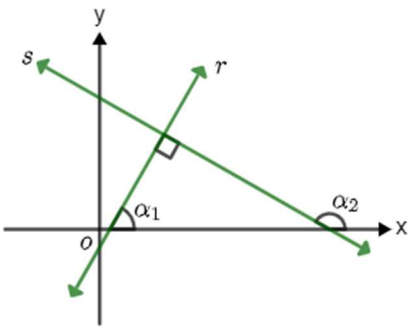
$$x - 4 = 0$$
$$x = 4$$

Substituindo o x=4 na segunda equação, temos

$$2x + y - 12 = 0 \Rightarrow 2 \cdot 4 + y - 12 = 0 \Rightarrow y = 4.$$

Logo, o ponto P de intersecção entre as retas r e s é $P(4,4)$.

Perpendicularidade entre Retas



Duas retas são perpendiculares quando o produto entre seus coeficientes angulares é igual a -1.

Desse modo, se uma reta r de inclinação α_1 e coeficiente angular m_1 é perpendicular a uma reta s de inclinação α_2 e coeficiente angular m_2, podemos afirmar que:

$$\boldsymbol{r \perp s \Leftrightarrow m_1.m_2 = -1} \text{ ou } \boldsymbol{r \perp s \Leftrightarrow m_2 = -\frac{1}{m_1}}.$$

Exemplo: Sabendo que a reta r é perpendicular à reta de equação $2x + 3y - 12 = 0$ e passa pelo ponto $A(2, 0)$, determine a equação da reta r.
O primeiro passo é encontrar o coeficiente angular (m_2) da reta de equação $2x + 3y - 12 = 0$.

$$2x + 3y - 12 = 0 \Rightarrow 3y = -2x + 12 \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + 4$$

Desse modo, $m_2 = -\frac{2}{3}$.

Depois, aplicamos a condição de perpendicularidade $m_1.m_2 = -1$. Logo,

$$m_1.m_2 = -1 \Rightarrow m_1.\left(-\frac{2}{3}\right) = -1 \Rightarrow m_1 = \frac{3}{2}$$

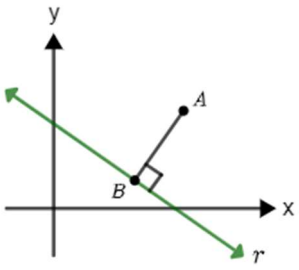
Finalizamos substituindo o coeficiente angular (m_1) de r encontrado e o ponto $A(2,0)$ que passa por essa reta na fórmula da equação reduzida da reta. Dessa maneira,

$$(y - y_o) = m(x - x_0) \Rightarrow (y - 0) = \frac{3}{2}(x - 2) \Rightarrow 2y - 3x + 6 = 0$$

Portanto, a equação da reta r é $2y - 3x + 6 = 0$.

Distância entre Ponto e Reta

A distância entre um ponto A e uma reta r é a medida do segmento de reta com extremidades em A e B, onde B é a projeção ortogonal de A sobre a reta r.



A distância de um ponto a uma reta é calculada pela fórmula:

$$\boldsymbol{d = \frac{|ax_p + by_p + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

Observação: a, b e c referem-se aos coeficientes da reta, enquanto x_p e y_p correspondem às coordenadas do ponto.

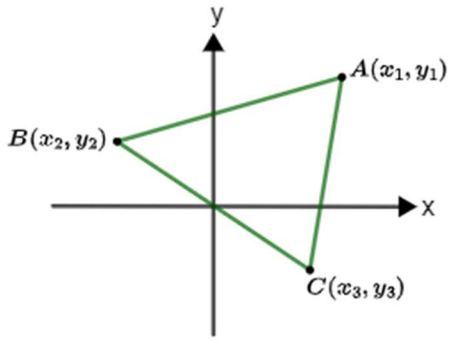
Exemplo: Sabendo que uma reta r possui equação $x + 2y - 6 = 0$ e um ponto P possui coordenadas $P(4, 3)$, calcule a distância entre o ponto e a reta.

Utilizando a expressão $d = \frac{|ax_p+by_p+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ para calcular a distância entre o ponto P e a reta r, temos

$$d = \frac{|1.4 + 2.3 - 6|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} \Rightarrow d = \frac{|4|}{\sqrt{5}} \Rightarrow d = \frac{4\sqrt{5}}{5}.$$

Portanto, a distância entre o ponto $P(4,3)$ e a reta de equação $x + 2y - 6 = 0$ é igual a $\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

Área de uma Região Triangular



A área de uma região triangular delimitada pelos pontos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$ é dada por:

$S = \frac{1}{2}|D|$, em que $D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$.

Exemplo: Calcule a área da região triangular que possui como vértices os pontos $A(4,4)$, $B(-3,2)$ e $C(3,-2)$.

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 8 + 12 + 6 - 6 + 8 + 12$$

$$D = 40$$

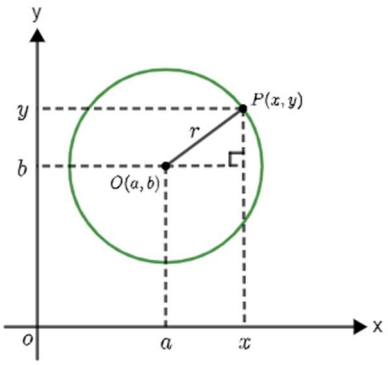
Utilizando o valor do determinante, substituímos na expressão do cálculo da área. Logo,

$$S = \frac{1}{2}|D| \Rightarrow S = \frac{1}{2}|40| \Rightarrow S = 20$$

Logo, a área da região triangular é igual a 20 unidades de área.

Circunferência

Uma circunferência de centro $O(a,b)$ e raio r é definida como o conjunto de todos os pontos $P(x,y)$ equidistantes de O.



A equação da circunferência é dada por:

$d(P,O) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$

$\boldsymbol{(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2}$

$\boldsymbol{x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0}$ (equação geral da circunferência)

Observação: Quando o centro da circunferência estiver na origem, isto é, a e b são iguais a zero, a equação da circunferência é $x^2 + y^2 = r^2$.

Exemplo: Determine a equação da circunferência de centro $O(1,7)$ e raio 4.

Utilizando a expressão $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ e considerando $a = 1$, $b = 7$ e $r = 4$, temos

$$(x-1)^2 + (y-7)^2 = 4^2 \Rightarrow x^2 - 2 \cdot 1 \cdot x + 1^2 + y^2 - 2 \cdot 7 \cdot y + 7^2 = 16 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 14y + 34 = 0$$

A equação da circunferência de centro $O(1,7)$ e raio 4 é $x^2 + y^2 - 2x - 14y + 34 = 0$.

Obtenção do centro e do raio de uma circunferência a partir de sua equação geral

As coordenadas do centro O e o valor do raio r de uma circunferência podem ser encontrados por meio da comparação entre a fórmula da equação geral da circunferência e a equação dada.

Desse modo, considerando a equação $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$, encontrarmos os valores de $O(a,b)$ e r da seguinte maneira:

Primeiro, identificamos os termos semelhantes entre a equação geral da circunferência e a equação dada:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21$$

Assim, percebemos que os termos semelhantes são:

$-2ax$ e $-6x$, $-2by$ e $-8y$, $a^2 + b^2 - r^2$ e 21.

Em seguida, igualamos esses termos para encontrar os valores de a, b e r.

$$-2ax = -6x \Rightarrow a = 3 \text{ e } -2by = -8y \Rightarrow b = 4.$$

E, assim,

$$a^2 + b^2 - r^2 = 21 \Rightarrow 3^2 + 4^2 - r^2 = 21 \Rightarrow r^2 = 4 \Rightarrow r = 2.$$

Portanto, a circunferência de equação $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$ possui coordenadas do centro $O(a,b) = O(3,4)$ e raio $r = 2$.

Exemplo: Determine as coordenadas do centro e o raio da circunferência de equação $\boldsymbol{x^2 + y^2 + 4x - 10y - 52 = 0}$.

$$-2ax = 4x \Rightarrow a = -2 \text{ e } -2by = -10y \Rightarrow b = 5.$$

E, assim,

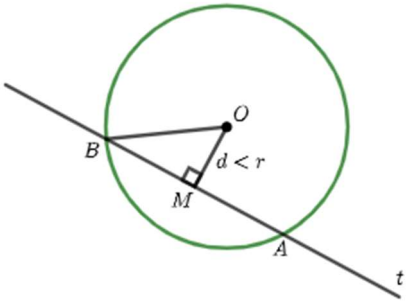
$$a^2 + b^2 - r^2 = -52 \Rightarrow (-2)^2 + 5^2 - r^2 = -52 \Rightarrow r^2 = 81 \Rightarrow r = 9.$$

Logo, a circunferência de equação $x^2 + y^2 + 4x - 10y - 52 = 0$ possui coordenadas do centro $O(a, b) = O(-2,5)$ e raio $r = 9$.

Posição Relativa entre Reta e Circunferência

Uma reta pode assumir três posições em relação a uma circunferência.

- **Reta Secante à Circunferência**



Quando uma reta é secante sua distância ao centro da circunferência é menor que o raio. Assim, a reta e a circunferência possuem dois pontos em comum.

Propriedades:
- $\overline{OM}$ é perpendicular a $\overline{AB}$;
- M é o ponto médio de $\overline{AB}$;
- Pela aplicação do Teorema de Pitágoras, temos: $(OM)^2 + (BM)^2 = (BO)^2$.

Exemplo: Determine a posição da reta $2x + 3y - 24 = 0$ em relação à circunferência $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 9$. Considere $\sqrt{13} = 3,6$.

Para encontrarmos a posição da reta em relação à circunferência devemos calcular a distância entre o centro da circunferência e a reta.

O primeiro passo é encontrarmos as coordenadas do centro e o raio da circunferência.

$$(x - x_O)^2 + (y - y_O)^2 = r^2 \Rightarrow (x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 9.$$

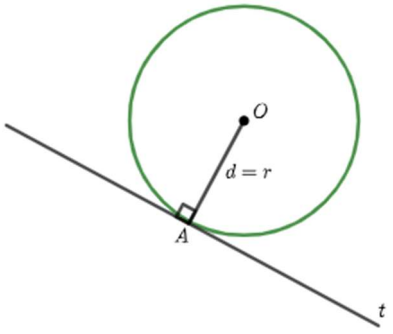
Se as coordenadas do centro são $O(x_O, y_O)$, então, $O(4,4)$. Já o raio é $r = 3$.

Em seguida, calculamos a distância do centro da circunferência à reta.

$$d = \frac{|ax_p + by_p + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow d = \frac{|2.4 + 3.4 + (-24)|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} \Rightarrow d = \frac{|-4|}{\sqrt{13}} \Rightarrow d = \frac{4\sqrt{13}}{13} \cong 1,1.$$

A distância entre o centro da circunferência e a reta é $1,1$, ou seja, é menor de o raio da circunferência. Logo, afirmamos que a seca é secante à circunferência.

- **Reta Tangente à Circunferência**



Quando uma reta é tangente sua distância ao centro da circunferência é igual ao raio. Logo, a reta e a circunferência possuem apenas um ponto em comum.

Exemplo: Qual a posição da reta $12x + 5y - 60 = 0$ em relação à circunferência $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$?

O primeiro passo é descobrirmos as coordenadas do centro e o valor do raio da circunferência. Igualando os termos semelhantes entre a equação geral da circunferência e a equação dada, vemos que:

$$-2ax = -4x \Rightarrow a = 2 \text{ e } -2by = -4y \Rightarrow b = 2.$$

E, assim,

$$a^2 + b^2 - r^2 = 4 \Rightarrow 2^2 + 2^2 - r^2 = 4 \Rightarrow r = 2.$$

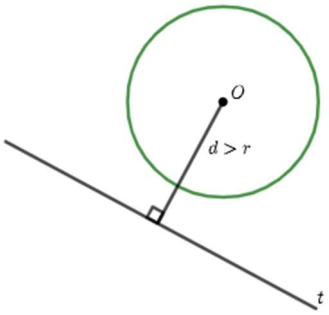
Logo, $O(2,2)$ e $r = 2$.

Depois, calculamos a distância do centro da circunferência à reta.

$$d = \frac{|ax_p + by_p + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow d = \frac{|12.2 + 5.2 + (-60)|}{\sqrt{12^2 + 5^2}} \Rightarrow d = \frac{|-26|}{\sqrt{169}} \Rightarrow d = \frac{26}{13} = 2.$$

Se a distância entre a reta e o centro da circunferência vale 2, isto é, possui o mesmo valor do raio, afirmamos que a reta é tangente à circunferência.

- **Reta Exterior à Circunferência**



Quando uma reta é exterior sua distância ao centro da circunferência é maior que o raio. Portanto, a reta e a circunferência não possuem pontos em comum.

Exemplo: Determine a posição da reta $x + y - 10 = 0$ em relação à circunferência de centro $O(0, 2)$ e raio 4. Considere $\sqrt{2} = 1,4$.

O exemplo já trouxe os valores das coordenadas do centro e do raio da circunferência. Desse modo, calculamos apenas a distância entre o centro da circunferência e a reta.

$$d = \frac{|ax_p + by_p + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow d = \frac{|1.0 + 1.2 + (-10)|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} \Rightarrow d = \frac{|-8|}{\sqrt{2}} \Rightarrow d = \frac{8\sqrt{2}}{2} \cong 5,6.$$

Como a distância entre a reta e o centro da circunferência vale $5,6$, ou seja, possui valor maior que o raio, afirmamos que a reta é exterior à circunferência.

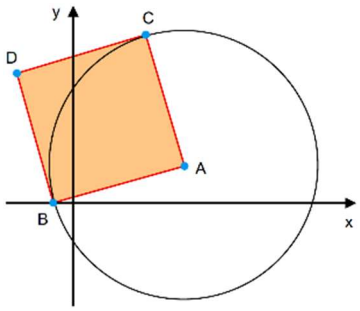
Exercícios

01 - (Unifenas MG/2020) Assinale a alternativa que representa a equação da circunferência que possui centro C(7;4) e raio 4.

a) $(x - 7)^2 + (y - 4)^2 = 16$.
b) $(x - 7)^2 + (y - 4)^2 = 4$.

c) $(x + 7)^2 + (y – 4)^2 = 16$.
d) $(x – 7)^2 + (y + 4)^2 = 4$.
e) $(x + 7)^2 + (y + 4)^2 = 16$.

02 - (Univag MT/2020) Em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, considere o quadrado ABDC e uma circunferência de centro A que passa pelos pontos B e C, conforme mostra a figura.



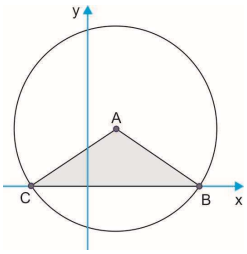
Dados B(–1, 0) e D(–3, 7), a equação da circunferência é

a) $(x – 6)^2 + (y – 2)^2 = 53$
b) $(x – 5)^2 + (y – 1)^2 = \sqrt{53}$
c) $(x – 5)^2 + (y – 1)^2 = 53$
d) $(x – 6)^2 + (y – 2)^2 = \sqrt{53}$
e) $(x – 7)^2 + (y – 3)^2 = \sqrt{53}$

03 - (UFPR/2020) Considere a circunferência B, cuja equação no plano cartesiano é $x^2 + y^2 – 8x + 10y + 21 = 0$. Qual das equações abaixo descreve uma circunferência que tangencia B?

a) $(x + 1)^2 + (y – 2)^2 = 15$.
b) $(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 5$.
c) $(x – 3)^2 + (y – 1)^2 = 3$.
d) $(x – 7)^2 + (y – 2)^2 = 10$.
e) $(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 9$.

04 - (FMABC SP/2021) Uma circunferência de centro A intercepta o eixo x nos pontos B e C, conforme mostra a figura.

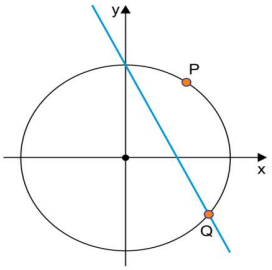


Sendo a equação dessa circunferência $(x – 1)^2 + (y – 2)^2 = 13$, a área do triângulo ABC é

a) 4.
b) 8.

c) 6.
d) 2.
e) 10.

05 - (FMJ SP/2023) Em um sistema cartesiano, os pontos P e Q pertencem a uma circunferência com centro na origem, conforme mostra a figura. A distância do ponto P à origem é igual a 5 e as coordenadas do ponto Q são (4, –3).



A equação da reta que intersecta a circunferência no eixo y e no ponto Q é

a) $2x - y = 11$
b) $2x + y = 5$
c) $3x - 2y = 11$
d) $x + y = 1$
e) $3x + 2y = 5$

06 - (UFAL/2018) A circunferência $x^2 + y^2 - 9 = 0$ e a reta $x + y - 5 = 0$

a) não têm ponto comum.
b) têm um ponto comum.
c) têm dois pontos comuns.
d) têm três pontos comuns.
e) têm quatro pontos comuns.

07 - (Mackenzie SP/2018) A equação da reta que corta o eixo das ordenadas no ponto P = (0, –6) e que tangencia a circunferência $x^2 + y^2 = 4$ no quarto quadrante é

a) $y = -2\sqrt{2}x + 6$
b) $y = 2\sqrt{2}x - 6$
c) $y = 2\sqrt{2}x + 6$
d) $y = 4x - 6$
e) $y = -4x + 6$

08 - (IBMEC SP Insper/2018) Sejam k, n e m números reais. As circunferências descritas pelas equações $x^2 + y^2 = 4 + 12x + 6y$ e $x^2 + y^2 = k + 4x + 12y$ se intersectam apenas quando k satisfaz a condição $m \leq k \leq n$. O valor de n – m é

a) 136.
b) 132.
c) 140.
d) 130.
e) 128.

09 - (UECE/2018) No plano, com o sistema de coordenadas cartesianas usual, a equação da reta que contém o ponto P(9, 8) e é tangente à curva representada pela equação $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0$ é

a) $3x + 4y - 59 = 0$.
b) $3x - 4y + 5 = 0$.
c) $4x - 3y - 12 = 0$.
d) $4x + 3y - 60 = 0$.

10 - (Acafe SC/2018) A circunferência λ passa pelos pontos $A(-1,-1)$, B(1, 5) e C(3, 1). A reta r: $x + 3y - 6 = 0$ e a circunferência λ são secantes. A área do triângulo cujos vértices são a origem do sistema de coordenadas cartesianas, e os pontos de intersecção entre a reta r e a circunferência λ, tem medida igual a:

a) 6 unidades de área.
b) 12 unidades de área.
c) 4 unidades de área.
d) 10 unidades de área.

11 - (Mackenzie SP/2018) Os valores de a para os quais as circunferências de equações $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 1$ e $(x-a)^2 + (y+2)^2 = 16$ são tangentes exteriormente são

a) –2 e 8
b 2 e 8
c) –8 e 2
d) 0 e 6
e) –6 e 0

12 - (Unicamp SP/2018) No plano cartesiano, sejam C a circunferência de centro na origem e raio r > 0 e s a reta de equação x + 3y = 10. A reta s intercepta a circunferência C em dois pontos distintos se e somente se

a) r > 2.
b) $r > \sqrt{5}$.
c) r > 3.
d) $r > \sqrt{10}$.

13 - (FGV /2019) No plano cartesiano, as retas x = a e x = b ($a \neq b$ e a ,$b \in R$) tangenciam a circunferência de equação $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0$. A soma a + b é igual a

a) 5
b) 8
c) 7
d) 4
e) 6

14 - (UECE/2019) Considere, em um plano com o sistema de coordenadas cartesiano usual, a circunferência que contém os pontos M(0, 0), P(3, 0) e Q(0, 4). Se K é o centro dessa circunferência, então, a equação da reta que contém o ponto K e é perpendicular ao segmento PQ é

a) $6x + 8y - 25 = 0$.
b) $4x - 3y = 0$.
c) $6x - 8y + 7 = 0$.
d) $4x + 3y - 12 = 0$.

15 - (UECE/2019) Em um plano munido do sistema de coordenadas cartesiano usual, a circunferência S possui dois de seus diâmetros sobre as retas representadas pelas equações $4x - 3y + 2 = 0$ e $3x + 4y - 11 = 0$. Se a medida de um diâmetro de S é 6 u.c., então, a equação que representa a circunferência S é
u.c. ≡ unidades de comprimento.

a) $x^2 + y^2 + x + 2y - 10 = 0$.
b) $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$.
c) $x^2 + y^2 + 2x + y - 10 = 0$.
d) $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$.

16 - (UECE/2019) No plano cartesiano, a reta t, paralela $x = \sqrt{3}$ y tangencia a circunferência $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$ no ponto Z = (x y), y > 2. Para os pontos X = (2, 0) e Y = (0, 2) na circunferência, a medida do arco XYZ (que contém o ponto Y) é igual a

Observação: $\text{tg}30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$

a) $\frac{4\pi}{3}$
b) $\frac{5\pi}{3}$
c) $\frac{5\pi}{4}$
d) $\frac{6\pi}{5}$

17 - (EsPCEx SP/2019) As equações das retas paralelas à reta r: $3x + 4y - 1 = 0$, que cortam a circunferência λ: $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$ e determinam cordas de comprimento igual a 8, são, respectivamente

a) $3x + 4y + 5 = 0$ e $3x + 4y + 25 = 0$.
b) $3x + 4y - 5 = 0$ e $3x + 4y - 25 = 0$.
c) $3x - 4y + 5 = 0$ e $3x - 4y + 25 = 0$.
d) $3x + 4y - 5 = 0$ e $3x + 4y + 25 = 0$.
e) $3x + 4y + 5 = 0$ e $3x + 4y - 25 = 0$.

18 - (UEG GO/2019) Duas circunferências possuem equações $(x + 1)^2 + y^2 = 1$ e $(x - 1)^2 + y^2 = 1$. A intersecção entre as duas circunferências

a) ocorre nos pontos $\left(\frac{-1}{2}, 0\right)$ e $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

b) ocorre nos pontos $\left(0, \frac{-1}{2}\right)$ e $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

c) ocorre nos pontos $\left(\frac{-1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ e $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

d) ocorre no ponto (0, 0)

e) não ocorre em nenhum ponto.

19 - (FGV /2020) No plano cartesiano, a reta de equação $3x + 4y = 0$ determina, na circunferência $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$, uma corda cujo comprimento é:

a) $2\sqrt{22}$

b) $2\sqrt{18}$

c) $2\sqrt{20}$

d) $2\sqrt{21}$

e) $2\sqrt{19}$

20 - (UEG GO/2020) Um triângulo equilátero está inscrito em uma circunferência centrada na origem e um dos seus vértices é o ponto (2,0). Os outros vértices do triângulo são os pontos

a) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

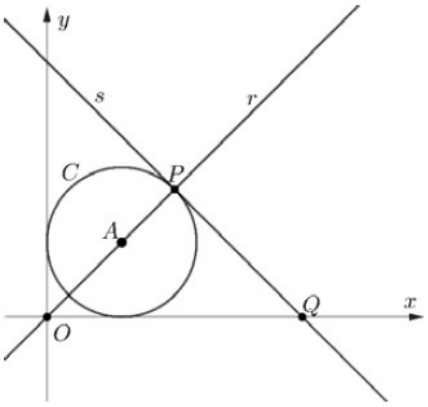
b) $\left(-1, \sqrt{3}\right)$ e $\left(-1, -\sqrt{3}\right)$

c) $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ e $\left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$

d) $\left(-\sqrt{3}, 1\right)$ e $\left(-\sqrt{3}, -1\right)$

e) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

21 - (UFPR/2024) A circunferência C na figura abaixo está centrada no ponto $A = (1, 1)$ e tangencia os eixos coordenados. A reta r passa pela origem O e pelo ponto A, intersectando a circunferência no ponto P, conforme indica a figura. A reta s é tangente à circunferência no ponto P e intersecta o eixo x no ponto Q. Assinale a alternativa que corresponde à abcissa do ponto Q.



a) $2\sqrt{2}$

b) $3\sqrt{2}-1$

c) $1+2\sqrt{2}$

d) $4\sqrt{2}-2$

e) $2+\sqrt{2}$

22 - (Famema SP/2022) A reta de equação $x + 2y + 1 = 0$ determina na circunferência $(x - 4)^2 + y^2 = 21$ uma corda de comprimento igual a

a) 8.

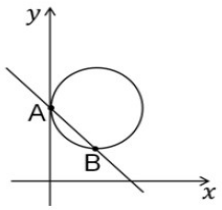
b) 7.

c) $6\sqrt{3}$.

d) $6\sqrt{2}$.

e) $4\sqrt{5}$.

23 - (UEG GO/2024) A imagem a seguir exibe os gráficos de $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$ e $y = -x + 3$ e os pontos A e B, interseções da reta com a circunferência. A distância do ponto médio do segmento AB ao centro da circunferência é



a) $\sqrt{5}$

b) $\sqrt{3}$

c) 1

d) $\sqrt{2}$

e) $\sqrt{7}$

24 - (Unit AL/2018) Uma reta r passa pelos pontos P(1, 2) e Q(5, –1). Se outra reta s for paralela a r e passar pelo ponto T(2, –1), então s irá interceptar o eixo das ordenadas no valor

a) $-\frac{3}{2}$
b) $-\frac{1}{2}$
c) 0
d) $\frac{1}{2}$
e) $\frac{3}{2}$

25 - (Uncisal AL/2018) Considere as retas de equações r : y = ax + b ; s : y = cx + d ; t : y = ex + f, tais que r intersecta os eixos coordenados em (3, 0) e (0, 6); s intersecta o eixo das abscissas em (3, 0); t intersecta o eixo das abscissas em (1, 0). Sabendo-se que r é perpendicular à reta t e que s e t são paralelas, pode-se concluir que (a + b + c + d + e + f) é igual a

a) 3.
b) –2.
c) 0.
d) 2.
e) –3.

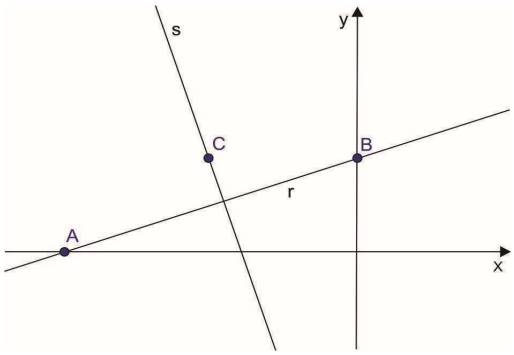
26 - (IFMT/2019) Para que a reta da equação 2x – y + 2 = 0 seja perpendicular à reta de equação kx + 2y +4 = 0 . O valor da constante K deve ser igual a:

a) –2
b) 1
c) –1
d) 2
e) 3

27 - (Famema SP/2020) Em um plano cartesiano, seja r a reta de equação x – 3y + 6 = 0. A reta s é perpendicular à reta r e delimita, com os eixos coordenados, no primeiro quadrante, um triângulo de área $\frac{128}{3}$. O ponto de interseção de r e s tem abscissa

a) $\frac{23}{5}$
b) $\frac{21}{5}$
c) $\frac{18}{5}$
d) $\frac{19}{5}$
e) $\frac{24}{5}$

28 - (Univag MT/2021) Em um plano cartesiano, a reta r passa pelos pontos A(–6, 0) e B(0, 2).



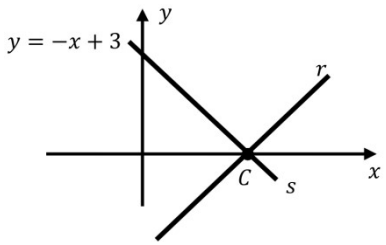
A equação da reta s, que é perpendicular à reta r e passa pelo ponto C(–3, 2), é:

a) 3x + y + 9 = 0.
b) x + 2y + 4 = 0.
c) 3x + y + 7 = 0.
d) x + 6y + 2 = 0.
e) 3x + 2y + 5 = 0.

29 - (UFPR/2022) No plano cartesiano, considere o triângulo ABC com A = (8, 6), B = (3, –4) e C = (–1, 2). Seja D o ponto de intersecção do segmento AB com o eixo x. Se r é a reta que passa por D, sendo essa reta paralela à reta que passa por B e C, assinale a alternativa que corresponde à equação de r.

a) 3x + 2y = 15.
b) 2x + 3y = 10.
c) 3x + 2y = 8.
d) 3x + 2y = 3.
e) 2x + 3y = 2.

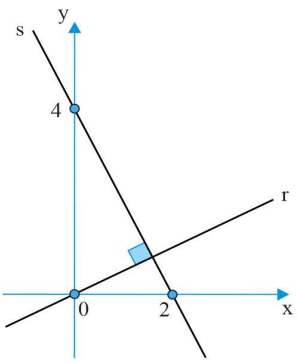
30 - (UEG GO/2022) Considere a reta s, definida pela equação $y = -x + 3$, e o ponto C, interseção das retas r e s com o eixo das abscissas, conforme imagem a seguir.



A equação da reta r, perpendicular à reta s no ponto C, é:

a) y = x + 3
b) y = – x – 3
c) y = x – 3
d) y = 3x – 3
e) $y = -\frac{1}{3}x + 3$

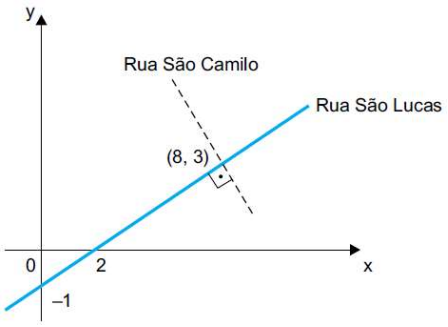
31 - (Famerp SP/2022) A figura mostra um par de retas perpendiculares, r e s, no plano cartesiano de eixos ortogonais.



A equação reduzida da reta r é

a) y = 0,5 x.
b) y = 0,8 x.
c) y = 1,2 x.
d) y = 0,25 x.
e) y = 2 x.

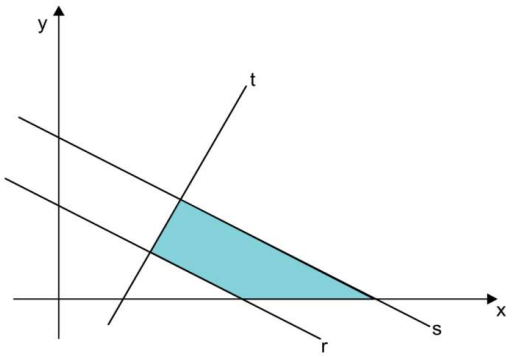
32 - (Famerp SP/2024) Cada local de uma cidade plana pode ser representado por um par ordenado (x, y) em um plano cartesiano desenhado sobre o mapa dessa cidade. A figura mostra esse plano cartesiano, com a indicação de duas ruas retilíneas que são perpendiculares no ponto de coordenadas (8, 3).



Mariana mora nessa cidade, no ponto em que a representação da Rua São Camilo no plano cartesiano intersecta o eixo x. Esse ponto tem coordenadas

a) (11, 0)
b) (10, 0)
c) $\left(\frac{17}{2}, 0\right)$
d) $\left(\frac{19}{2}, 0\right)$
e) $\left(\frac{21}{2}, 0\right)$

33 - (FMABC SP/2023) Considere, no plano cartesiano, as retas paralelas r e s de equações x + 2y – 2 = 0 e x + 2y – 6 = 0, respectivamente, e a reta t, perpendicular a r e s, de equação 2x – y – 2 = 0, conforme a figura.



A área do trapézio delimitado pelas retas r, s, t e o eixo x, destacado na figura, é

a) $\frac{24}{5}$
b) $\frac{26}{5}$
c) $\frac{22}{5}$
d) $\frac{19}{5}$
e) $\frac{16}{5}$

34 - (ITA SP/2017) Considere a reta *r*: $y = 2x$. Seja $A = (3, 3)$ o vértice de um quadrado *ABCD*, cuja diagonal $\overline{BD}$ está contida em *r*. A área deste quadrado é

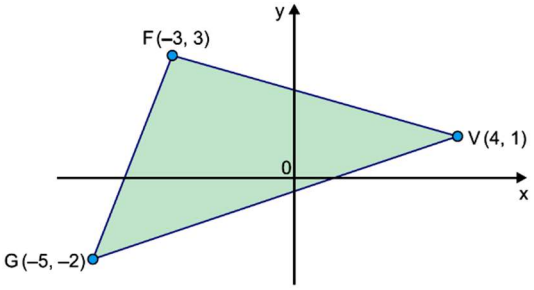
a) $\frac{9}{5}$.
b) $\frac{12}{5}$.
c) $\frac{18}{5}$.
d) $\frac{21}{5}$.
e) $\frac{24}{5}$.

35 - (UEG GO/2018) Um triângulo isósceles possui um vértice no ponto (3, 5) e a base sobre a reta y = –1. A altura desse triângulo é igual a

a) $2\sqrt{3}$
b) 4
c) $3\sqrt{2}$
d) 5

e) 6

36 - (FGV /2020) A figura indica o triângulo FGV, no plano cartesiano de eixos ortogonais, e as coordenadas dos seus vértices.



Seja H a projeção ortogonal de F sobre $\overline{GV}$ e M o ponto de $\overline{GV}$ tal que o segmento $\overline{FM}$ divida a área do triângulo FGV ao meio. A distância entre H e M é igual a

a) $2\sqrt{10}$

b) $\sqrt{10}$

c) $\frac{3\sqrt{10}}{4}$

d) $\frac{2\sqrt{10}}{3}$

e) $\frac{2\sqrt{10}}{5}$

37 - (Famerp SP/2020) Em um plano cartesiano, dois vértices de um triângulo equilátero estão sobre a reta de equação y = 2x – 2. O terceiro vértice desse triângulo está sobre a reta de equação y = 2x + 2.

A altura desse triângulo, na mesma unidade de medida dos eixos cartesianos ortogonais, é igual a

a) $\frac{4\sqrt{3}}{5}$

b) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

c) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

d) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

38 - (UEL PR/2020) Na exposição virtual “A Beleza da Matemática”, realizada no Museu do Amanhã, o belo é celebrado como simetria matemática, como exemplificado na imagem a seguir.



Imagem da exposição “A Beleza da Matemática”
Museu do Amanhã

No plano cartesiano, dois pontos distintos P e Q são simétricos em relação a uma reta r se as seguintes condições forem simultaneamente atendidas:

i) a distância de P a r é igual à distância de Q a r
ii) a reta que contém P e Q é perpendicular à reta r

Suponha que, no plano que contém a imagem da borboleta, o eixo de simetria r seja dado pela equação de reta y + x = 2. Se P = (–2, 0) é um ponto desse plano, assinale a alternativa que apresenta, corretamente, o ponto simétrico a P em relação à reta r.

a) (0,2)
b) (2,0)
c) (2,2)
d) (2,4)
e) (4,2)

TEXTO: 1 - Comum à questão: 39

Convenções: Consideramos o sistema de coordenadas cartesiano a menos que haja indicação contrária.

$N = \{1,2,3,...\}$: denota o conjunto dos números naturais.

R: denota o conjunto dos números reais.

C: denota o conjunto dos números complexos.

i: denota a unidade imaginária, $i^2 = -1$

$M_n(R)$: denota o conjunto das matrizes $n \times n$ de entradas reais.

$\overline{AB}$: denota o segmento de reta de extremidades nos pontos *A* e *B*.

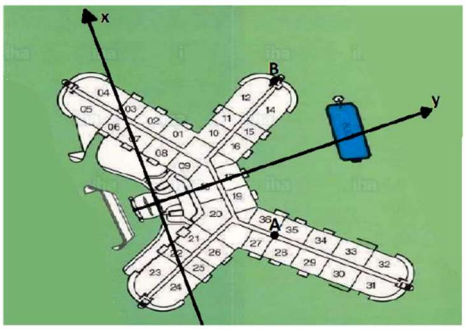
$A\hat{O}B$: denota o ângulo formado pelas semi-retas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, com vértice no ponto *O*.

$m\left(\overline{AB}\right)$: denota o comprimento do segmento $\overline{AB}$.

39 - (ITA SP/2022) Considere um triângulo de vértices *A*, *B* e *C*, retângulo em *B*. Seja *r* a reta determinada por *A* e *C* e seja *O* um ponto equidistante de *A* e *C* no mesmo lado que *B* com respeito a *r*. Sabendo que $m\left(\overline{AO}\right) = 85$, $m\left(\overline{AB}\right) = 10$ e $m\left(\overline{BC}\right) = 24$ temos que a distância de *O* a *r* é

a) 64.
b) 66.
c) 74.
d) 76.
e) 84.

40 - (UFMS/2018) Em um condomínio fechado da cidade de Dourados-MS, a portaria fica nas coordenadas (0, 0). O morador A, que se encontra nas coordenadas (–3, 4), e o morador B (5, 10) pretendem se encontrar no ponto médio entre suas localidades.



Qual é o valor numérico do ponto de encontro à portaria?

a) 5.
b) $5\sqrt{2}$.
c) 8.
d) 10.
e) $5\sqrt{5}$.

41 - (UFAL/2018)

Ponto médio de um segmento de reta

O ponto médio de um segmento de reta é o ponto que separa o segmento em duas partes com medidas iguais.

Disponível em: <http://brasilescola.uol.com.br/matematica/ponto-medio-um-segmento-reta.htm>.
Acesso em: 12 ago. 2017.

O ponto médio do segmento definido pelos pontos A(1, –4) e B(–3, –2) é o ponto

a) (2, –1).
b) (1, –4).
c) (–3, 8).
d) (–3, –2).
e) (–1, –3).

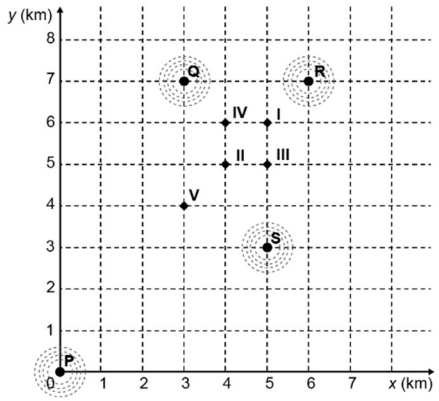
42 - (Udesc SC/2018) Sejam A(1, a), B(b, 3), C(4, 6) e D(1, 5) os vértices de um paralelogramo e $M\left(\frac{5}{2}, 4\right)$ o ponto médio da diagonal AC. O produto $a \cdot b$ é igual a:

a) 6
b) 2
c) 4
d) 5
e) 8

43 - (PUC RS/2018) No mapa de uma cidade, duas ruas são dadas pelas equações das retas y = x + 1 e y = – x + 2, que se interceptam no ponto B. Para organizar o cruzamento dessas ruas, planeja-se colocar uma rotatória em forma de um círculo C, com centro no ponto A(0,1) e raio igual à distância entre os pontos A e B. Nesse mapa, a área de C é

a) $\pi/2$
b) $\pi/4$
c) π
d) $5\pi/2$

44 - (ENEM MEC/2019) Um aplicativo de relacionamentos funciona da seguinte forma: o usuário cria um perfil com foto e informações pessoais, indica as características dos usuários com quem deseja estabelecer contato e determina um raio de abrangência a partir da sua localização. O aplicativo identifica as pessoas que se encaixam no perfil desejado e que estão a uma distância do usuário menor ou igual ao raio de abrangência. Caso dois usuários tenham perfis compatíveis e estejam numa região de abrangência comum a ambos, o aplicativo promove o contato entre os usuários, o que é chamado de *match*.
O usuário P define um raio de abrangência com medida de 3 km e busca ampliar a possibilidade de obter um *match* se deslocando para a região central da cidade, que concentra um maior número de usuários. O gráfico ilustra alguns bares que o usuário P costuma frequentar para ativar o aplicativo, indicados por I, II, III, IV e V. Sabe-se que os usuários Q, R e S, cujas posições estão descritas pelo gráfico, são compatíveis com o usuário P, e que estes definiram raios de abrangência respectivamente iguais a 3 km, 2 km e 5 km.



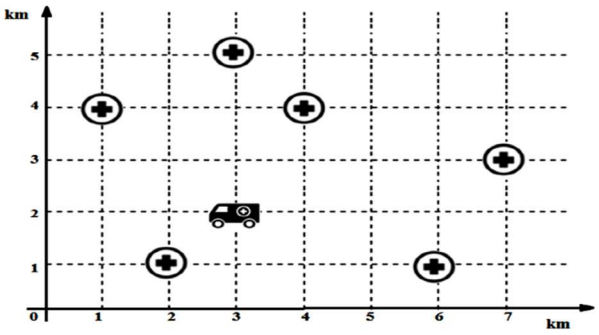
Com base no gráfico e nas afirmações anteriores, em qual bar o usuário P teria a possibilidade de um *match* com os usuários Q, R e S, simultaneamente?

a) I
b) II
c) III
d) IV
e) V

45 - (UFGD MS/2019) Dados os pontos A(2, –1), B(0,3) e C(–2,1), ao ligá-los dois a dois forma-se um triângulo. Sendo assim, pode se afirmar que se trata de um triângulo

a) isósceles cujos lados medem, em unidades de medidas, $2\sqrt{2}$, $2\sqrt{5}$ e $2\sqrt{5}$.
b) escaleno cujos lados medem, em unidades de medidas, $2\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$ e $2\sqrt{5}$.
c) equilátero cuja área corresponde a 12 u. a.
d) escaleno cuja área corresponde a 12 u. a.
e) equilátero cujos lados medem, em unidades de medidas, $2\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$ e $2\sqrt{2}$.

46 - (FCM MG/2020) Uma empresa de entrega de medicamentos repassa, diariamente, a seus motoristas o mapa da distância a ser percorrida para a entrega dos produtos em seis instituições hospitalares, como ilustrado na figura seguinte.



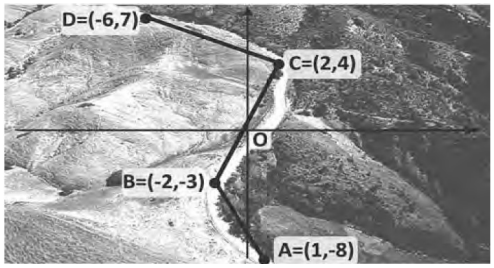
Seguindo orientações, o motorista deve:

- a partir do depósito, simbolicamente representado pelo desenho de um caminhão  , entregar as medicações em todos os hospitais simbolizados por  , retornando obrigatoriamente ao depósito após todas as entregas;
- no trajeto, dirigir-se sempre ao local mais próximo de sua localização, representado geometricamente pelo segmento de reta com início em sua posição atual e término no próximo destino.

Considerando-se que o motorista tenha recebido o mapa apresentado na figura anterior, ao retornar ao depósito, o hodômetro (instrumento que indica distâncias percorridas pelo veículo) acusará que esse motorista percorreu aproximadamente:

a) 19km.
b) 17km.
c) 14km.
d) 11km.

47 - (UEL PR/2021) Suponha que Cassi Jones, para se exibir e conquistar paixões, estima o comprimento de uma estrada que marca a fronteira entre dois países. Para isso, supõe que essa divisa esteja contida em um plano munido de um referencial de coordenadas cartesianas de origem O. Na sequência, ele escolhe quatro pontos A, B, C, D na fronteira, calcula suas coordenadas com base nesse sistema cartesiano e os conecta por três segmentos de reta de modo a criar a poligonal de vértices A, B, C, D, conforme imagem a seguir.



Sabendo que Cassi calcula o comprimento da poligonal para estimar o comprimento desejado, assinale a alternativa que apresenta o número obtido, corretamente, por ele.

a) 30
b) $3\sqrt{19}$
c) $\sqrt{122}+1+\sqrt{137}$
d) $\sqrt{82}+\sqrt{5}+\sqrt{173}$
e) $\sqrt{34}+\sqrt{65}+\sqrt{73}$

48 - (Fac. Medicina de Petrópolis RJ/2021) Os pontos colineares A, B e C estão, respectivamente, em Petrópolis, Teresópolis e Nova Friburgo como mostra o mapa a seguir. Sabe-se que a distância de B até C é o dobro da distância de A até B.

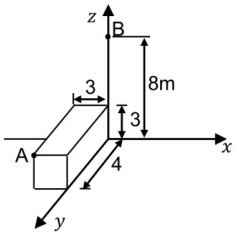


Em um certo sistema de coordenadas, cuja origem está no centro da cidade do Rio de Janeiro, esses pontos são dados por: A = (0,0 ; 4,0), B = (2,1 ; 4,7) e C = (x ; y).

Considerando esse contexto, o valor de x + y é

a) 12,4
b) 13,2
c) 14,0
d) 12,8
e) 13,6

49 - (UEG GO/2022) Dado um paralelepípedo de dimensões 3m × 3m × 4m, conforme figura, qual a distância do ponto A ao ponto B?



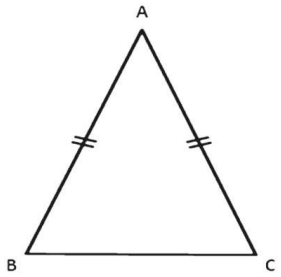
a) $2\sqrt{3}$ m
b) $2\sqrt{5}$ m

c) $3\sqrt{2}$ m

d) $4\sqrt{5}$ m

e) $5\sqrt{2}$ m

50 - (UNEB BA/2023)

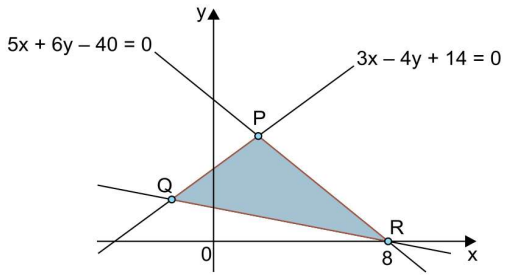


O triângulo ABC, cujas coordenadas dos seus vértices são os pares ordenados (1,3), (4,7) e (7,3), é isósceles.

A medida da altura e do perímetro desse triângulo são, respectivamente,

a) 3 e 12
b) 4 e 16
c) 5 e 11
d) 6 e 10
e) 7 e 17

51 - (Famerp SP/2023) A figura indica, no plano cartesiano, o triângulo PQR, as equações das retas $\overleftrightarrow{PR}$ e $\overleftrightarrow{PQ}$ e a intersecção das retas $\overleftrightarrow{PR}$ e $\overleftrightarrow{QR}$ no ponto R = (8, 0).



A medida do lado $\overline{PR}$ do triângulo PQR, em unidades de comprimento do plano cartesiano, é

a) $\sqrt{58}$

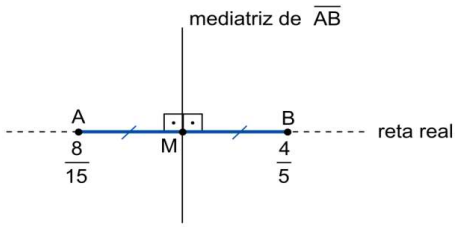
b) $\sqrt{59}$

c) $\sqrt{63}$

d) $\sqrt{62}$

e) $\sqrt{61}$

52 - (Famema SP/2023) A figura indica a posição dos pontos A e B sobre a reta dos números reais e a mediatriz de $\overline{AB}$, que intersecta a reta real no ponto M. Assim, temos que $\frac{8}{15}$ e $\frac{4}{5}$ são coordenadas, na reta real, dos pontos A e B, respectivamente.



Nessas condições, a coordenada do ponto M, na reta real, é

a) $\frac{4}{5}$
b) $\frac{2}{3}$
c) $\frac{5}{3}$
d) $\frac{3}{5}$
e) $\frac{4}{3}$

53 - (Unicamp SP/2024) Considere as funções $f(x) = 2x + c$ e $g(x) = 5 - 6x$, com $c > 0$. Sejam P e Q os pontos de interseção, com o eixo y, dos gráficos de $y = f(g(x))$ e $y = g(f(x))$, respectivamente.

Para que a origem seja o ponto médio do segmento PQ, qual deverá ser o valor de c?

a) 1.
b) 2.
c) 3.
d) 4.

54 - (UEG GO/2024) Dados os pontos, no plano cartesiano, A(7c, 4c) e B(c, 12c), em que c é um número positivo qualquer, a distância do ponto A ao B é

a) 8c
b) 10c
c) 12c
d) 14c
e) 16c

55 - (Famema SP/2024) Seja f:IR → IR, definida por $f(x) = x^2 - 2x - 24$. Considerando-se no plano cartesiano de eixos ortogonais os pontos que representam os intersectos do gráfico dessa função com o eixo x, a distância entre eles é igual a

a) 4,5.
b) 2.
c) 6.
d) 10.
e) 8,5.

Juros Simples

Juros Simples

Na matemática financeira, alguns termos são importantes para a compreensão do conteúdo. São eles:

- Capital (C): quantia aplicada.
- Tempo (t): período da aplicação.
- Juros (j): quantia recebida ao final da aplicação (compensação pelo empréstimo do dinheiro).
- Montante (M): quantia total recebida no final da aplicação (capital mais os juros).
- Taxa de juros (i): taxa de crescimento do capital $\left(i = \frac{j}{c}\right)$.

Observação: A taxa de juros i costuma ser indicada da seguinte maneira:

→ Ao dia (a.d.);
→ Ao mês (a.m.);
→ Ao ano (a.a.).

Os juros simples são os juros obtidos quando um capital C é investido por t unidades de tempo e a taxa de juros i por unidade de tempo é aplicada apenas sobre o capital inicial.

Portanto, se uma pessoa aplica na poupança 10 mil reais por um período de 6 meses, e essa poupança rende a uma taxa de juros de 1% a.m., ao final dos 6 meses essa pessoa receberá um montante de $R\$\ 10.600{,}00$.

Esse montante recebido pode ser encontrado da seguinte forma:

Primeiramente, sabemos que o valor aplicado foi de 10 mil reais, logo, o capital $C = 10000$.

Em seguida, temos que o valor aplicado ($C = 10000$) rende a uma taxa de juros de 1% a.m. por 6 meses, isto é:
$1\%\ de\ 10000 = 0{,}01\ .\ 10000 = 100$ reais de juros a cada mês.

Então, se a taxa de juros ($i = 1\%$) é sempre aplicada em cima do capital ($C = 10000$), ou seja, será sempre igual a 100 reais, e o valor ficou aplicado por 6 meses, ao final do sexto mês teremos os juros de:

$$j = 100 \cdot 6 = 600 \text{ reais.}$$

Assim, o montante recebido ao final da aplicação será a soma do capital ($C = 10000$) mais os juros ($j = 600$)

$$M = 10000 + 600 \Rightarrow M = 10600 \text{ reais.}$$

A partir desse exemplo é possível compreender os conceitos por trás dos juros simples e a construção de suas fórmulas.

As fórmulas de juros simples são:

a) **Juros**

$$j = C \cdot i \cdot t.$$

b) **Montante**

$$M = C + j \Rightarrow M = C + (C \cdot i \cdot t) \Rightarrow M = C \cdot (1 + i \cdot t).$$

Exemplo 1: **Um capital de $1200{,}00$ reais foi aplicado a juros simples a uma taxa de $2{,}1\%$ a.a. por 5 anos. Qual o montante obtido?**

Utilizando a expressão do montante $M = C(1 + i \cdot t)$, temos

$$M = 1200 \cdot (1 + 0{,}021 \cdot 5) \Rightarrow M = 1200 \cdot (1{,}105) \Rightarrow M = 1326{,}00 \text{ reais.}$$

O montante obtido é $1326{,}00$ reais.

Exemplo 2: **Após 60 meses com o dinheiro aplicado a juros simples, à uma taxa de $0{,}5\%$ a.m., Carla resgatou o montante de $40000{,}00$ reais. Qual o capital aplicado por Carla?**

Utilizando a expressão do montante $M = C(1 + i \cdot t)$, temos

$$40000 = C \cdot (1 + 0{,}005 \cdot 60) \Rightarrow 40000 = C \cdot 1{,}3 \Rightarrow C = 30769{,}23 \text{ reais.}$$

O capital aplicado por Carla é de $30769{,}23$ reais.

Exemplo 3: **Uma televisão de $42''$ é vendida à vista por $2500{,}00$ reais ou a prazo com uma entrada de $500{,}00$ mais uma parcela de $2200{,}00$ reais, após 2 meses. Qual a taxa mensal de juros simples do financiamento?**

Utilizando a expressão do montante $M = C(1 + i \cdot t)$, temos

$$2200 = 2000.(1 + i \cdot 2) \Rightarrow 1{,}1 = 1 + 2i \Rightarrow i = 0{,}05 = 5\%\ a.m.$$

Outra maneira de encontrar a taxa mensal do financiamento é calcular apenas os juros. Portanto, se a televisão custa $2500{,}00$ reais e será dada uma entrada de $500{,}00$ reais, o valor restante será de $2000{,}00$. No entanto, a parcela a ser paga é no valor de $2200{,}00$ reais, ou seja, os juros são $200{,}00$ reais. Assim:

Utilizando a expressão para o cálculo do juros $j = C \cdot i \cdot t$, temos

$$200 = 2000 \cdot i \cdot 2 \Rightarrow i = 0{,}05 = 5\%\ a.m.$$

A taxa mensal de juros do financiamento é de 5% a.m.

Exemplo 4: **Maria recebeu uma indenização no valor de $R\$\ 50000{,}00$ e pretende aplicar esse dinheiro em dois bancos diferentes (A e B). O banco A paga a juros simples à taxa de 3% a.a., e o banco B paga a juros simples à taxa de $1{,}5\%$ a.a. Sabendo que a aplicação no banco A terá duração de 2 anos e no banco B, de 4 anos, qual o valor investido em cada banco para que o montante seja igual nas duas aplicações?**

Dados:

Banco A
Capital $= C$
Taxa $= 3\%$ a.a.
Tempo $= 2$ anos

Banco B
Capital $= 50000 - C$
Taxa $= 1{,}5\%$ a.a.
Tempo 4 anos

Como os montantes devem ser iguais, isto é, $M_A = M_B$, logo

$$C_A \cdot (1 + i_A \cdot t_A) = C_B(1 + i_B \cdot t_B)$$

Substituindo os dados na expressão anterior, segue

$$C \cdot (1 + 0{,}03 \cdot 2) = (50000 - C) \cdot (1 + 0{,}015 \cdot 4) \Rightarrow C \cdot 1{,}06 = (50000 - C) \cdot 1{,}06$$
$$\Rightarrow 2{,}12C = 53000 \Rightarrow C = 25000\ reais$$

Logo, o valor aplicado no banco A (C) é 25000 reais e no banco B ($50000 - C$) é 25000 reais.

Exercícios

01 - (Unic MT/2017) Para atualizar os equipamentos de um laboratório, foi feito um empréstimo no valor de R$90000,00, à taxa de juros simples de10% ao mês, com vencimento para 180 dias.
Se o pagamento for antecipado em dois meses, pode-se estimar que haverá desconto e seu valor, em reais, será de

01. 3600,00
02. 5400,00
03. 9000,00
04. 14500,00
05. 18000,00

02 - (Encceja/2017) Um banco analisou o perfil de um cliente e ofereceu-lhe um empréstimo de R$ 10 000,00, podendo escolher uma das propostas a seguir:

I. Empréstimo com taxa de juros simples de 10% ao ano, a ser pago integralmente após 15 anos.
II. Empréstimo com taxa de juros simples de 11% ao ano, a ser pago integralmente após 16 anos.
III. Empréstimo com taxa de juros simples de 20% ao ano, a ser pago integralmente após 6 anos.
IV. Empréstimo com taxa de juros simples de 25% ao ano, a ser pago integralmente após 5 anos.

A proposta que gera o menor valor a pagar ao término do empréstimo é a

a) I.
b) II.
c) III.
d) IV.

03 - (Encceja/2017) Um computador é vendido por R$ 4 000,00 para pagamento à vista. Um cliente interessado em adquirir o produto recebeu, do vendedor da loja, quatro propostas de pagamento a prazo, nas quais serão cobrados juros simples de 2% ao mês.

• Proposta I – Entrada de 2 000,00 no ato da compra, mais 2 parcelas mensais de R$ 1 000,00 cada, acrescidas dos juros.
• Proposta II – Sem entrada, com 2 parcelas mensais de R$ 2 000,00 cada, acrescidas dos juros.
• Proposta III – Entrada de R$ 1 000,00, no ato da compra, mais 3 parcelas mensais de R$ 1 000,00 cada, acrescidas dos juros.
• Proposta IV – Sem entrada, com 4 parcelas mensais de R$ 1 000,00 cada, acrescidas dos juros.

O cliente deseja gastar o menor valor total possível na compra. Para alcançar esse objetivo, o cliente deverá optar pela proposta

a) I.
b) II.
c) III.
d) IV.

04 - (UPE/2017) Ana aplicou R$ 7 500 em um investimento bancário que rende juros simples de 5% ao mês. Qual será o saldo de sua aplicação após seis meses?

a) R$ 2 250
b) R$ 4 500
c) R$ 8 500
d) R$ 9 750
e) R$ 10 150

05 - (FGV /2017) Um capital de R$5 000,00 é aplicado a juros simples e taxa de juro de 2% ao mês. Cinco meses depois, outro capital de R$4 000,00 é aplicado também a juros simples à taxa de juro de 3,75% ao mês.

As aplicações são mantidas até que os montantes se igualem e isto ocorre após n meses da segunda aplicação. Podemos afirmar que n é

a) maior que 35.
b) par.
c) divisível por 11.
d) primo.
e) múltiplo de 7.

06 - (IFPI/2020) Um capital R$ 200,00 aplicado no sistema de juros simples, produziu um montante de R$ 220,00 após 8 meses de aplicação. Quanto foi a taxa de juros ao mês?

a) 2,2%
b) 1,5%
c) 1,25%
d) 1,0%
e) 0,8%

07 - (IFRS/2017) Duas lojas de roupas vendem calças jeans de mesma marca e modelo pelo mesmo preço, se pago à vista. Mas, se parcelado, a primeira cobra 60% de entrada e o restante para 30 dias, com 10% de juros no saldo remanescente. A segunda loja cobra 40% de entrada e o restante para 30 dias, com 8% de juros no saldo remanescente. Em qual das duas lojas é mais vantajoso se o cliente decidir comprar parcelado?

a) na primeira loja
b) na segunda loja

c) nas duas lojas comprar parcelado será o mesmo valor
d) na primeira loja paga-se mais juros
e) na segunda loja sempre vai pagar menos

08 - (ESPM RS/2019) João aplicou um capital de R$ 20 000,00 à taxa de juros simples de 2% ao mês. No mesmo dia, José aplicou R$ 15 000,00 à taxa de juros simples de 4% ao mês. O montante de José vai superar o de João a partir do:

a) 18º mês.
b) 20º mês.
c) 22º mês.
d) 25º mês.
e) 28º mês.

09 - (IFSC/2017) Analise as seguintes situações:

1. Seu João fez um empréstimo de R$ 1.000,00, no Banco A, a uma taxa de juros simples; após 4 meses, pagou um montante de R$1.320,00 e quitou sua dívida.
2. Dona Maria fez um empréstimo de R$ 1.200,00, no Banco B, a uma taxa de juros simples; após 5 meses, pagou um montante de R$ 1.800,00 e quitou a dívida.

Assinale a alternativa CORRETA.

A taxa mensal de juros simples cobrada pelo Banco A e pelo Banco B, respectivamente, é:

a) 8% a.m. e 10% a.m.
b) 18% a.m. e 13% a.m.
c) 6,4% a.m. e 12,5% a.m.
d) 13% a.m. e 18% a.m.
e) 10% a.m. e 8% a.m.

10 - (Encceja/2018) Um agricultor costuma tomar empréstimos de uma empresa financeira, sempre em valores de R$ 5 000,00 sob a modalidade de juros simples, para pagamento após seis meses em uma única parcela, à taxa de 2% ao bimestre.
Entretanto, por se encontrar em um momento com orçamento restrito, solicitou à empresa que o prazo para pagamento fosse ampliado em mais seis meses.
Por desejar manter o mesmo valor obtido com o empréstimo e o mesmo valor total a ser pago no final do prazo, esse agricultor deve solicitar à instituição financeira a aplicação de uma nova taxa de juros bimestral, visto que já é cliente antigo da instituição.

A nova taxa será

a) 1,0%
b) 1,5%
c) 3,0%
d) 4,0%

11 - (Encceja/2018) No dia 1º de setembro do ano passado, uma dona de casa tinha R$ 1 000,00 para serem aplicados em um banco que rende 1% ao mês a juros simples. Ela

havia decidido usar parte dessa quantia para comprar um fogão, tirando dessa quantia o quanto fosse necessário para efetuar a parcela de pagamento exigida. Há quatro formas de pagamento previstas para a compra desse fogão:

I. Uma parcela única de R$ 600,00 para pagamento à vista;
II. Uma entrada de R$ 400,00, paga no ato da compra, mais uma parcela de R$ 200,00, paga 30 dias após a compra;
III. Uma parcela única de R$ 605,00, paga 30 dias após a compra;
IV. Uma entrada de R$ 300,00, paga no ato da compra, mais uma parcela de R$ 305,00, paga 30 dias após a compra.

Lembre que $j = C\,i\,t$.

Qual das quatro formas de pagamento é a mais vantajosa financeiramente para essa dona de casa?

a) I
b) II
c) III
d) IV

12 - (Encceja/2018) No regime de juros simples, uma taxa anual de 48% é equivalente a uma taxa trimestral de 12%.

Assim, a mesma taxa anual corresponderia a uma taxa quadrimestral de

a) 4%
b) 13%
c) 16%
d) 32%

13 - (Encceja/2018) Cláudio precisa de R$ 1 000,00 e solicitou um empréstimo a um banco. Porém, ao verificar a proposta do banco, analisou que os juros seriam altos, pois ao final de 12 meses ele pagaria R$ 2 000,00. Conversando com seu amigo, este lhe propôs o seguinte acordo: emprestaria R$ 1 000,00 e, após 12 meses, Cláudio pagaria tudo. Nesse acordo, seria usado o regime de juros simples com a taxa de 2% ao mês.

Caso Cláudio aceite a proposta de empréstimo do amigo, em relação ao empréstimo oferecido pelo banco, ele

a) pagará R$ 880,00 a mais.
b) pagará R$ 1 880,00 a mais.
c) economizará R$ 760,00.
d) economizará R$ 1 760,00.

14 - (Encceja/2018) O preço à vista de um par de tênis na loja I é R$ 200,00. A forma de pagamento oferecida foi: uma entrada de R$ 100,00 mais uma parcela de R$ 125,00 no mês seguinte, em que os juros incidem sobre o valor da compra efetuada, mas ainda não pago.

O comprador não possuía o dinheiro para pagamento à vista e achou que o percentual de juros cobrado para pagamento parcelado era alto. Portanto, ele foi à loja II pesquisar o preço desse mesmo par de tênis, em duas parcelas, com o mesmo valor de entrada. Lembre que $j = C\,i\,t$.

Para que a loja II ofereça maior economia ao comprador em relação à loja I, a taxa percentual de juros simples da loja II deve ser, necessariamente, menor que

a) 11,1%
b) 12,5%
c) 20,0%
d) 25,0%

15 - (FGV /2018) A que taxa anual de juros um capital deve ser aplicado a juros simples, durante 20 meses, para que o montante seja igual a 130% do capital aplicado?

a) 17%
b) 19%
c) 18%
d) 18,5%
e) 17,5%

16 - (UPE/2018) Diante da crise que o país atravessa, uma financeira oferece empréstimos a servidores públicos cobrando apenas juro simples. Se uma pessoa retirar R$ 8 000,00 nessa financeira, à taxa de juro de 16% ao ano, quanto tempo levará para pagar um montante de R$ 8 320?

a) 2 meses
b) 3 meses
c) 4 meses
d) 5 meses
e) 6 meses

17 - (ENEM MEC/2018) Um rapaz possui um carro usado e deseja utilizá-lo como parte do pagamento na compra de um carro novo. Ele sabe que, mesmo assim, terá que financiar parte do valor da compra.
Depois de escolher o modelo desejado, o rapaz faz uma pesquisa sobre as condições de compra em três lojas diferentes. Em cada uma, é informado sobre o valor que a loja pagaria por seu carro usado, no caso de a compra ser feita na própria loja. Nas três lojas são cobrados juros simples sobre o valor a ser financiado, e a duração do financiamento é de um ano. O rapaz escolherá a loja em que o total, em real, a ser desembolsado será menor. O quadro resume o resultado da pesquisa.

Loja	Valor oferecido pelo carro usado (R$)	Valor do carro novo (R$)	Percentual de juros (%)
A	13 500,00	28 500,00	18 ao ano
B	13 000,00	27 000,00	20 ao ano
C	12 000,00	26 500,00	19 ao ano

A quantia a ser desembolsada pelo rapaz, em real, será

a) 14 000.
b) 15 000.
c) 16 800.
d) 17 255.
e) 17 700.

18 - (Fac. Santo Agostinho BA/2018) Devido aos gastos ocorridos em seu consultório, Alice decidiu fazer um empréstimo de R$ 15.000,00, a juros simples. A melhor proposta foi a de um banco que lhe cobrou uma taxa de 5% ao mês. Alice propôs ao banco pagar o valor total em uma única vez, ao final de dois meses. No dia do pagamento acordado, o banco resolveu conceder um desconto sobre o valor da dívida de Alice. Ao quitar a dívida, ela pagou um total de R$ 15.510,00. O desconto concedido pelo banco, em porcentagem, foi de

a) 7%.
b) 9%.
c) 5,5%.
d) 6%.

19 - (UEG GO/2018) Leonardo quer investir uma quantia em uma aplicação, a juros simples, que dobre o valor investido em cinco anos. A taxa mensal de juros que Leonardo precisa contratar nessa aplicação será de aproximadamente

a) 1,67%
b) 2,08%
c) 4,00%
d) 16,67%
e) 20,00%

20 - (FGV /2018) Uma impressora é vendida por R$600,00 em duas parcelas sem acréscimo, sendo a primeira de R300,00 no ato da compra e a outra, três meses depois. O preço para pagamento à vista é R$580,00.

No pagamento em duas parcelas, a taxa mensal de juros simples utilizada é de, aproximadamente:

a) 2,65%
b) 1,96%
c) 2,38%
d) 2,49%
e) 2,15%

21 - (Unicamp SP/2018) Dois anos atrás certo carro valia R$ 50.000,00 e atualmente vale R$ 32.000,00. Supondo que o valor do carro decresça a uma taxa anual constante, daqui a um ano o valor do carro será igual a

a) R$ 25.600,00.
b) R$ 24.400,00.
c) R$ 23.000,00.

d) R$ 18.000,00.

22 - (Fac. Israelita de C. da Saúde Albert Einstein SP/2018) Um produto foi comprado em 2 parcelas, a primeira à vista e a segunda após 3 meses, de maneira que, sobre o saldo devedor, incidiram juros simples de 2% ao mês. Se o valor das 2 parcelas foi o mesmo, em relação ao preço do produto à vista, cada parcela corresponde à

a) $\frac{51}{101}$

b) $\frac{53}{103}$

c) $\frac{55}{105}$

d) $\frac{57}{107}$

23 - (Encceja/2019) Um novo aparelho celular foi lançado por R$ 750,00 para pagamento à vista. A Loja 1 oferece esse aparelho com o seguinte plano de financiamento:
Loja 1: Entrada de R$ 550,00 paga no ato da compra, sendo o restante pago em parcela única, 2 meses após a compra, com taxa de juros simples de 2,50% ao mês.
Uma segunda loja também decide comercializar esse aparelho, oferecendo um plano no mesmo formato do que é ofertado pela Loja 1: uma entrada de R$ 250,00, paga no ato da compra, e o restante a ser pago em parcela única, 2 meses após a compra, sujeita a uma taxa mensal de juros simples.

Para que o plano de financiamento dessa segunda loja resulte num desembolso total igual ao que o cliente teria ao comprar esse aparelho financiado na Loja 1, a segunda loja deve propor, em seu financiamento, uma taxa mensal de juros simples igual a

a) 1,00%
b) 1,14%
c) 2,50%
d) 6,25%

24 - (Encceja/2019) Um casal necessita de R$ 40 000,00 para reformar seu apartamento. Eles dispõem somente de R$ 32 000,00 e decidem investir todo esse dinheiro para completar o valor necessário para a reforma. Após pesquisar, encontram em um banco quatro planos de investimentos diferentes, todos com taxas em juros simples, conforme indicado:

Plano I: 1,2% ao mês;
Plano II: 2,5% ao bimestre;
Plano III: 4,1% ao trimestre;
Plano IV: 9,8% ao ano.

Observando que a capitalização ocorrerá no fechamento do período de cada plano, o casal pretende optar por aquele em que o valor necessário para a reforma, cujo custo será mantido inalterado, seja obtido na menor quantidade possível de meses.

Qual plano de investimentos o casal deverá escolher?

a) I
b) II
c) III
d) IV

25 - (UniFTC BA/2019) Um médico resolveu aplicar determinada quantia a juros simples de 6% ao mês, durante 5 meses e, em seguida, o montante foi aplicado durante mais 5 meses, a juros simples de 4% ao mês. No final dos 10 meses, o novo montante foi de R$ 2340,00.

O valor da quantia aplicada inicialmente foi de

01. R$ 234,00
02. R$ 975,00
03. R$ 1 500,00
04. R$ 1 720,00
05. R$ 2 127,00

26 - (IFMS/2019) A turma do 7º semestre do Instituto Federal pretende fazer uma linda festa de formatura. Na ocasião da festa junina que ocorreu no mês de junho de 2018, os formandos trabalharam e conseguiram arrecadar R$ 5.000,00. Em julho pagaram R$ 1.800,00 referente à primeira parcela do aluguel do salão de festas, mais R$ 1.600 para decoração. O restante do dinheiro aplicaram e obtiveram R$ 600,00 de juros com a aplicação. Com base nestas informações, é correto afirmar que

a) a aplicação rendeu 37,5% de juros em relação ao capital aplicado.
b) a aplicação rendeu juros de aproximadamente 18% do valor aplicado.
c) o valor de R$ 600,00 corresponde a uma taxa de juros mensal de 3,75%.
d) o valor referente aos gastos representa o dobro da quantia aplicada.
e) os juros arrecadados correspondem a 12% do valor aplicado.

27 - (UFPR/2019) Alexandre pegou dois empréstimos com seus familiares, totalizando R$ 20.000,00. Ele combinou pagar juros simples de 8% ao ano em um dos empréstimos e de 5% ao ano no outro. Após um ano nada foi pago, e por isso sua dívida aumentou de R$ 20.000,00 para R$ 21.405,00. Quanto foi tomado emprestado de cada familiar?

a) R$ 2.600,00 e R$ 17.400,00.
b) R$ 4.000,00 e R$ 16.000,00.
c) R$ 6.500,00 e R$ 13.500,00.
d) R$ 7.700,00 e R$ 12.300,00.
e) R$ 8.200,00 e R$ 11.800,00.

28 - (IFPI/2020) João devia, a um Banco, R$ 2500,00. Como não conseguiu pagar, em quatro meses essa dívida aumentou para R$ 2620,00. Qual a taxa de juros simples cobrada mensalmente pelo Banco?

a) 1,2%
b) 1,4%

c) 1,6%
d) 1,8%
e) 2,0%

29 - (IFPI/2020) Um investidor triplicou seu capital numa aplicação no prazo de 1 ano. Qual a taxa anual de juros no período da operação?

a) 30 %
b) 50%
c) 100%
d) 200%
e) 300%

30 - (IFPI/2020) Um investidor fez uma aplicação de R$ 22000,00 durante um ano com 5% ao trimestre. Quais os juros simples dessa aplicação?

a) R$ 4400,00
b) R$ 3300,00
c) R$ 2800,00
d) R$ 2100,00
e) R$ 1100,00

31 - (UEG GO/2020) Um banco oferece um investimento a juros simples, em que o cliente aplica R$ 10.000,00 e após seis anos recebe R$ 15.040,00. A taxa de juros mensal desse investimento é de:

a) 0,7%
b) 2,1%
c) 4,2%
d) 8,4%
e) 50,4%

32 - (UNEB BA/2023) Uma pessoa verificou que no extrato da fatura do seu cartão de crédito há informações, além da data de vencimento, sobre os juros a serem cobrados caso haja atraso no pagamento da fatura. Suponha que seriam cobrados, além do valor da fatura, 10% de multa e mais 11.20% de juros simples a cada mês de atraso considerando-se o valor inicial da dívida.
Nessas condições, se em um determinado período a fatura ficou atrasada durante 5 meses e o valor pago foi de 1500 reais, o valor da conta anterior a essa multa e aos juros, por mês de atraso, em reais, foi aproximadamente,

a) 300
b) 596
c) 904
d) 955
e) 1238

33 - (UEG GO/2024) Realizou-se um empréstimo de R$ 2.000,00 para serem pagos considerando o regime de juros simples, com taxa de juros igual a 5% a.m. (ao mês) e

valor proporcional para períodos menores que um mês. O tomador pagou R$ 1.000,00 quando completados dois meses do empréstimo e liquidou a dívida quando se completaram quatro meses e quinze dias da data da realização do empréstimo. Qual o valor do último pagamento realizado?

a) R$ 1.300,00
b) R$ 1.350,00
c) R$ 1.400,00
d) R$ 1.450,00
e) R$ 1.500,00

34 - (Uncisal AL/2018) Enquanto no mundo todo, desde a crise financeira de 2008, as taxas estão excepcionalmente baixas, o Brasil é uma exceção. A taxa de inflação continua alta em nosso país, mas já foi ainda pior, chegando a atingir 25% ao mês. Nessa época, a taxa de inflação anual no Brasil foi de (considere $(1,25)^{12} = 14,55$)

a) 1 450 %.
b) 1 355 %.
c) 1 350 %.
d) 145,5 %.
e) 135,5 %.

35 - (FPS PE/2019) Para construir uma clínica, um médico contraiu um empréstimo de um milhão e meio de reais que será quitado em duas parcelas: a primeira, um ano depois do empréstimo, e a segunda, três anos depois do empréstimo. Os juros de capitalização do empréstimo serão cumulativos (compostos) de 8% ao ano. Se a primeira parcela será de R$ 540.000,00, qual será o valor da segunda? Indique o valor mais próximo do valor obtido.

a) 1,261 milhão de reais
b) 1,259 milhão de reais
c) 1,260 milhão de reais
d) 1,257 milhão de reais
e) 1,258 milhão de reais

Juros Compostos

Juros Compostos

No regime de juros compostos, os juros são calculados ao final de cada período, ou seja, é formado um montante sobre o qual se calculam os juros do período seguinte, até que o tempo de aplicação seja esgotado (juros sobre juros).

Com base nisso, considere um capital C, em regime de juros compostos, aplicado a uma taxa i ao período, pelo tempo de t períodos:

1° período:
Início (capital): C
Juros: $i \cdot C$
Fim (montante): M_1

Logo, $M_1 = C + C \cdot i \Rightarrow M_1 = C \cdot (1 + i)$.

2° período:
Início (capital):M_1
Juros: $i \cdot M_1$
Fim (montante): M_2

Assim, $M_2 = M_1 + M_1 \cdot i$, utilizando a expressão obtida para o montante M_1 temos

$$M_2 = M_1 \cdot (1 + i) \Rightarrow M_2 = [C \cdot (1 + i)] \cdot (1 + i) \Rightarrow M_2 = C \cdot (1 + i)^2.$$

3° período:
Início (capital):M_2
Juros: $i \cdot M_2$
Fim (montante): M_3

Assim, $M_3 = M_2 + M_2 \cdot i$, utilizando a expressão obtida para o montante M_2, temos

$$M_3 = M_2 \cdot (1 + i) \Rightarrow M_3 = [C \cdot (1 + i)^2] \cdot (1 + i) \Rightarrow M_3 = C \cdot (1 + i)^3.$$

A partir da análise desses três períodos é possível concluir, de maneira indutiva, que a fórmula do montante é

$$M = C \cdot (1 + i)^t,$$

sendo t o tempo (número de períodos).

Desse modo, se uma pessoa investiu $R\$\ 1000{,}00$, a juros compostos, à taxa de $1{,}5\%$ a.m., ao final de 5 meses, qual será o montante?

Para esse exemplo, temos os seguintes dados:
Capital: $1000{,}00$ reais
Taxa: $1{,}5\%$ a.m.
Tempo: 5 meses

Portanto, aplicando a fórmula de juros compostos $M = C \cdot (1 + i)^t$, encontraremos o montante:

$$M = 1000 \cdot (1 + 0{,}015)^5 \Rightarrow M = 1000 \cdot (1{,}015)^5 \Rightarrow M = 1077{,}28 \text{ reais.}$$

Exemplo 1: **Carlos aplicou $R\$\,4000,00$ na poupança por um período de 24 meses. Sabendo que a aplicação foi feita a juros compostos e que a taxa de juros é de $0,8\%$ a.a., qual o montante obtido por Carlos ao final da aplicação? Considere $(1,008)^2 = 1,016$.**

Utilizando a expressão $M = C \cdot (1+i)^t$ para o cálculo do montante, temos

$$M = 4000 \cdot (1+0{,}008)^2 \Rightarrow M = 4000 \cdot (1{,}008)^2 \Rightarrow M = 4064 \text{ reais.}$$

Carlos obteve o montante de $4064{,}00$ reais.

Exemplo 2: **Rita pretende fazer uma aplicação a juros compostos durante 3 meses e à taxa de 2% a.m. Qual deve ser o valor aplicado por Rita para que ela obtenha o montante de $6000,00$ reais?**

Utilizando a expressão $M = C \cdot (1+i)^t$ para o cálculo do montante, temos

$$6000 = C \cdot (1+0{,}02)^3 \Rightarrow 6000 = C \cdot (1{,}02)^3 \Rightarrow C = 5653{,}97 \text{ reais.}$$

Rita deve aplicar o valor de $5653{,}97$ reais.

Exemplo 3: **Catarina aplicou $1200,00$ reais, a juros compostos, durante 4 meses e obteve um montante de $R\$\,1756,92$. Qual a taxa mensal de juros dessa aplicação?**

Utilizando a expressão $M = C \cdot (1+i)^t$ para o cálculo do montante, temos

$$1756{,}92 = 1200 \cdot (1+i)^4 \Rightarrow 1{,}4641 = (1+i)^4 \Rightarrow 1{,}4641 = [(1+i)^2]^2$$
$$\Rightarrow 1{,}21 = (1+i)^2 \Rightarrow 1{,}1 = 1+i \Rightarrow i = 0{,}1 = 10\%\ a.m.$$

A taxa mensal de juros dessa aplicação é de 10% a.m.

Exemplo 4: **Um banco X oferece as seguintes opções de investimento:**

- **Investimento 1: Aplicação durante 2 anos à taxa de $1{,}5\%$ a.a.**
- **Investimento 2: Aplicação durante 1 ano à taxa de 5% a.a.**

Eduardo pretende aplicar $R\$\,3000,00$. Sabendo que, caso decida pelo investimento 1, resgatará o valor total no final da aplicação e, caso decida pelo investimento 2, terá que pagar uma taxa de $R\$\,150,00$ ao final da aplicação. Qual o investimento mais rentável para Eduardo?

Investimento 1:
Utilizando a expressão $M = C \cdot (1+i)^t$ para o cálculo do montante para o investimento 1, temos

$$M = 3000 \cdot (1+0{,}015)^2 \Rightarrow M = 3000 \cdot (1{,}015)^2 \Rightarrow M = 3090{,}00 \text{ reais.}$$

Logo, o montante é de R$ $3090{,}00$ no investimento 1.

Investimento 2:
Utilizando a expressão $M = C \cdot (1+i)^t$ para o cálculo do montante para o investimento 2, temos

$$M = 3000.(1+0{,}05)^1 \Rightarrow M = 3000\,.\,1{,}05 \Rightarrow M = 3150{,}00\ reais\,.$$

Logo, o montante é de R$ $3150{,}00$ no investimento 2.

Montante recebido por Eduardo ao final da aplicação: $3150{,}00 - 150{,}00$ **(taxa)** $=$ $3000{,}00$ **reais.**

Logo, o investimento mais rentável para Eduardo é o investimento 1**.**

Exercícios

01 - (IFSC/2017) Segundo dados do IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística), o rendimento médio mensal das famílias catarinenses é R$ 1368,00.

Considerando-se que uma família pegou um empréstimo no valor de 30% de sua renda média mensal e vai pagar este empréstimo a uma taxa de juros compostos de 2% ao mês, responda:

A) Quanto essa família pegou emprestado?
B) Qual o valor que a família irá pagar (montante final) se saldar essa dívida em 2 meses?

Assinale a alternativa CORRETA, que contém as respostas das questões acima.

a) Pegou emprestado R$ 407,40 e pagará, ao final de 2 meses, R$ 423,86.
b) Pegou emprestado R$ 410,40 e pagará, ao final de 2 meses, R$ 425,94.
c) Pegou emprestado R$ 409,40 e pagará, ao final de 2 meses, R$ 424,90.
d) Pegou emprestado R$ 409,40 e pagará, ao final de 2 meses, R$ 425,94.
e) Pegou emprestado R$ 410,40 e pagará, ao final de 2 meses, R$ 426,98.

02 - (Encceja/2018) Um taxista pretendia trocar seu veículo de trabalho por um novo. Ele possuía R$ 15 000,00 em uma aplicação feita 15 meses atrás, com taxa fixa de juros de 3,0% ao mês. O carro que pretendia comprar custava R$ 25 000,00, mas o vendedor lhe ofereceu um desconto de 15%, caso o pagamento fosse feito à vista, e ele aceitou a proposta.

Com que saldo ficou o taxista após efetuar a compra do carro? Considere que $(1{,}03)^{15} = 1{,}558$.

a) R$ 250,00
b) R$ 500,00
c) R$ 1 630,00
d) R$ 2 120,00

03 - (ENEM MEC/2018) Um contrato de empréstimo prevê que quando uma parcela é paga de forma antecipada, conceder-se-á uma redução de juros de acordo com o período de antecipação. Nesse caso, paga-se o valor presente, que é o valor, naquele momento, de uma quantia que deveria ser paga em uma data futura. Um valor presente P submetido a juros compostos com taxa i, por um período de tempo n, produz um valor futuro V determinado pela fórmula

$$V = P \cdot (1 + i)^n$$

Em um contrato de empréstimo com sessenta parcelas fixas mensais, de R$ 820,00, a uma taxa de juros de 1,32% ao mês, junto com a trigésima parcela será paga

antecipadamente uma outra parcela, desde que o desconto seja superior a 25% do valor da parcela.

Utilize 0,2877 como aproximação para $\ln\left(\frac{4}{3}\right)$ e 0,0131 como aproximação para ln (1,0132).

A primeira das parcelas que poderá ser antecipada junto com a 30ª é a

a) 56ª
b) 55ª
c) 52ª
d) 51ª
e) 45ª

04 - (UFU MG/2018) Um comerciante está negociando o valor V da venda à vista de uma mercadoria que foi adquirida com seu fornecedor um mês antes por R$1000,00 com 4 meses de prazo para pagamento (sem pagar juros). Sabe-se que o comerciante aplica esse valor V à taxa de 2% de juros (compostos) ao mês para viabilizar o pagamento futuro da mercadoria.

Para que a atualização do valor associado à venda dessa mercadoria forneça, na data do pagamento do fornecedor, um lucro líquido de R$200,00, a venda à vista deve ser de

Obs.: use a aproximação 1,0612 para $(1,02)^3$ e, ao expressar um valor monetário, faça o arredondamento na segunda casa decimal, considerando unidades inteiras de centavos.
a) R$942,33.
b) R$1.130,80.
c) R$1.232,89.
d) R$1.108,62.

05 - (UESB BA/2018) Uma pessoa possui determinada quantia aplicada a juros compostos de 1% ao mês, da qual, em meses alternados, ela retira R$100,00 e doa a uma ONG.

Sabendo-se que, no início de determinado mês, a quantia aplicada era de R$10000,00 e, no final daquele mês, ela fez a doação, pode-se concluir que a quantia aplicada, após 3 meses, era igual a

01. R$10101,00
02. R$10110,00
03. R$10200,00
04. R$10201,00
05. R$10210,00

06 - (IBMEC SP Insper/2018) Gabriel aplicou R$ 80.000,00 à taxa de juros compostos de 1% ao mês, e aplicou outra quantia de dinheiro à taxa de juros compostos de 1,1% ao mês. Ao final de dez meses, Gabriel resgatou as duas aplicações, obtendo R$ 200.000,00. O cálculo correto do valor monetário, em reais, aplicado por Gabriel à maior das taxas de juros pode ser obtido corretamente por meio da conta:

a) $\frac{200000 - 80000 \cdot 1{,}001^{10}}{1{,}0011^{10}}$

b) $120000 \cdot \left(\frac{1{,}001}{1{,}0011}\right)^{10}$

c) $120000 \cdot \left(\frac{1{,}01}{1{,}011}\right)^{10}$

d) $\frac{20 - 8 \cdot 1{,}01^{10}}{1{,}011^{6}}$

e) $\frac{200000 - 80000 \cdot 1{,}01^{10}}{1{,}011^{10}}$

07 - (UCB DF/2018) Considere que uma aplicação rende 1% ao mês. Sabendo que $1{,}01^2 \approx 1{,}020$ e que $1{,}01^5 \approx 1{,}051$, depois de 10 meses, os juros totais acumulados são, aproximadamente,

a) 10,46%.
b) 10,71%.
c) 10,05%.
d) 10,02%.
e) 10,00%.

08 - (IFRS/2018) José Ricardo fez um empréstimo em seu banco no valor de R$ 1000,00. Ele conseguiu negociar esse empréstimo a uma taxa de juros compostos de 1,5% ao mês, pagando o valor da dívida ao final de um ano, com a opção de pagar o saldo devedor antes do final dos 12 meses.

Analise as afirmações abaixo.

I. O saldo devedor, após um mês, será de R$ 1015,00.
II. O saldo devedor, ao final de um ano, será de R$ 1180,00.
III. O saldo devedor, ao final de um ano, será superior a R$ 1180,00.
IV. Para calcular o saldo da sua dívida (M) após t meses, ele poderá usar a função com a seguinte lei de formação $M(t) = 1000 \cdot (1{,}015)^t$.
V. Para calcular o saldo da sua dívida (M) após t meses, ele poderá usar a função com a seguinte lei de formação $M(t) = 1000 + 15t$.

Estão corretas apenas

a) I e II.
b) I e IV.
c) III e IV.
d) I, II e V.
e) I, III e IV.

09 - (FMABC SP/2018) Para receber 40,5% de juros, na modalidade de juros compostos, em 3 meses de aplicação financeira com o mesmo juro nominal mensal, é necessário que, em cada mês, esse juro mensal seja de, aproximadamente,

a) 9%.
b) 13%.
c) 12%.
d) 10%.
e) 11%.

10 - (IBMEC SP Insper/2018) Mateus aplicou o capital C_0 à taxa de juros compostos de 1% em regime de capitalização mensal. Ao final do 12º mês, o montante total de capital na aplicação era igual a C_{12}. Se Mateus pretende resgatar seu dinheiro apenas ao final do 18º mês da aplicação, nessa ocasião ele resgatará um valor, descrito em função de C_0 e C_{12}, igual a

a) $C_0 \cdot \sqrt[3]{C_0 \cdot C_{12}}$
b) $\sqrt{C_0 \cdot C_{12}}$
c) $\frac{C_{12}}{C_0} \cdot \sqrt{C_0 \cdot C_{12}}$
d) $C_0 \cdot \sqrt{C_0 \cdot C_{12}}$
e) $\frac{C_{12}}{C_0} \cdot \sqrt{\frac{C_{12}}{C_0}}$

11 - (Uncisal AL/2018) Enquanto no mundo todo, desde a crise financeira de 2008, as taxas estão excepcionalmente baixas, o Brasil é uma exceção. A taxa de inflação continua alta em nosso país, mas já foi ainda pior, chegando a atingir 25% ao mês. Nessa época, a taxa de inflação anual no Brasil foi de (considere $(1{,}25)^{12} = 14{,}55$)

a) 1 450 %.
b) 1 355 %.
c) 1 350 %.
d) 145,5 %.
e) 135,5 %.

12 - (Fuvest SP/2018) Maria quer comprar uma TV que está sendo vendida por R$ 1.500,00 à vista ou em 3 parcelas mensais sem juros de R$ 500,00. O dinheiro que Maria reservou para essa compra não é suficiente para pagar à vista, mas descobriu que o banco oferece uma aplicação financeira que rende 1% ao mês. Após fazer os cálculos, Maria concluiu que, se pagar a primeira parcela e, no mesmo dia, aplicar a quantia restante, conseguirá pagar as duas parcelas que faltam sem ter que colocar nem tirar um centavo sequer. Quanto Maria reservou para essa compra, em reais?

a) 1.450,20
b) 1.480,20
c) 1.485,20
d) 1.495,20
e) 1.490,20

13 - (USF SP/2019) No dia 1.º de dezembro de 2010, o governante de uma cidade precisou contratar um empréstimo de R$ 3 200 000 para pagar o décimo terceiro salário dos servidores públicos municipais. A taxa de juros compostos utilizada pelo banco foi 10% ao ano. Por problemas financeiros, nenhuma parcela da dívida foi honrada. Após um período de tempo, foi pago o valor de R$ 6 400 000, quitando a dívida. O ano de pagamento da dívida foi
Dado: log 2 = 0,3 e log 11 = 1,04.

a) 2015.
b) 2016.
c) 2017.
d) 2018.
e) 2019.

14 - (IFPR/2019) Em Matemática Financeira, o montante M produzido por um capital C, aplicado a uma taxa unitária i de juros compostos durante o tempo t, é calculado pela relação $M = C(1 + i)^t$. Dessa forma, sabendo que log 2 ≈ 0,30 e log 3 ≈ 0,48, se emprestarmos um capital de R$ 1000,00 à taxa de 8% ao mês, o prazo aproximado em que receberemos um montante de R$ 6000,00 será de:

a) 1 ano e meio.
b) 19,5 meses.
c) 20,8 meses.
d) 2 anos.

15 - (FGV /2019) Um empréstimo de R$200 000,00 deve ser pago em duas parcelas anuais, daqui a um e a dois anos, sendo a segunda o dobro da primeira. Sabendo que, nos empréstimos, são cobrados juros compostos à taxa de 20% ao ano, o total de juros a serem pagos é:

a) R$85 000,00
b) R$90 000,00
c) R$70 000,00
d) R$75 000,00
e) R$80 000,00

16 - (FGV /2019) Ao depositar x reais, ao final de cada ano, em uma aplicação que rende juros compostos à taxa de 20% ao ano, um investidor consegue obter, logo após o enésimo depósito, um montante M dado pela fórmula $M = x\left[\frac{(1,2)^n - 1}{0,2}\right]$.
Se x = 40 000, qual o valor mínimo de n de modo que o montante seja superior a R$1 800 000,00?

a) 15
b) 12
c) 11
d) 13
e) 14

Para resolver, utilize a tabela abaixo:

Para resolver, utilize a tabela abaixo:

x	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
$\log x$	0	0,08	0,15	0,20	0,26	0,30

17 - (ENEM MEC/2019) Uma pessoa fez um depósito inicial de R$ 200,00 em um fundo de Investimentos que possui rendimento constante sob juros compostos de 5% ao mês. Esse Fundo possui cinco planos de carência (tempo mínimo necessário de rendimento do Fundo sem movimentação do cliente). Os planos são:

- Plano A: carência de 10 meses;
- Plano B: carência de 15 meses;
- Plano C: carência de 20 meses;
- Plano D: carência de 28 meses;
- Plano E: carência de 40 meses.

O objetivo dessa pessoa é deixar essa aplicação rendendo até que o valor inicialmente aplicado duplique, quando somado aos juros do fundo. Considere as aproximações: log 2 = 0,30 e log 1,05 = 0,02.

Para que essa pessoa atinja seu objetivo apenas no período de carência, mas com a menor carência possível, deverá optar pelo plano

a) A.
b) B.
c) C.
d) D.
e) E.

18 - (ENEM MEC/2019) Uma pessoa se interessou em adquirir um produto anunciado em uma loja. Negociou com o gerente e conseguiu comprá-lo a uma taxa de juros compostos de 1% ao mês. O primeiro pagamento será um mês após a aquisição do produto, e no valor de R$ 202,00. O segundo pagamento será efetuado um mês após o primeiro, e terá o valor de R$ 204,02. Para concretizar a compra, o gerente emitirá uma nota fiscal com o valor do produto à vista negociado com o cliente, correspondendo ao financiamento aprovado.

O valor à vista, em real, que deverá constar na nota fiscal é de

a) 398,02.
b) 400,00.
c) 401,94.
d) 404,00.
e) 406,02.

TEXTO: 1 - Comum à questão: 19

Um advogado oferece duas possibilidades de contrato de remuneração dos seus serviços para seus clientes:

I. 15% do valor da causa, caso a decisão da justiça seja em favor do cliente, ou R$ 10.000,00 se a decisão for contrária ao cliente. Em ambos os casos, o pagamento deve ser feito na data do julgamento.

II. Honorários mensais de R$ 1.900,00, reajustados à taxa de 2% ao mês, até a data do julgamento.

19 - (IBMEC SP Insper/2019) Considere que um cliente tenha escolhido a opção II e que a causa tenha durado 6 meses. Nessas condições o cliente terá pago ao advogado um total de

a) R$ 11.840,00.
b) R$ 12.280,00.
c) R$ 11.970,00.
d) R$ 12.120,00.
e) R$ 11.250,00.

20 - (UNITAU SP/2019) Com o objetivo de investir em equipamentos, a diretoria de um hospital fez um empréstimo bancário de R$ 700.000,00 para pagamento em 3 parcelas anuais, sendo a primeira daqui a 1 ano. Na negociação, ficou acertada a cobrança de juros compostos a uma taxa de 30% ao ano sobre o saldo remanescente, e o valor das parcelas de acordo com a disponibilidade de caixa do hospital. Sabendo-se que a primeira parcela foi de R$ 320.000,00 e que a terceira foi de R$ 503.100,00, é CORRETO afirmar que o valor da segunda parcela foi igual a

a) R$ 346.000,00
b) R$ 360.000,00
c) R$ 380.000,00
d) R$ 387.000,00
e) R$ 427.000,00

21 - (FPS PE/2019) Para construir uma clínica, um médico contraiu um empréstimo de um milhão e meio de reais que será quitado em duas parcelas: a primeira, um ano depois do empréstimo, e a segunda, três anos depois do empréstimo. Os juros de capitalização do empréstimo serão cumulativos (compostos) de 8% ao ano. Se a primeira parcela será de R$ 540.000,00, qual será o valor da segunda? Indique o valor mais próximo do valor obtido.

a) 1,261 milhão de reais
b) 1,259 milhão de reais
c) 1,260 milhão de reais
d) 1,257 milhão de reais
e) 1,258 milhão de reais

22 - (IFSP/2020) Um certo capital aplicado a juros compostos octuplicou após três anos. Sabendo-se que a inflação média anual neste período foi de 80%. Então, quantos porcento foi o ganho real anual da aplicação?

a) 10,0
b) 11,1
c) 20,0
d) 21,1
e) 80,0

23 - (IFSP/2020) Uma pessoa aplicou R$ 17.000,00 e após um ano recebeu um montante atualizado de R$ 18.700,00. Qual foi a taxa de juros semestral composta paga pelo dinheiro aplicado?

a) 4,58%
b) 4,88%
c) 5,00%
d) 10,00%
e) 17,00%

24 - (UESB BA/2020) Numa aplicação a juros constantes, o rendimento foi de 30% do capital investido durante o período de vigência da aplicação, totalizando um montante de R$ 2 600,00. Caso o capital investido tivesse sido submetido a um regime de capitalização composta a uma taxa mensal de 0,5%, durante um bimestre, o montante obtido no novo investimento seria igual a

01. R$ 2 040,05
02. R$ 2 030,05
03. R$ 2 020,05
04. R$ 2 010,05
05. R$ 2 000,05

25 - (FGV /2020) Um capital de R$1 000,00 foi aplicado a juros compostos de taxa positiva durante dois anos. Sabendo que o montante final foi R$1 155,00 e que a taxa de juro do 2º ano foi o dobro da taxa do 1º ano, pode-se afirmar que a taxa de juro do 2º ano foi:

a) 8%
b) 7%
c) 9%
d) 6%
e) 10%

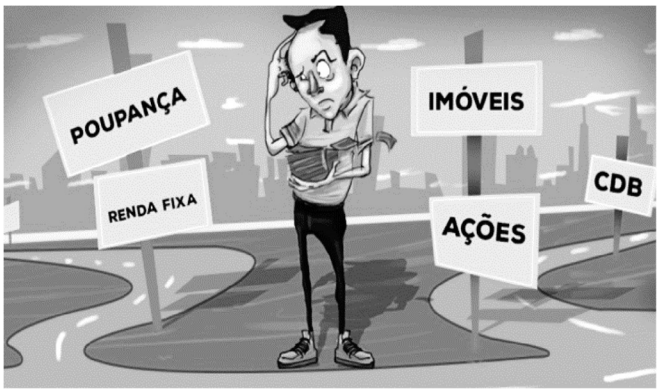
26 - (UERJ/2020) Ao se aposentar aos 65 anos, um trabalhador recebeu seu Fundo de Garantia por Tempo de Serviço (FGTS) no valor de R$50.000,00 e resolveu deixá-lo em uma aplicação bancária, rendendo juros compostos de 4% ao ano, até obter um saldo de R$100.000,00. Se esse rendimento de 4% ao ano não mudar ao longo de todos os anos, o trabalhador atingirá seu objetivo após x anos.

Considerando log (1,04) = 0,017 e log 2 = 0,301, o valor mais próximo de x é:

a) 10
b) 14
c) 18
d) 22

27 - (Uniderp MS/2022) Existem diversas formas de investir capital em instituições financeiras. Quando se compra um título de Renda Fixa, por exemplo, você está

emprestando dinheiro ao emissor do papel, que pode ser um banco, uma empresa ou mesmo o Governo. Em troca, recebe uma remuneração por um determinado prazo, na forma de juros e/ou correção monetária.



Disponível em: <https://janusinvestimentos.com/wp-content/uploads/2017/12/investimentos>.
Acesso em: outubro de 2021. Adaptado.

Um profissional recém-formado, em um curso da área de saúde, juntou os valores recebidos nos primeiros plantões realizados, que totalizaram R$20.000,00, e resolveu fazer um investimento da seguinte forma:

I. Uma parte a juros simples à taxa de 2% ao mês;
II. O restante a juros compostos, à taxa de 1,2% ao mês.

Sabendo-se que ao final de um trimestre, as duas aplicações tiveram o mesmo rendimento e, considerando $(1,012)^3 \cong 1,036$, é correto afirmar que a maior parte aplicada foi, aproximadamente, igual a:

a) R$ 10.500,00
b) R$ 11.500,00
c) R$ 12.500,00
d) R$ 13.500,00
e) R$ 14.500,00

28 - (UFT TO/2023) Miguel fez um empréstimo de R$ 1.000,00 em um banco por um prazo de 12 meses, a juros compostos de 2,8% ao mês, capitalizados ao final de cada mês decorrido.

Sabendo-se que $1,028^6 \cong 1,18$, quanto Miguel deverá pagar ao banco, aproximadamente, ao final dos 12 meses?

a) R$ 1.938,00
b) R$ 1.392,00
c) R$ 1.280,00
d) R$ 1.180,00

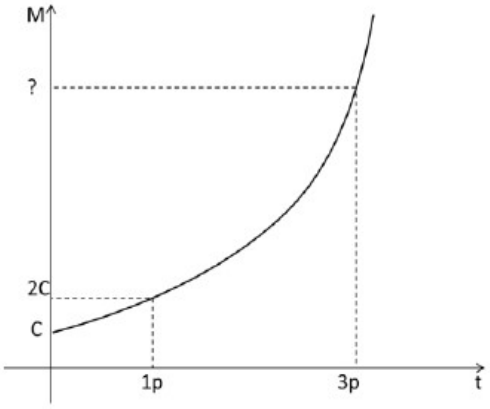
29 - (ENEM MEC/2023) Uma loja vende seus produtos de duas formas: à vista ou financiado em três parcelas mensais iguais. Para definir o valor dessas parcelas nas vendas financiadas, a loja aumenta em 20% o valor do produto à vista e divide esse

novo valor por 3. A primeira parcela deve ser paga no ato da compra, e as duas últimas, em 30 e 60 dias após a compra.
Um cliente da loja decidiu comprar, de forma financiada, um produto cujo valor à vista é R$ 1 500,00.
Utilize 5,29 como aproximação para $\sqrt{28}$.

A taxa mensal de juros compostos praticada nesse financiamento é de

a) 6,7%
b) 10%
c) 20%
d) 21,5%
e) 23,3%

30 - (UEG GO/2024) Realizou-se uma aplicação financeira de um capital C, a juros compostos, com variação conforme o gráfico abaixo. O montante M após três períodos de tempo da aplicação, é



a) 14C
b) 12C
c) 10C
d) 8C
e) 6C

Estatística

Termos Importantes

População e Amostra

A população, também chamada de universo estatístico, se refere ao todo. Por exemplo, uma pesquisa será feita com os funcionários de um restaurante, assim, a população corresponde a todos os funcionários desse restaurante.

A amostra se refere a uma parte da população que, quando consultada, permite chegar ao resultado mais próximo da realidade. Em pesquisas com um grande público, por exemplo, como as pesquisas eleitorais, é comum que apenas uma parte da população, isto é, uma amostra, seja entrevistada. A partir dos dados obtidos pela amostra pesquisada, um resultado que representa a escolha de todos os eleitores é obtido.

Observação: Dizemos que a população é igual à amostra quando todos os elementos do universo estatístico são pesquisados.

Indivíduo ou Objeto

O indivíduo ou objeto corresponde a cada elemento que compõe a amostra. Portanto, nos exemplos das pesquisas feitas com os funcionários do restaurante e com os eleitores, os indivíduos da pesquisa são as pessoas.

Supondo que os funcionários do restaurante estivessem sendo questionados acerca de qual o melhor prato do restaurante, cada prato seria um objeto de pesquisa.

Variável

A variável diz respeito às características do objeto de pesquisa. Então, ainda no exemplo da pesquisa com os funcionários do restaurante – considerando que o melhor prato será escolhido com base nos critérios sabor, textura, aroma, apresentação, temperatura e originalidade –esses critérios são as variáveis da pesquisa.

As variáveis podem ser qualitativas, quando se referem às qualidades/atributos dos indivíduos pesquisados (sexo, grau de instrução, nacionalidade, cor dos olhos e estado civil, por exemplo) ou quantitativas, quando se referem a valores numéricos (número de filhos, altura e peso, por exemplo).

Frequências Absoluta e Relativa

A frequência absoluta corresponde ao número de vezes em que um valor da variável é citado. Logo, supondo que o restaurante possui 10 funcionários e que suas respostas a respeito do melhor prato foram:

Prato	Número de Funcionários
Risoto de Camarão	3
Lasanha à Bolonhesa	4
Carne de Sol com Fritas	2
Lagosta com Cogumelos	1

Afirmamos que a frequência absoluta para cada valor (nome dos pratos) da variável considerada é:

- Risoto de Camarão: 3
- Lasanha à Bolonhesa: 4
- Carne de Sol com Fritas: 2
- Lagosta com Cogumelos: 1

A frequência relativa corresponde à frequência absoluta em relação ao total valores obtidos. Desse modo, considerando o exemplo anterior, temos as seguintes frequências relativas:

- Risoto de Camarão: $\frac{3}{10} = 0{,}3 = 30\%$
- Lasanha à Bolonhesa: $\frac{4}{10} = 0{,}4 = 40\%$
- Carne de Sol com Fritas: $\frac{2}{10} = 0{,}2 = 20\%$
- Lagosta com Cogumelos: $\frac{1}{10} = 0{,}1 = 10\%$

Montando uma tabela com as frequências absoluta e relativa, temos:

Prato	Frequência Absoluta	Frequência Relativa
Risoto de Camarão	3	30%
Lasanha à Bolonhesa	4	40%
Carne de Sol com Fritas	2	20%
Lagosta com Cogumelos	1	10%

Medidas de Tendência Central

Média Aritmética (MA)

Seja x uma variável quantitativa e $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ os valores que x assume, a média aritmética de x é definida como o quociente entre a soma de todos esses valores e a quantidade total de valores.

$$MA = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n}$$

Exemplo: Com a chegada da época de chuvas é comum o surgimento de casos de doenças virais como dengue, Zika e Chikungunya. A Unidade de Pronto Atendimento (UPA) de Imperatriz atendeu, em uma semana, os seguintes números de casos:

	Segunda – Feira	Terça – Feira	Quarta – Feira	Quinta – Feira	Sexta – Feira	Sábado	Domingo
N° de Casos	58	87	93	115	216	74	135

Qual a média aritmética do número de casos atendidos pela UPA nesta semana?

Utilizando a ideia de Média Aritmética, a soma de todos os valores dividida pela quantidade, temos

$$MA = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n} \Rightarrow MA = \frac{58 + 87 + 93 + 115 + 216 + 74 + 135}{7} \Rightarrow$$

$$MA = \frac{778}{7} \Rightarrow MA \cong 111{,}14.$$

Portanto, a média aritmética é aproximadamente $111{,}14$.

Média Aritmética Ponderada (MP)

Seja x uma variável quantitativa de valores $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$, com frequências absolutas correspondentes $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$, define-se média aritmética ponderada de x como o quociente entre a soma dos produtos $x_i.n_i$ (para $i = 1, 2, 3, \dots, k$) e a soma das frequências.

$$MP = \frac{x_1.n_1 + x_2.n_2 + x_3.n_3 + \cdots + x_k.n_k}{n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_k}$$

Exemplo: Uma casa de festas vendeu ingressos para um show em três lotes. Sabendo que no 1° lote foram vendidos 200 ingressos por $R\$\,80{,}00$ cada, no 2° lote foram vendidos 150 ingressos por $R\$\,100{,}00$ cada e no 3° lote foram vendidos 90 ingressos por $R\$\,120{,}00$ cada, qual o preço médio dos ingressos desse show?

Utilizando a média ponderada, temos

$$MP = \frac{x_1.n_1 + x_2.n_2 + x_3.n_3 + \cdots + x_k.n_k}{n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_k} \Rightarrow MP = \frac{80 \cdot 200 + 100 \cdot 150 + 120 \cdot 90}{200 + 150 + 90} \Rightarrow MP = \frac{41800}{440} = 95$$

Portanto, o preço médio do ingresso é de R$ 95,00.

Mediana (Me)

A mediana é uma medida de tendência central mais eficaz quando são utilizados valores discrepantes. Ela é definida por:

$$Me = x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}, se\ n\ for\ ímpar \quad \text{ou} \quad \frac{x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2}, se\ n\ for\ par$$

Exemplo 1: As temperaturas máximas de uma cidade na última semana foram:

	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta	Sábado	Domingo
Temperatura	$40\,°C$	$36\,°C$	$38\,°C$	$43\,°C$	$39\,°C$	$41\,°C$	$37\,°C$

Qual a mediana das temperaturas máximas dessa cidade?

O primeiro passo para encontrarmos a mediana das temperaturas máximas é organizá-las em ordem crescente. Assim, teremos a seguinte sequência:

$$36\,°C \ - \ 37\,°C \ - \ 38\,°C \ - \ 39\,°C \ - \ 40\,°C \ - \ 41°\,C \ - \ 43\,°C$$

Como o número de termos é um número ímpar (7 termos), a mediana das temperaturas será definida pelo termo de número $\frac{n+1}{2}$. Assim,

$$\frac{n+1}{2} = \frac{7+1}{2} = 4.$$

Então, a mediana corresponderá ao quarto termo da sequência, isto é,

$$M_e = x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} \Rightarrow M_e = x_4 \Rightarrow M_e = 39\,°C.$$

Portanto, a mediana das temperaturas máximas dessa cidade será de $39\,°C$.

Exemplo 2: Ao corrigir as provas de seus alunos, um professor obteve as seguintes notas: 10,0 – 9,5 – 3,5 – 2,0 – 8,0 – 4,0 – 7,5 – 8,0 – 9,0 – 7,0. Qual a mediana das notas dessa prova?

Organizando as notas das provas em ordem crescente, temos

$$2{,}0 \;-\; 3{,}5 \;-\; 4{,}0 \;-\; 7{,}0 \;-\; 7{,}5 \;-\; 8{,}0 \;-\; 8{,}0 \;-\; 9{,}0 \;-\; 9{,}5 \;-\; 10{,}0$$

Como o número de termos é um número par (10 termos), a mediana das temperaturas será definida pela média aritmética dos termos de número $\frac{n}{2}$ e $\frac{n}{2}+1$. Assim,

$$\frac{n}{2} = \frac{10}{2} \Rightarrow \frac{n}{2} = 5. \quad \text{e} \quad \frac{n}{2}+1 = \frac{10}{2}+1 \Rightarrow \frac{n}{2}+1 = 6.$$

Então, a mediana corresponderá à média aritmética dos termos de número 5 e 6. Desse modo,

$$M_e = \frac{x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2} \Rightarrow M_e = \frac{x_5 + x_6}{2} \Rightarrow M_e = \frac{7{,}5 + 8{,}0}{2} \Rightarrow M_e = 7{,}75.$$

Logo, a mediana das notas das provas será de $7{,}75$ pontos.

Moda (Mo)

Seja x uma variável quantitativa de valores $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$, com frequências absolutas correspondentes $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k$. Se o maior valor entre as frequências $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k$ for n_j, em que $j \in \{1,2,\ldots,k\}$, então a moda é definida como o valor de x_j. Isto é, em um conjunto de valores, a moda corresponde ao valor que ocorre mais vezes.

Exemplo: Dada a sequência (6 – 7 – 7 – 7 – 9 – 10 – 13 – 13 – 15 – 16 – 16 – 16 – 16 – 17), qual a moda dessa sequência?

A moda da sequência será o valor que se repete por mais vezes na sequência. Assim,

$$M_o = 16.$$

A moda da sequência é $M_o = 16$.

Medidas de Dispersão

Variância (V)

Seja x uma variável quantitativa de valores $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ e MA a média aritmética correspondente a esses valores, a variância é definida como a média dos quadrados das diferenças entre cada valor x_i e a média aritmética MA.

$$V = \frac{(x_1 - MA)^2 + (x_2 - MA)^2 + (x_3 - MA)^2 + \cdots + (x_n - MA)^2}{n}$$

Exemplo: A pontuação de um vestibulando em um processo seletivo para ingresso no ensino superior foi a seguinte:

	Linguagens	Matemática	Ciências Humanas	Ciências da Natureza	Redação
Pontuação	9,0	10,0	7,0	8,0	9,0

Calcule a variância das notas desse vestibulando.

Para calcularmos a variância devemos, antes de tudo, calcular a média aritmética da pontuação dada. Assim,

$$MA = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n} \Rightarrow MA = \frac{9{,}0 + 10{,}0 + 7{,}0 + 8{,}0 + 9{,}0}{5} \Rightarrow MA = 8{,}6$$

Em seguida, aplicamos a fórmula da variância:

$$V = \frac{(x_1 - MA)^2 + (x_2 - MA)^2 + (x_3 - MA)^2 + \cdots + (x_n - MA)^2}{n}$$

$$V = \frac{(9{,}0 - 8{,}6)^2 + (10{,}0 - 8{,}6)^2 + (7{,}0 - 8{,}6)^2 + (8{,}0 - 8{,}6)^2 + (9{,}0 - 8{,}6)^2}{5}$$

$$V = \frac{0{,}16 + 1{,}96 + 2{,}56 + 0{,}36 + 0{,}16}{5} \Rightarrow V = 1{,}04.$$

Logo, a variância das notas do vestibulando é $V = 1{,}04$.

Desvio Padrão (DP)

Seja x uma variável de valores x_1, x_2, x_3, ..., x_n, o desvio padrão é definido como a raiz quadrada da variância de x.

$$DP = \sqrt{V} = \sqrt{\frac{(x_1 - MA)^2 + (x_2 - MA)^2 + (x_3 - MA)^2 + \cdots + (x_n - MA)^2}{n}}$$

Exemplo: Com base no exemplo anterior, calcule o desvio padrão das notas do vestibulando.

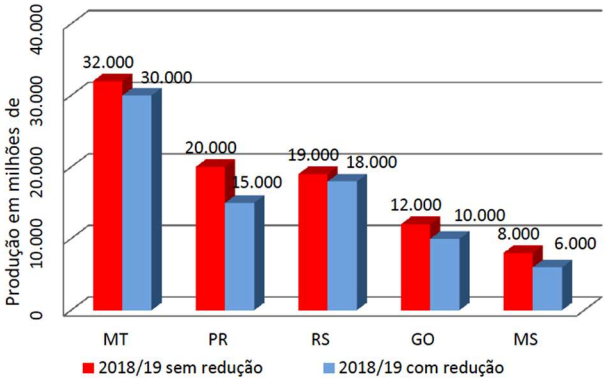
No exemplo anterior encontramos a variância das notas do vestibulando. Desse modo, utilizando a relação entre o desvio padrão e a variância, temos

$$DP = \sqrt{V} \Rightarrow DP = \sqrt{1{,}04} \Rightarrow DP \cong 1{,}01.$$

Portanto, o desvio padrão das notas do vestibulando é $DP \cong 1{,}01$.

Exercícios

01 - (UEG GO/2020) A produção de soja em 2019, nos principais estados produtores do Brasil, tem uma previsão de redução em relação à produção de 2018. O gráfico a seguir mostra essa previsão de redução de maneira aproximada.

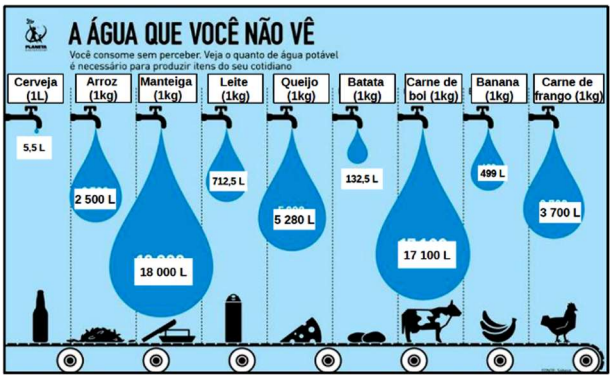


Disponível em: https://coopadapsementes.com.br/site/impactos-da-estiagem-na-producao-da-soja/.
Acesso em: 16 set. 2019. (Adaptado).

Caso a previsão de redução se confirme, a média de redução entre os estados de Mato Grosso, Rio Grande do Sul e Goiás, em milhões de toneladas, será aproximadamente igual a

a) 1304
b) 1027
c) 1532
d) 1120
e) 1667

02 - (UnirG TO/2020) A figura a seguir mostra o consumo de água para a produção de alguns alimentos.



Disponível em: <http://planetasustentavel.abril.com.br/>.
Acesso em: 30 out. 2019.

Considerando a quantidade de litros de água para produzir cada um dos alimentos apresentados na figura, a mediana desses dados é encontrada na produção de

a) arroz.
b) queijo.
c) manteiga.
d) carne.

03 - (Fatec SP/2020) Carlos está desempregado já há algum tempo e resolveu estudar a possibilidade de se tornar motorista de aplicativos. Pesquisando as possibilidades,

encontrou uma simulação de quanto recebem os motoristas de aplicativos em viagens curtas de 5 quilômetros.

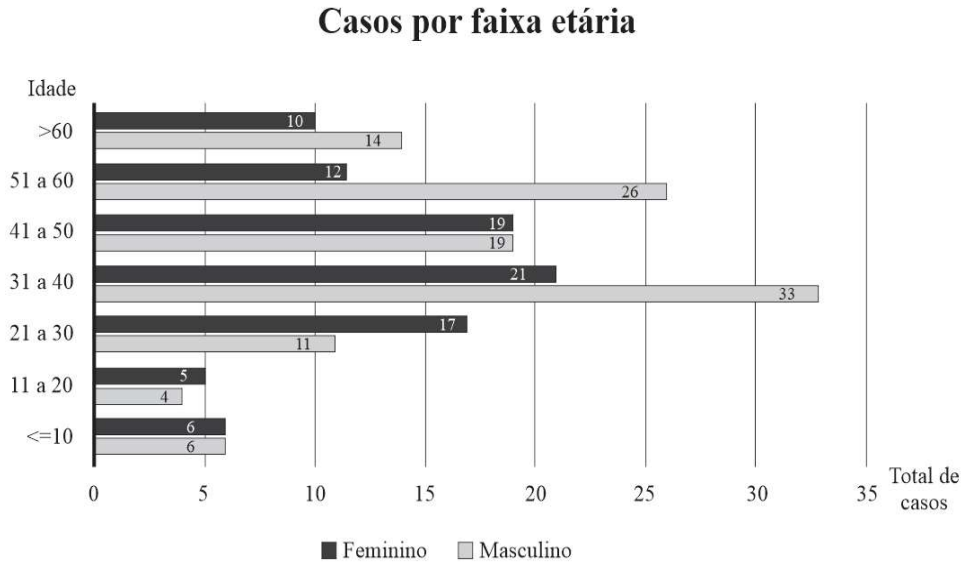
Plataforma	Valor da viagem para o passageiro (R$)	Taxa do valor da viagem que vai para o motorista	Valor que o motorista recebe (R$)
I	12,88	75%	9,66
II	13,50	75%	10,12
III	11,64	100%	11,64
IV	14,05	80%	11,24
V	19,54	80%	15,63
VI	18,10	100%	18,10

Carlos trabalhará apenas com plataformas nas quais o valor recebido pelo motorista para esse tipo de viagem esteja acima da média aritmética dos valores encontrados na tabela.

Assim, a quantidade de aplicativos que atende às exigências de Carlos é

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

04 - (UFU MG/2021) O gráfico abaixo mostra o número de casos confirmados de COVID-19, por faixa etária e por sexo, na cidade de São Carlos – SP, no mês de junho de 2020.



Disponível em: https://www.acidadeon.com/saocarlos/cotidiano/cidades/NOT,0,0,1523417,vigilancia+divulga+dados+da+incidencia+da+covid+19+em+sao+carlos.aspx
Acesso em: 10 jun. 2021.

São dadas as seguintes afirmações.

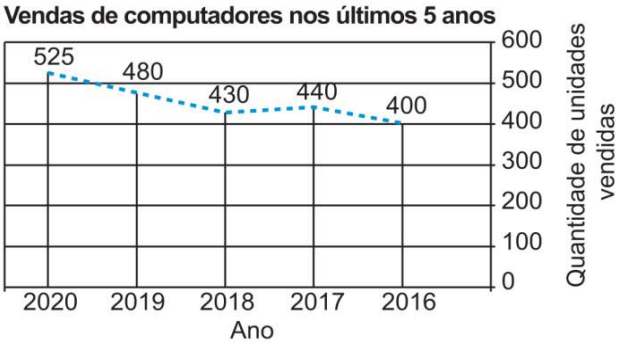
I. Considerando-se as faixas etárias de 11 a 20, de 21 a 30 e de 31 a 40 anos, a média de casos do sexo feminino, por faixa etária, é menor do que a média de casos do sexo masculino, por faixa etária.

II. Considerando-se as faixas etárias de 21 a 30, de 31 a 40 e de 41 a 50 anos, o desvio padrão da média de casos do sexo masculino, por faixa etária, é maior do que o desvio padrão da média de casos do sexo feminino, por faixa etária.
III. Considerando-se todas as faixas etárias, a diferença entre a mediana do número de casos do sexo masculino e a mediana do número de casos do sexo feminino é igual a 3.
IV. Considerando-se o total de casos (feminino e masculino) em cada faixa etária, a moda do total de casos por faixa etária é 38.

Assinale a alternativa que apresenta as afirmações corretas.

a) Apenas I, II e III.
b) Apenas I, II e IV.
c) Apenas I e III.
d) Apenas II, III e IV.

05 - (ENEM MEC/2021) *Black Friday* é uma tradição norte-americana que consiste numa queda de preços de uma grande variedade de produtos disponíveis para venda na última sexta-feira do mês de novembro. No Brasil, em muitas lojas, essa prática se estende por todo esse mês. Para esse período, o gerente de uma loja de produtos eletrônicos que tem 5 vendedores estabelece uma meta de vendas de computadores para um total mínimo de 605 unidades. Ele considera que a média de vendas de computadores dos 5 vendedores juntos neste ano se manterá igual à dos últimos 5 anos, conforme apresentada no gráfico. Considere que a participação de cada vendedor na obtenção da meta seja igual.



Para que a meta da loja seja atingida, o gerente deverá estipular, para cada vendedor, um aumento na média de vendas de, no mínimo, quantas unidades?

a) 150
b) 121
c) 91
d) 35
e) 30

06 - (ENEM MEC/2021) Cinco atletas que participarão de uma maratona treinam frequentemente. As distâncias percorridas por eles no último treino estão registradas, em quilômetro, no quadro.

42,8	41,6	41,8	43,4	43,4

Um sexto atleta, que também participará da maratona, pretende realizar um treino percorrendo uma distância igual à média das distâncias percorridas pelos cinco atletas no último treino por eles realizado.

A distância, em quilômetro, que esse sexto atleta deverá percorrer em seu treino é

a) 41,8.
b) 42,4.
c) 42,6.
d) 42,8.
e) 43,4.

07 - (ENEM MEC/2021) O presidente de um time de futebol contratou, para a temporada de 2016, um atacante e um meio-campista. Para isso, ele recebeu do departamento de futebol dois quadros.
O primeiro quadro contém o número de gols marcados por três candidatos a atacantes, nas três temporadas anteriores.

Atacantes	2013 (número de gols)	2014 (número de gols)	2015 (número de gols)
I	13	13	24
II	13	16	22
III	17	11	20

O segundo quadro contém o número de assistências que resultaram em gol, feitas por dois candidatos a meios-campistas, nas três temporadas anteriores.

Meios-campistas	2013 (número de assistências)	2014 (número de assistências)	2015 (número de assistências)
IV	11	17	20
V	7	16	23

Após fazer uma análise das médias de gols de cada atacante e das médias de assistências de cada meio-campista nas últimas três temporadas, o presidente contratou o atacante e o meio-campista com maior média de gols e assistências, respectivamente, nessas três temporadas.

O atacante e o meio-campista escolhidos por esse presidente foram, respectivamente,

a) I e IV.
b) I e V.
c) II e IV.
d) II e V.
e) III e IV.

08 - (ENEM MEC/2021) A qualidade de sementes é verificada, entre outros fatores, pelo índice de germinação. Uma grande empresa afirma que o índice de germinação de suas sementes é de 90%. Essa empresa e dez pequenos produtores que formam uma cooperativa estão concorrendo a um auxílio financeiro que permitirá aumentar os negócios. Os cooperados querem preparar um documento técnico comparando a

qualidade de suas sementes com as da empresa. Eles discutiram a possibilidade de colocar nesse documento frases como:

I. A média de germinação de nossas sementes é superior ao índice de germinação anunciado pela empresa.
II. A mediana de germinação de nossas sementes é superior ao índice de germinação anunciado pela empresa.
III. A média de germinação de nossas sementes é igual ao índice de germinação anunciado pela empresa.
IV. A moda de germinação de nossas sementes é igual ao índice de germinação anunciado pela empresa.
V. A mediana de germinação de nossas sementes é igual ao índice de germinação anunciado pela empresa.

Eles decidiram anotar a porcentagem de germinação das sementes de cada cooperado, analisar as frases e decidir qual era a correta para, então, colocá-la no documento.
As porcentagens anotadas foram 90%, 65%, 70%, 75%, 95%, 95%, 90%, 80%, 80% e 90%.

A frase a ser colocada no documento é a de número

a) I.
b) II.
c) III.
d) IV.
e) V.

09 - (ENEM MEC/2021) Até a Copa de 2010, apenas sete jogadores haviam conseguido o feito de marcar 8 ou mais gols em uma mesma edição da Copa do Mundo. O quadro apresenta os anos das edições da copa nas quais ocorreram esses feitos, quais foram os jogadores que os realizaram e os respectivos números de gols marcados por cada um deles.

Ano	Nome do jogador	Número de gols marcados
1930	Guillermo Stábile	8
1950	Ademir de Menezes	9
1954	Sandor Kocsis	11
1958	Just Fontaine	13
1966	Eusébio	9
1970	Gerd Müller	10
2002	Ronaldo Nazário	8

Para facilitar a análise sobre a quantidade de gols marcados por esses artilheiros nas referidas copas, foi calculada a mediana da distribuição dos números de gols marcados por eles nas sete copas especificadas no quadro.

A mediana dessa distribuição é igual a

a) 9,0.
b) 9,7.
c) 10,0.
d) 10,2.

e) 13,0.

10 - (ENEM MEC/2021) Uma grande rede de supermercados adota um sistema de avaliação dos faturamentos de suas filiais, considerando a média de faturamento mensal em milhão. A matriz da rede paga uma comissão para os representantes dos supermercados que atingirem uma média de faturamento mensal (M), conforme apresentado no quadro.

Comissão	Média de faturamento mensal (M)
I	$1 \leq M < 2$
II	$2 \leq M < 4$
III	$4 \leq M < 5$
IV	$5 \leq M < 6$
V	$M \geq 6$

Um supermercado da rede obteve os faturamentos num dado ano, conforme apresentado no quadro.

Faturamento mensal (em milhão de real)	Quantidade de meses
3,5	3
2,5	2
5	2
3	4
7,5	1

Nas condições apresentadas, os representantes desse supermercado avaliam que receberão, no ano seguinte, a comissão de tipo

a) I.
b) II.
c) III.
d) IV.
e) V.

11 - (ENEM MEC/2021) Uma rede de hamburgueria tem três franquias em cidades distintas. Visando incluir um novo tipo de lanche no cardápio, o gerente de marketing da rede sugeriu que fossem colocados à venda cinco novos tipos de lanche, em edições especiais. Os lanches foram oferecidos pelo mesmo período de tempo em todos os franqueados. O tipo que apresentasse a maior média por franquia seria incluído definitivamente no cardápio. Terminado o período de experiência, a gerência recebeu um relatório descrevendo as quantidades vendidas, em unidade, de cada um dos cinco tipos de lanche nas três franquias.

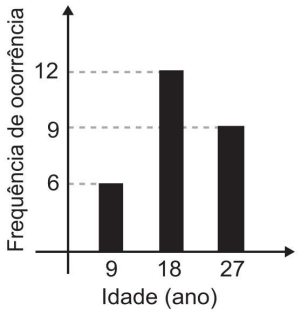
	Lanche I	Lanche II	Lanche III	Lanche IV	Lanche V
Franquia I	415	395	425	430	435
Franquia II	415	445	370	370	425
Franquia III	415	390	425	433	420

Com base nessas informações, a gerência decidiu incluir no cardápio o lanche de tipo

a) I.
b) II.

c) III.
d) IV.
e) V.

12 - (ENEM MEC/2021) Uma pessoa realizou uma pesquisa com alguns alunos de uma escola, coletando suas idades, e organizou esses dados no gráfico.



Qual é a média das idades, em ano, desses alunos?

a) 9
b) 12
c) 18
d) 19
e) 27

13 - (ENEM MEC/2021) O quadro apresenta o número de terremotos de magnitude maior ou igual a 7, na escala Richter, ocorridos em nosso planeta nos anos de 2000 a 2011.

Ano	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011
Terremotos	15	16	13	15	16	11	11	18	12	17	24	20

Disponível em https://earthquake.usgs.gov//earthquakes/browse/m7-world.php. Acesso em: 13 ago. 2012 (adaptado).

Um pesquisador acredita que a mediana representa bem o número anual típico de terremotos em um período. Segundo esse pesquisador, o número anual típico de terremotos de magnitude maior ou igual a 7 é

a) 11.
b) 15.
c) 15,5.
d) 15,7.
e) 17,5.

14 - (ENEM MEC/2021) A demografia médica é o estudo da população de médicos no Brasil nos aspectos quantitativo e qualitativo, sendo um dos seus objetivos fazer projeções sobre a necessidade da formação de novos médicos. Um desses estudos gerou um conjunto de dados que aborda a evolução do número de médicos e da população brasileira por várias décadas. O quadro apresenta parte desses dados.

Ano	Médicos	População brasileira (em milhar)
1990	219 000	147 000
2000	292 000	170 000
2010	365 000	191 000

Segundo uma projeção estatística, a variação do número de médicos e o da população brasileira de 2010 para 2020 será a média entre a variação de 1990 para 2000 e a de 2000 para 2010. Com o resultado dessa projeção, determina-se o número de médicos por mil habitantes no ano de 2020.

Disponível em: www.cremesp.org.br. Acesso em: 24 jun. 2015 (adaptado).

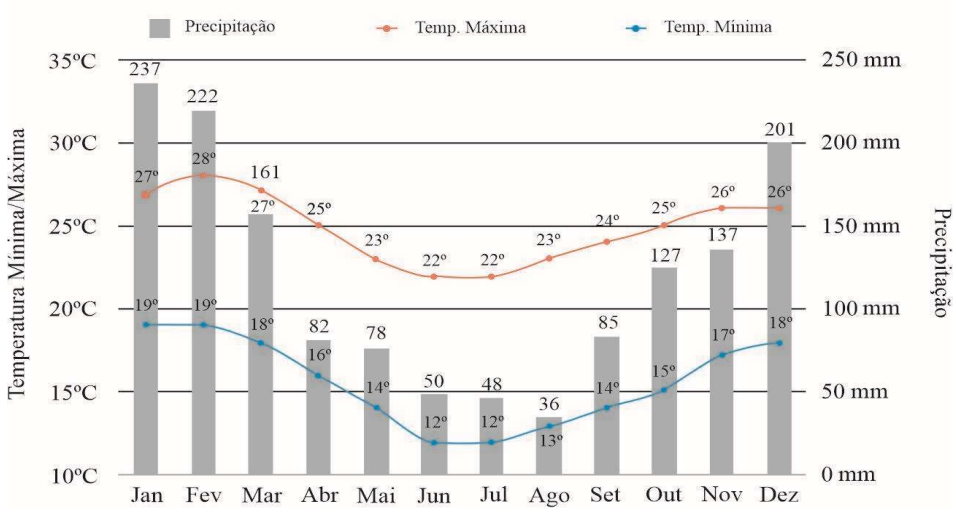
O número, com duas casas na parte decimal, mais próximo do número de médicos por mil habitantes no ano de 2020 seria de

a) 0,17.
b) 0,49.
c) 1,71.
d) 2,06.
e) 3,32.

15 - (PUC Campinas SP/2021) Considere o gráfico abaixo.

Tempo paulistano

Médias de precipitação e temperatura na cidade de São Paulo



*As médias climatológicas são valores calculados a partir de uma série de dados de 30 anos observados.
(Climatempo)

A partir do gráfico, a afirmação verdadeira é:

a O mês com maior temperatura máxima também foi o de maior precipitação.
b) A temperatura máxima entre os meses variou no máximo 4 °C.
c) A média das temperaturas máximas de janeiro a junho é maior do que a média das temperaturas máximas de julho a dezembro.
d) A maior diferença entre temperatura máxima e mínima ocorreu em dezembro.
e) A menor temperatura mínima ocorreu em agosto.

16 - (Univag MT/2021) Uma tabela contém as alturas de 24 alunos e a média dessas alturas foi calculada em 162 cm. Uma observação mais acurada dessa tabela revelou que uma das alturas estava errada e onde se lia 198 cm, deveria ser lido 168 cm. Feita a correção, a média correta das 24 alturas é

a) 160,50 cm.
b) 161 cm.
c) 160,75 cm.
d) 160,25 cm.
e) 161,25 cm.

17 – (Fac. Cesgranrio RJ/2021) Observe, na imagem, as temperaturas mínima e máxima registradas em certa cidade em 5 dias consecutivos.



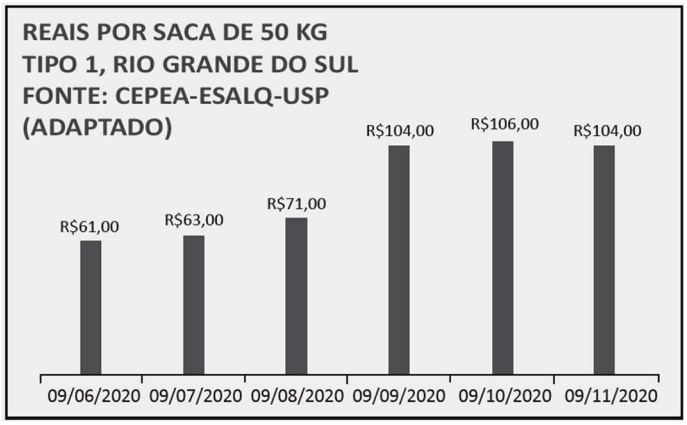
Considere que, na sexta-feira, a temperatura máxima seja igual à mediana das 5 temperaturas máximas apresentadas acima e que a temperatura mínima seja o próximo termo da progressão aritmética formada pelas temperaturas mínimas apresentadas.

Qual será a diferença entre as temperaturas máxima e mínima da sexta-feira?

a) 6º
b) 7º
c) 8º
d) 9º
e) 10º

18 – (Unifor CE/2021) Essencial na mesa da família brasileira, o preço do arroz disparou nos supermercados brasileiros, sobretudo nos últimos meses. Levantamento feito pelo Centro de Estudos Avançados em Economia Aplicada (Cepea), da Esalq/USP, mostra a variação de preço no preço da saca de 50 Kg de arroz do tipo 1, no posto indústria Rio Grande do Sul, à vista, nos últimos seis meses.

Disponível em: www.economia.uol.com.br. Acesso em: 10 Nov 2020.



De acordo com as informações do gráfico, o preço médio da saca de 50 kg da saca de arroz, tipo 1, no Rio Grande do Sul, de 09/06/2020 a 09/11/2020 era de, aproximadamente,

a) R$ 64,67.
b) R$ 71,00.
c) R$ 78,83.
d) R$ 84,84.
e) R$ 89,73.

19 - (ENEM MEC/2022) A meta de uma concessionária de automóveis é vender, pelo menos, 104 carros por mês. Sabe-se que, em média, em dias em que não são oferecidos descontos, são vendidos 3 carros por dia; em dias em que há o desconto mínimo, são vendidos 4 carros por dia; e, em dias em que há o desconto máximo, são vendidos 5 carros por dia.
No mês atual, até o fim do expediente do sexto dia em que a concessionária abriu, não foram oferecidos descontos, tendo sido vendidos 18 carros, conforme indicava a média. Ela ainda abrirá por mais 20 dias neste mês.
A menor quantidade de dias em que será necessário oferecer o desconto máximo, de modo que ainda seja possível a concessionária alcançar sua meta de vendas para o mês, é

a) 6.
b) 10.
c) 11.
d) 13.
e) 18.

20 - (ENEM MEC/2022) Em busca de diversificar a vivência do filho, seus pais registraram a quantidade de horas de uso diário do aparelho celular dele durante a primeira semana de agosto.

O resultado desse registro, em hora, foi o seguinte:

- segunda-feira: 5;
- terça-feira: 2;
- quarta-feira: 9;
- quinta-feira: 2;
- sexta-feira: 8;

- sábado: 12;
- domingo: 4.

Com base nesse registro, os pais planejaram incluir atividades físicas e culturais na vivência do filho no sábado da segunda semana do mesmo mês.
Consequentemente, a quantidade de horas de uso do aparelho no sábado deveria ser reduzida, de modo que a média diária de uso na segunda semana fosse, no mínimo, uma hora a menos do que a média diária na primeira semana. Ao longo dos demais dias da segunda semana, a quantidade de horas de uso do aparelho seria a mesma da primeira semana.

Qual é a quantidade máxima de horas de uso do aparelho no sábado da segunda semana que atende ao planejamento dos pais?

a) 4
b) 5
c) 6
d) 10
e) 11

21 - (ENEM MEC/2022) Uma empresa tem cinco setores, cada um com quatro funcionários, sendo que cada funcionário de um setor tem um cargo diferente. O quadro apresenta os salários, em real, dos funcionários de cada um desses setores, por cargo.

Setor	Salário para o cargo 1 (R$)	Salário para o cargo 2 (R$)	Salário para o cargo 3 (R$)	Salário para o cargo 4 (R$)
I	1 550,00	1 140,00	1 140,00	1 150,00
II	1 100,00	1 100,00	1 520,00	1 200,00
III	1 050,00	1 050,00	1 600,00	2 000,00
IV	1 300,00	1 160,00	1 280,00	1 280,00
V	1 250,00	1 300,00	1 300,00	1 150,00

A empresa pretende incentivar a qualificação profissional, oferecendo cursos gratuitos para os funcionários de todos os cinco setores. Entretanto, o primeiro curso será oferecido aos funcionários do setor que apresenta a menor média salarial por cargo.

O primeiro curso será oferecido aos funcionários do setor

a) I.
b) II.
c) III.
d) IV.
e) V.

22 - (ENEM MEC/2022) O diabetes *mellitus* é uma doença crônica, caracterizada pelo aumento de glicose no sangue. O Sistema de Cadastramento e Acompanhamento de Hipertensos e Diabéticos destina-se ao cadastramento e acompanhamento de portadores de hipertensão arterial e/ou diabetes *mellitus* atendidos na rede ambulatorial do Sistema Único de Saúde. A tabela mostra o número de pessoas portadoras de diabetes *mellitus* tipo 2, a forma mais grave da doença, distribuídas pelas macrorregiões de saúde de Minas Gerais, em 2012.

Macrorregião de saúde	Número de portadores de diabetes *mellitus* tipo 2
Sul	714
Centro-Sul	186
Centro	448
Jequitinhonha	36
Oeste	460
Leste	255
Sudeste	110
Norte	45
Noroeste	86
Leste do Sul	47
Nordeste	39
Triângulo do Sul	153
Triângulo do Norte	128

Disponível em: http://tabnet.datasus.gov.br. Acesso em: 5 nov. 2017.

A mediana do número de portadores de diabetes *mellitus* tipo 2 das macrorregiões de saúde de Minas Gerais é

a) 110,00.
b) 119,00.
c) 128,00.
d) 182,50.
e) 208,23.

23 - (ENEM MEC/2022) Num restaurante, a última sexta-feira do mês é o Dia da Solidariedade: as gorjetas arrecadadas nesse dia serão distribuídas, igualmente, entre todos os garçons que estiverem trabalhando nessa data. Para um maior controle, o administrador do restaurante organiza uma tabela das gorjetas arrecadadas por cada garçom; assim, ele pode distribuir corretamente os valores a cada um deles. O quadro de certo Dia da Solidariedade é apresentado a seguir.

Garçom	Total de gorjetas recebidas (R$)
A	17,00
B	24,00
C	Folga
D	17,00
E	20,00
F	Folga
G	16,00
H	27,00
I	18,00
J	21,00

Quanto cada garçom recebeu do total das gorjetas nesse Dia da Solidariedade?

a) R$ 16,00
b) R$ 17,00
c) R$ 18,00
d) R$ 19,00
e) R$ 20,00

24 - (ENEM MEC/2022) Descargas atmosféricas, objetos estranhos e quedas de árvores, entre outros motivos, podem gerar interrupções na rede elétrica. Em certo município, um levantamento realizado pela companhia de fornecimento de energia

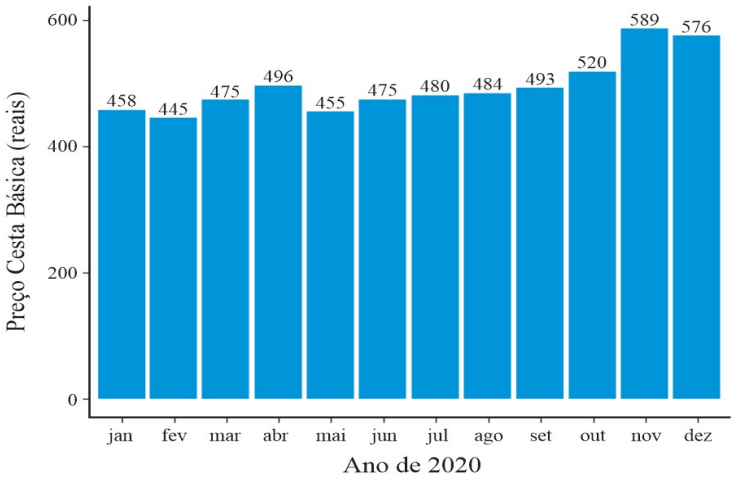
relacionou, durante 30 dias, o número de interrupções na rede elétrica com o número de dias em que elas ocorreram.

Número de interrupções	Número de dias
0	5
1	6
2	6
3	10
4	3
Total	30

A moda e a média diária do número de interrupções são, respectivamente, iguais a

a) 3 e 2,0.
b) 3 e 2,4.
c) 3 e 6,0.
d) 10 e 2,0.
e) 10 e 2,4.

25 - (UFGD MS/2022) A cesta básica é formada pelo conjunto de alimentos necessários para as refeições de uma pessoa adulta (conforme Decreto-Lei nº 399/1938). A Pesquisa Nacional da Cesta Básica de Alimentos, realizada pelo DIEESE (Departamento Intersindical de Estatística e Estudos Socioeconômicos), indicou que, em 2020, o preço da cesta básica aumentou em todas as capitais brasileiras. Em Campo Grande, capital do estado de Mato Grosso do Sul (MS), o preço médio mensal no ano de 2020 foi de R$ 495,50, com um desvio padrão populacional de R$ 43,43. Analise o gráfico a seguir.



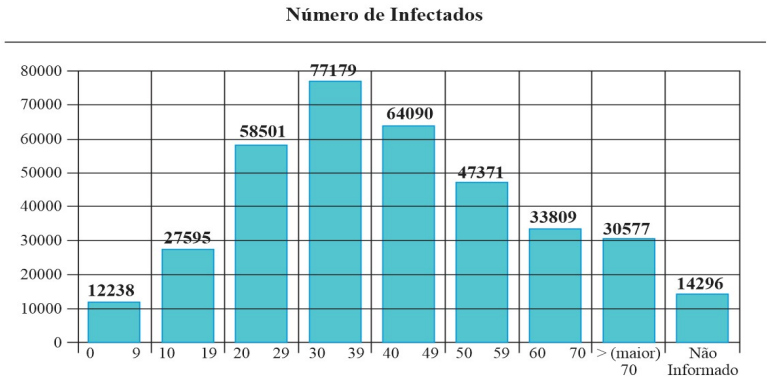
Departamento Intersindical de Estatística e Estudos Socioeconômicos. **DIEESE - Pesquisa Nacional da Cesta Básica de Alimentos Tomada especial de preços de dezembro de 2020 e do ano de 2020**. Disponível em: https://www.dieese.org.br/. Acesso em: 14 out. 2021.

O gráfico apresenta o preço da cesta básica, em cada um dos doze meses no ano de 2020, na capital Campo Grande (MS). Caso o preço da cesta básica em Campo Grande, no ano de 2020, fosse reduzido em 20% em todos os meses, o que aconteceria com o resultado da variância populacional desses valores?

a) A nova variância seria de 80% da anterior.
b) A nova variância seria de 60% da anterior.
c) A nova variância seria de 64% da anterior.
d) A nova variância seria de 140% da anterior.

e) A nova variância seria de 136% da anterior.

26 - (UEMA/2022) COVID-19 é uma doença infecciosa causada pelo vírus SARS-CoV-2. A maioria das pessoas que adoece em decorrência da COVID-19 apresenta sintomas leves a moderados e se recupera, sem tratamento especial. No entanto, algumas desenvolvem um quadro grave e precisam de atendimento médico. No Maranhão, os casos de COVID-19 foram registrados, conforme gráfico abaixo.



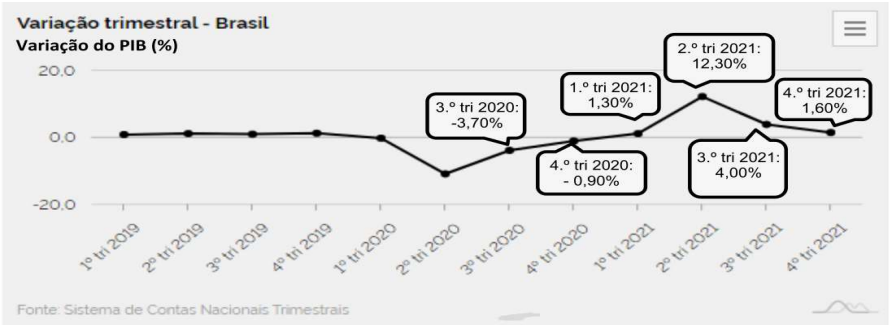
https://www.corona.ma.gov.br. Adaptado.

Considerando os intervalos da variável idade, no eixo X, e as quantidades de infectados de cada intervalo (identificados nas colunas), a média de idade, em anos, dos infectados, confirmados, no Maranhão, dos intervalos até 70, é de

(Aproximar, para o número inteiro mais próximo, de acordo com as regras de arredondamento)

a) 41
b) 38
c) 26
d) 31
e) 39

27 - (UEG GO/2022) A imagem a seguir apresenta o gráfico da variação do Produto Interno Bruto (PIB) do Brasil do primeiro trimestre de 2019 ao quarto trimestre de 2021.



Disponível em: https://www.ibge.gov.br/indicadores Acesso em: 1° maio 2022. (Adaptada).

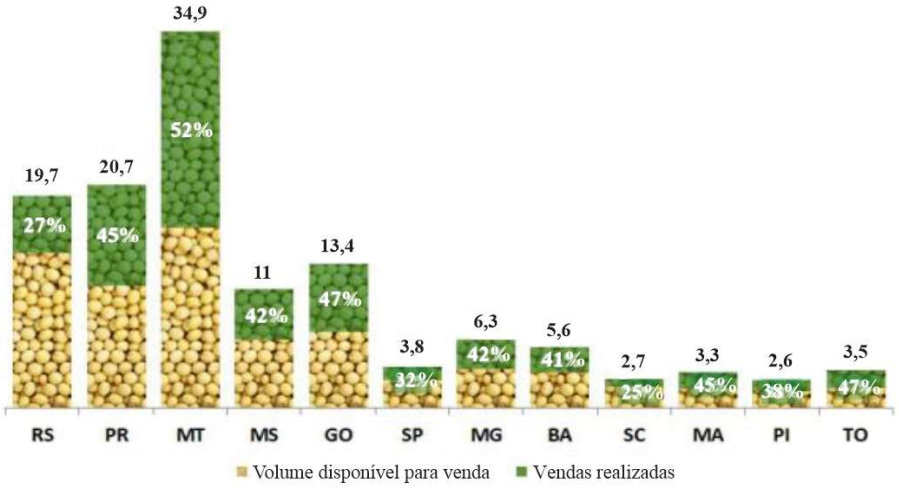
A média e a mediana dos valores da variação do PIB do 3.º trimestre de 2020 até o 4.º trimestre de 2021 são, respectivamente:

a) 3,97% e 6,80%.
b) 3,97% e 2,73%.

c) 2,73% e 1,45%.
d) 2,43% e 6,80%.
e) 2,43% e 1,45%.

28 - (UEG GO/2022)
O gráfico a seguir mostra como está a comercialização antecipada de soja na safra 2020/2021. Em dígitos pretos, estão sinalizados os volumes totais de produção projetados pela consultoria Safras & Mercado para cada estado em milhões de toneladas.

Confira como está a comercialização antecipada da safra de soja 2020/2021



Disponível em: https://www.google.com/url?sa=i&url=https%3A%2F%2Fwww.canalrural.com.br%2Fprojeto-soja-brasil%2Fnoticia%2Fsoja-venda-da-safra-2020-2021. Acesso em: 28 out. 2021.

Observa-se que o total estimado da produção em Mato Grosso é, aproximadamente

a) cinco vezes maior que o valor da produção estimada da Bahia.
b) três vezes maior que o valor da produção estimada do Paraná.
c) igual ao valor estimado da produção do Rio Grande do Sul e Minas Gerais juntos.
d) igual à média da produção estimada entre os estados de Goiás, Rio Grande do Sul e São Paulo juntos.
e) onze vezes maior que o valor da média da produção estimada de Santa Catarina, Maranhão, Piauí e Tocantins juntos.

29 - (FMABC SP/2022) Na tabela, estão relacionadas quatro *startups* que estão desenvolvendo veículos elétricos de pouso e decolagem vertical (eVTOLs, na sigla em inglês) e os respectivos valores, dispostos em ordem crescente, que devem ser obtidos junto a investidores para essa finalidade.

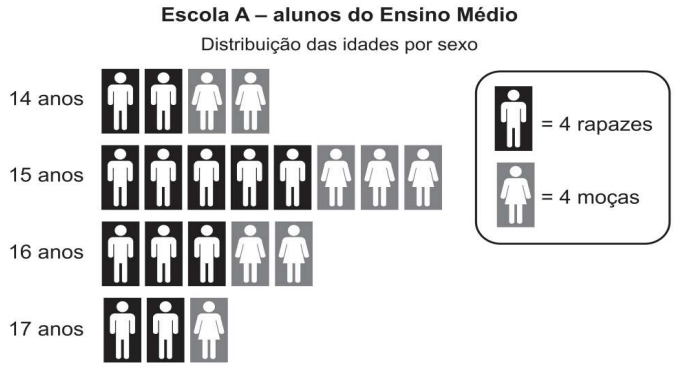
Startup	País	Valor (em US$ bilhão)
Vertical	Inglaterra	0,394
Lilium	Alemanha	x
Archer	Estados Unidos	x + 0,27
Joby	Estados Unidos	1,6

(*O Estado de S.Paulo*, 26.07.2021. Adaptado.)

Sabendo-se que a mediana desses valores é US$ 0,965 bilhão, conclui-se que o valor que deve ser obtido pela Archer junto a investidores é igual a

a) US$ 0,97 bilhão.
b) US$ 0,74 bilhão.
c) US$ 1,25 bilhão.
d) US$ 0,80 bilhão.
e) US$ 1,10 bilhão.

TEXTO: 1 - Comum à questão: 30
O pictograma abaixo apresenta a distribuição dos alunos matriculados no Ensino Médio de certa escola, de acordo com a idade e o sexo dos mesmos.



30 - (Fac. Cesgranrio RJ/2022) Considere a distribuição, por idade, dos alunos do sexo masculino.

A moda dessa distribuição, em anos, é
a) 20,0
b) 17,2
c) 15,4
d) 15,0
e) 14,0

31 - (ENEM MEC/2022) Uma das informações que pode auxiliar no dimensionamento do número de pediatras que devem atender em uma Unidade Básica de Saúde (UBS) é o número que representa a mediana da quantidade de crianças por família existente na região sob sua responsabilidade. O quadro mostra a distribuição das frequências do número de crianças por família na região de responsabilidade de uma UBS.

Número de crianças por família	Frequência
0	100
1	400
2	200
3	150
4	100
5	50

O número que representa a mediana da quantidade de crianças por família nessa região é

a) 1,0.
b) 1,5.
c) 1,9.
d) 2,1.
e) 2,5.

32 - (ENEM MEC/2022) Nos cinco jogos finais da última temporada, com uma média de 18 pontos por jogo, um jogador foi eleito o melhor do campeonato de basquete. Na atual temporada, cinco jogadores têm a chance de igualar ou melhorar essa média. No quadro estão registradas as pontuações desses cinco jogadores nos quatro primeiros jogos das finais deste ano.

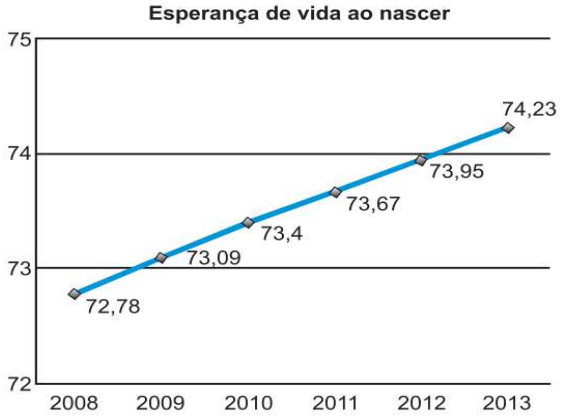
Jogadores	Jogo 1	Jogo 2	Jogo 3	Jogo 4
I	12	25	20	20
II	12	12	27	20
III	14	14	17	26
IV	15	18	21	21
V	22	15	23	15

O quinto e último jogo será realizado para decidir a equipe campeã e qual o melhor jogador da temporada.

O jogador que precisa fazer a menor quantidade de pontos no quinto jogo, para igualar a média de pontos do melhor jogador da temporada passada, é o

a) I.
b) II.
c) III.
d) IV.
e) V.

33 - (ENEM MEC/2022) A esperança de vida ao nascer é o número médio de anos que um indivíduo tende a viver a partir de seu nascimento, considerando dados da população. No Brasil, esse número vem aumentando consideravelmente, como mostra o gráfico.



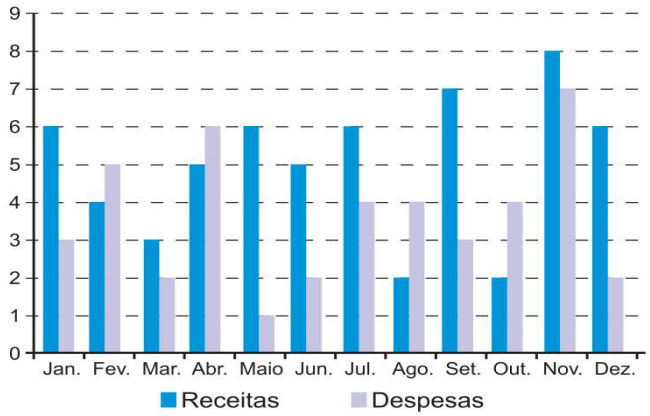
Disponível em: http://cod.ibge.gov.br. Acesso em: 6 mar. 2014 (adaptado).

Pode-se observar que a esperança de vida ao nascer em 2012 foi exatamente a média das registradas nos anos de 2011 e 2013. Suponha que esse fato também ocorreu com a esperança de vida ao nascer em 2013, em relação às esperanças de vida de 2012 e de 2014.

Caso a suposição feita tenha sido confirmada, a esperança de vida ao nascer no Brasil no ano de 2014 terá sido, em ano, igual a

a) 74,23.
b) 74,51.
c) 75,07.
d) 75,23.
e) 78,49.

34 - (ENEM MEC/2022) O gráfico apresenta os totais de receitas e despesas de uma empresa, expressos em milhão de reais, no decorrer dos meses de um determinado ano. A empresa obtém lucro quando a diferença entre receita e despesa é positiva e tem prejuízo quando essa diferença é negativa.



Qual é a mediana, em milhão de reais, dos valores dos lucros apurados pela empresa nesse ano?

a) 1,5
b) 2,0
c) 2,9
d) 3,0
e) 5,5

35 - (Unesp SP/2022) Um experimento vai avaliar a memória de um grupo de dez crianças de 12 anos em relação à capacidade de retenção de palavras, figuras e números. Durante 30 segundos, cada criança recebe a mesma lista de dez palavras e, em seguida, tem 60 segundos para escrever as palavras que lembra ter visto. O mesmo se repete com uma lista de dez figuras e, em seguida, com uma lista de dez números naturais aleatórios de 1 a 100. A tabela indica o resultado desse experimento.

Nº da criança	Quantidade de acertos			
	Palavras	Figuras	Números	Total
1	8	9	6	23
2	9	10	9	28
3	10	10	8	28
4	9	9	9	27
5	7	9	8	24
6	10	10	7	27
7	7	8	5	20
8	7	8	9	24
9	8	7	8	23
10	9	10	7	26
Total	84	90	76	250

De acordo com os resultados do experimento,

a) 73% do total geral de acertos do grupo correspondem aos acertos de palavras e de figuras.
b) a mediana dos totais de acertos de palavras, figuras e números por criança é igual 24.
c) as crianças que acertaram mais figuras do que palavras também acertaram menos números do que palavras.
d) as medianas do total de acertos de figuras e do total de acertos de números do grupo coincidem com o total de acertos de figuras e de números da criança 5.
e) a média geral de acertos do grupo é de 80%.

36 - (Famerp SP/2022) Em três avaliações de matemática, cada uma no valor de 0 a 10 pontos, Helena tirou na segunda avaliação o dobro do que havia tirado na primeira e, na terceira, tirou o triplo do que havia tirado na primeira. Se a média aritmética das três notas de Helena foi 5,2, então a mediana das suas três notas foi igual a

a) 5,0.
b) 5,1.
c) 5,2.
d) 4,9.
e) 4,8.

37 - (UFT TO/2023) Uma professora de Matemática tomou a altura dos(as) estudantes de sua classe para trabalhar os conceitos de média aritmética, mediana e moda. Tomadas as medidas, os resultados em centímetros foram: 179, 180, 165, 195, 154, 178, 160, 174, 185, 169, 174, 180, 195, 174, 181, 159, 171 e 188.

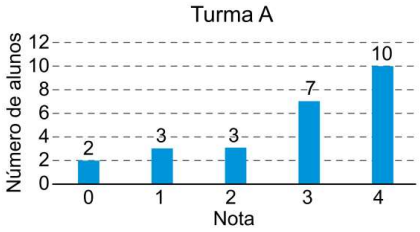
Considere as informações apresentadas e as afirmativas a seguir:

I. A altura mediana da classe é 176.
II. A altura modal da classe é 195.
III. A altura mediana é maior do que a altura modal.
IV. A média aritmética entre a mediana e a moda das alturas da classe é 175.

Com base nas informações anteriores, assinale a alternativa **CORRETA.**

a) Apenas as afirmativas I, II e III estão corretas.
b) Apenas as afirmativas I e III estão corretas.
c) Apenas as afirmativas I, III e IV estão corretas.
d) Apenas as afirmativas I e II estão corretas.

38 - (FMABC SP/2023) Uma mesma atividade avaliativa foi realizada em duas turmas de determinado ano em uma mesma escola. Em cada turma, cada aluno recebeu uma nota inteira entre 0 e 4 pela atividade. As notas dos alunos da Turma A foram organizadas em um gráfico de barras, e as notas dos alunos da Turma B foram organizadas em uma tabela.



Turma B	
Nota	Número de alunos
0	2
1	x
2	y
3	5
4	8

Sabendo que a Turma B tem 20 alunos e que as médias das notas coincidiram nas duas turmas, o valor de y – x é

a) –3.
b) 1.
c) –1.
d) 0.
e) 3.

39 - (ENEM MEC/2023) A nota final de um estudante em uma disciplina é dada pela mediana das notas de suas quatro provas.
Cinco estudantes dessa disciplina obtiveram as notas apresentadas no quadro.

Estudante	Prova 1	Prova 2	Prova 3	Prova 4
I	85	45	90	45
II	80	70	70	75
III	75	75	75	55
IV	85	35	35	90
V	60	70	70	75

O professor dessa disciplina pediu a cada estudante que calculasse sua nota final e lhe apresentasse o resultado obtido. Os resultados informados pelos estudantes foram:

- estudante I: 77;
- estudante II: 70;
- estudante III: 70;
- estudante IV: 60;
- estudante V: 70.

Qual(is) estudante(s) acertou(aram) sua nota final?

a) I

b) III
c) II e III
d) II e V
e) IV e V

Questão-40 - (ENEM MEC/2023) O síndico de um condomínio contratou uma empresa para verificar a qualidade da água dos cinco reservatórios que alimentam esses edifícios. A empresa utiliza um teste que fornece o valor de um parâmetro, expresso em pontos que variam de 0 a 100, que indicam a qualidade da água, sendo o valor 0 associado à péssima qualidade e 100 associado à ótima qualidade da água. Quando esse parâmetro assume um valor a partir de 50 pontos, a água é considerada de qualidade adequada.
Para os reservatórios I, II, III e IV, esse parâmetro assumiu, respectivamente, os valores 64, 53, 63 e 64 nesse tipo de teste. Já no reservatório V, esse parâmetro foi de 20 pontos, reprovando a qualidade da água. Com isso, a água desse reservatório será tratada de modo a aumentar sua qualidade.
O síndico pretende que o parâmetro de qualidade da água do reservatório V aumente o suficiente para que a média dos parâmetros de qualidade da água dos cinco reservatórios seja, no mínimo, igual a 60 pontos.

A quantidade mínima de pontos que o parâmetro da qualidade da água do reservatório V deve aumentar é

a) 36.
b) 40.
c) 41.
d) 43.
e) 44
.

41 - (ENEM MEC/2023) Restaurantes geralmente se deparam com o problema de definir a quantidade de alimentos a serem preparados para cada dia. Diante desse problema, o gerente de um restaurante anotou as quantidades de clientes que almoçaram em seu restaurante durante os 10 primeiros dias do mês e registrou esses dados, obtendo este gráfico:



Ele considerou a moda da distribuição das quantidades de clientes que almoçaram em seu restaurante nesses 10 primeiros dias do mês como uma boa medida para dimensionar a quantidade de alimentos a serem preparados diariamente.

O valor da moda dessa distribuição é

a) 90.
b) 91.
c) 93.
d) 94.
e) 97.

42 - (ENEM MEC/2023) A amplitude é uma medida estatística que detecta a variabilidade dos dados de uma amostra. Ela pode ser utilizada como critério de qualidade da produção na indústria de peças, indicando, por exemplo, a necessidade do descarte de um lote defeituoso.
Uma fábrica analisou cinco unidades de cada um dos cinco lotes da produção de um tipo de peça que, por projeto, devem ter comprimento igual a 10 cm. As medidas, em centímetro, dessas unidades estão distribuídas a seguir:

- lote I: 9,80; 10,30; 10,30; 10,30 e 10,30;
- lote II: 10,55; 10,58; 10,58; 10,60 e 10,60;
- lote III: 9,80; 9,80; 10,00; 10,00 e 10,20;
- lote IV: 9,90; 9,90; 9,90; 10,20 e 10,20;
- lote V: 9,30; 9,30; 9,50; 9,50 e 9,50.

Foi determinado o descarte do lote que apresentasse a maior amplitude.

De acordo com o critério adotado, a fábrica descartará o lote

a) I.
b) II.
c) III.
d) IV.
e) V.

43 - (ENEM MEC/2023) Um tipo de semente necessita de bastante água nos dois primeiros meses após o plantio. Um produtor pretende estabelecer o melhor momento para o plantio desse tipo de semente, nos meses de outubro a março. Após consultar a previsão do índice mensal de precipitação de chuva (ImPC) da região onde ocorrerá o plantio, para o período chuvoso de 2020 - 2021, ele obteve os seguintes dados:

- outubro/2020: ImPC = 250 mm;
- novembro/2020: ImPC = 150 mm;
- dezembro/2020: ImPC = 200 mm;
- janeiro/2021: ImPC = 450 mm;
- fevereiro/2021: ImPC = 100 mm;
- março/2021: ImPC = 200 mm.

Com base nessas previsões, ele precisa escolher dois meses consecutivos em que a média mensal de precipitação seja a maior possível.

No início de qual desses meses o produtor deverá plantar esse tipo de semente?

a) Outubro.
b) Novembro.
c) Dezembro.

d) Janeiro.
e) Fevereiro.

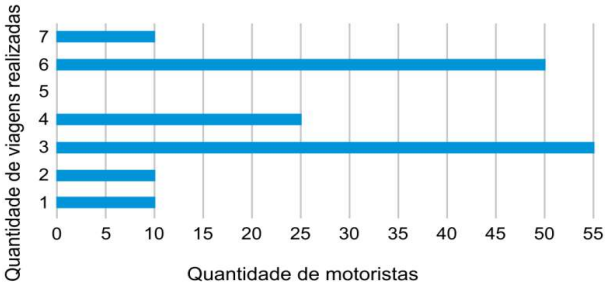
44 - (ENEM MEC/2023) Os 100 funcionários de uma empresa estão distribuídos em dois setores: Produção e Administração. Os funcionários de um mesmo setor recebem salários com valores iguais. O quadro apresenta a quantidade de funcionários por setor e seus respectivos salários.

Setor	Quantidade de funcionários	Salário (em real)
Produção	75	2 000,00
Administração	25	7 000,00

A média dos salários dos 100 funcionários dessa empresa, em real, é

a) 2 000,00.
b) 2 500,00.
c) 3 250,00.
d) 4 500,00.
e) 9 000,00.

45 - (ENEM MEC/2023) Uma empresa de transporte faz regularmente um levantamento do número de viagens realizadas durante o dia por todos os 160 motoristas cadastrados em seu aplicativo. Em um certo dia, foi gerado um relatório, por meio de um gráfico de barras, no qual se relacionaram a quantidade de motoristas com a quantidade de viagens realizadas até aquele instante do dia.



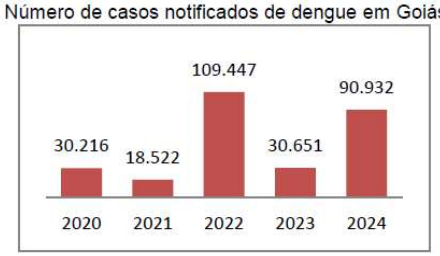
Comparando os valores da média, da mediana e da moda da distribuição das quantidades de viagens realizadas pelos motoristas cadastrados nessa empresa, obtém-se

a) mediana = média < moda.
b) mediana = moda < média.
c) mediana < média < moda.
d) moda < média < mediana.
e) moda < mediana < média.

46 - (Famema SP/2023) A nota de cada prova de um professor varia de 0 a 50. As notas de três alunos desse professor foram números inteiros consecutivos do intervalo de 0 a 50. Sabe-se também que a média aritmética dessas três notas foi 28. Observando a proporcionalidade, se o professor desse as notas de 0 a 10, a nota do aluno, dentre os três, que foi melhor nessa prova seria

a) 5,8.
b) 6,2.
c) 5,6.
d) 5,4.
e) 6,0.

47 - (UEG GO/2024) O gráfico a seguir foi elaborado a partir de informações da Secretaria de Estado da Saúde de Goiás sobre os casos notificados de dengue.

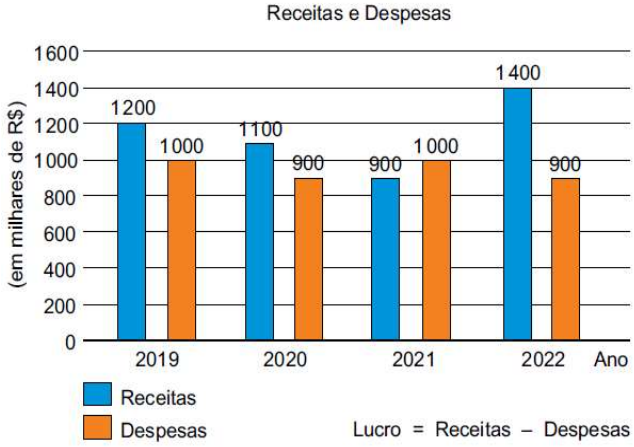


Fonte: Secretaria de Estado da Saúde de Goiás, abril de 2024.

Segundo os dados apresentados no gráfico, verifica-se que

a) a mediana dos números de casos notificados é 30.651.
b) a média dos números de casos notificados é 21.889.
c) o número de casos notificados em 2022 foi maior que o dobro da média.
d) o aumento percentual de casos do ano 2021 para 2022 é o mesmo aumento percentual de 2023 para 2024.
e) houve, no ano de 2024, um aumento em cerca de 33% no número de casos, comparado com o ano anterior.

48 - (Famerp SP/2024) O gráfico mostra o total de receitas e de despesas de uma empresa no balanço anual de quatro anos consecutivos.



Considerando-se o período representado no gráfico, sendo L o lucro médio anual da empresa e M a mediana das receitas, a média aritmética simples entre L e M, em milhares de reais, é igual a

a) 625.
b) 675.
c) 650.

d) 575.
e) 600.

49 - (Famema SP/2024) Em um programa de auditório, seis pessoas tiveram que listar em folhas de papel o maior número possível de objetos cujos nomes começavam com a letra A, no tempo de 1 minuto. Ao final desse tempo, cada participante apresentou quantidades diferentes de registros: 9, 10, 15, 18, 20 e 21 objetos.
Na conferência das listas apresentadas, os juízes do programa desclassificaram um dos participantes, o que fez com que a média aritmética do número de objetos, que havia sido calculada levando-se em consideração as quantidades de registros dos seis participantes, fosse 0,1 maior do que a média aritmética da quantidade de registros dos cinco participantes que permaneceram na disputa. Na situação descrita, o número de objetos listados inicialmente pelo participante que foi eliminado da disputa era igual a

a) 20.
b) 15.
c) 21.
d) 18.
e) 10.

Análise Combinatória

Princípio Fundamental da Contagem

O princípio fundamental da contagem pode ser explicado da seguinte maneira:

Se um evento é composto de duas etapas sucessivas e independentes, onde existem m possibilidades para a primeira etapa e, para cada uma dessas possibilidades, n possibilidades para a segunda etapa, então o número total de possibilidades para que o evento ocorra é o produto $m.n$.

Exemplo 1: Quantos números de 2 algarismos podemos formar com os algarismos 3, 5 e 7?

Os números formados podem ser:



Note que para o 1° algarismo temos 3 opções (3, 5 ou 7). Uma vez escolhido o primeiro algarismo, resta apenas 2 opções para o 2° algarismo.

Assim, a quantidade de números (x) formada por 2 algarismos é dada por:

$$x = 3 \,.\, 2 \Rightarrow x = 6 \text{ números.}$$

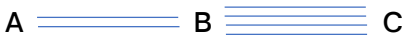
Portanto, são formados 6 números de dois algarismos.

Atenção!

O produto dos números de possibilidades se aplica a qualquer quantidade de etapas independentes.

Exemplo 2: Sabendo que existem 2 caminhos que ligam a cidade A à cidade B e 4 caminhos que ligam as cidades B e C, de quantas formas uma pessoa pode ir da cidade A à cidade C, passando pela cidade B?

Se 2 caminhos ligam A e B, e 4 caminhos ligam B e C, temos a seguinte representação:



Por meio do princípio fundamental da contagem, temos:

$$x = 2 \,.\, 4 \Rightarrow x = 8 \text{ formas.}$$

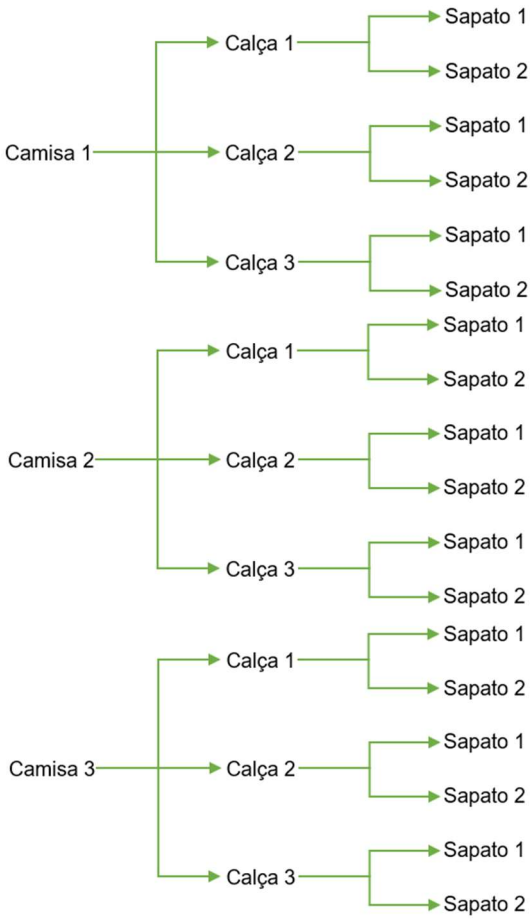
Existem 8 formas de ir de A até C, passando pela cidade B.

Exemplo 3: Um homem possui 3 camisas, 3 calças e 2 sapatos. De quantas maneiras esse homem pode se vestir utilizando apenas 1 camisa, 1 calça e 1 sapato?

Utilizando o princípio fundamental da contagem temos que a quantidade de maneiras (x) em que o homem pode se vestir é igual a:

$$x = 3 \cdot 3 \cdot 2 \Rightarrow x = 18 \text{ maneiras}$$

Ele pode se vestir das seguintes maneiras:



Permutações

Permutar significa embaralhar, trocar de posição. A permutação está ligada a ideia de organizar n elementos em uma fila com n posições, por exemplo, organizar 5 pessoas em fila.

Exemplo 1: Quantos números de três algarismos podem ser formados com os algarismos 4,8 e 9?

Trocando os algarismos 4, 8 e 9 de posição podemos formar os seguintes números de três algarismos:

489	849	948
498	894	984

Portanto, podem ser formados 6 números de três algarismos.

Exemplo 2: Quantas permutações existem com as letras da palavra ALVO?

Permutando as letras da palavra ALVO, temos:

ALVO	LAVO	VOAL	OALV
ALOV	LAOV	VOLA	OAVL
AVLO	LVAO	VALO	OLVA
AVOL	LVOA	VAOL	OLAV
AOLV	LOVA	VLAO	OVLA
AOVL	LOAV	VLOA	OVAL

Desse modo, existem 24 permutações com a palavra ALVO.

Permutação Simples

Permutações simples são agrupamentos ordenados, que se diferenciam pela ordem.

Exemplo 1: Permutações das letras C, E e U.

Mudando as letras C, E e U de ordem, temos:

CEU	ECU	UCE
CUE	EUC	UEC

Assim, existem 6 permutações com as letras C, E e U.

O número de permutações simples de n elementos – indicado por P_n – é representado por:

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 \Rightarrow P_n = n!.$$

Atenção!

Fatorial de um Número

- O fatorial de um número n é indicado por $n!$
- Para $n \geq 1$, temos que $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$
- Admite-se $0! = 1$.
- O fatorial de um número pode ser escrito de diversas maneiras:
  Exemplo: $12!$

$$12! = 12 \cdot 11!$$
$$12! = 12 \cdot 11 \cdot 10!$$
$$12! = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8!$$
$$12! = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Desse modo, as letras C, E e U (do exemplo anterior) possuem um número de permutações igual a:

$$P_n = n!$$

$$P_3 = 3! \Rightarrow P_3 = 3 \,.\, 2 \,.\, 1 \Rightarrow P_3 = 6 \; permutações.$$

Portanto, existem 6 possibilidades de permutações com as letras C, E e U. Essas permutações, assim como foram listadas no exemplo anterior, são: CEU, CUE, ECU, EUC, UCE e UEC.

Exemplo 2: De quantas maneiras uma família de 6 pessoas pode se organizar, uma ao lado da outra, para tirar uma foto?

Utilizando a expressão para a permutação simples $P_n = n!$, temos

$$P_6 = 6! \Rightarrow P_6 = 6 \,.\, 5 \,.\, 4 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 1 \Rightarrow P_6 = 720 \text{ maneiras.}$$

A família pode se organizar de 720 maneiras para tirar a foto.

Permutação com Repetição

Na permutação com repetição, o número de permutações de n elementos, sendo, β e γ elementos de tipos diferentes, com $\alpha + \beta + \gamma = n$, é determinado pela expressão:

$$P_n^{\alpha,\beta,\gamma} = \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}$$

Observação: β e γ correspondem ao número de vezes que certo elemento se repete.

Exemplo 1: Quantos anagramas podem ser formados com a palavra ANNA?

Como a palavra possui letras repetidas, A e N, vamos utilizar a expressão de permutação com repetição $P_n^{\alpha,\beta,\gamma} = \frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!}$, logo

$$P_4^{2,2} = \frac{4!}{2!2!} \Rightarrow P_4^{2,2} = \frac{4\,.3\,.2!}{2!2!} \Rightarrow P_4^{2,2} = \frac{4\,.3}{2\,.1} \Rightarrow P_4^{2,2} = 6 \text{ anagramas.}$$

A palavra ANNA pode formar 6 anagramas.

Exemplo 2: Quantos anagramas que começam com a letra N e terminam com a letra A podem ser formados com a palavra ARARINHA?

Fixando as duas letras em suas posições obrigatórias, temos:

N _ _ _ _ _ _ A

Desse modo, restam 6 letras para serem permutadas. Das letras restantes, observe que A e R se repetem. Assim, vamos utilizar a expressão de permutação com repetição $P_n^{\alpha,\beta,\gamma} = \frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!}$, então

$$P_6^{2,2} = \frac{6!}{2!2!} \Rightarrow P_6^{2,2} = \frac{6\,.5\,.4\,.3\,.2!}{2!2!} \Rightarrow P_6^{2,2} = \frac{6\,.5\,.4\,.3}{2\,.1} \Rightarrow P_6^{2,2} = 180 \text{ anagramas.}$$

Assim, podem ser formados 180 anagramas que começam com a letra N e terminam com a letra A.

Arranjo Simples

O arranjo simples de n elementos tomados p a p $(p \leq n)$ é o número de agrupamentos ordenados que podem ser formados com p dos n elementos dados.

Exemplo 1: Número de agrupamentos de 2 elementos distintos formados com as letras A, B, C, D e E.

Selecionando duas letras para formar os agrupamentos de dois elementos, temos os seguintes agrupamentos formados:

AB	BA	CA	DA	EA
AC	BC	CB	DB	EB
AD	BD	CD	DC	EC
AE	BE	CE	DE	ED

Desse modo, o número de agrupamentos de dois elementos é igual a 20.

O número de agrupamentos ordenados (arranjos) formados a partir de n elementos tomados p a p – indicado por $A_{n,p}$ ou A_n^p – é determinado por:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Observação: Quando $n = p$ concluímos que $A_{n,n} = P_n = n!$.

Exemplo 2: Sabendo que a senha de um cofre deve possuir 4 dígitos, quantas senhas são possíveis formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9?

Perceba que se forem escolhidos os algarismos 1, 2, 3 e 4, nesta ordem, a senha formada será 1234. Se forem escolhidos os mesmos algarismos na ordem 4, 3, 2 e 1, a senha formada será 4321. Portanto, como a ordem dos algarismos resulta em senhas diferentes, trata-se de um caso de arranjo.

Assim, o número de senhas possíveis é igual ao arranjo simples de 9 algarismos tomados 4 a 4. Utilizando a expressão $A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$, temos

$$A_{9,4} = \frac{9!}{(9-4)!} \Rightarrow A_{9,4} = \frac{9.8.7.6.5!}{5!} \Rightarrow A_{9,4} = 3024 \text{ senhas.}$$

Desse modo, é possível formar 3024 senhas para o cofre.

Exemplo 3: Quantos números de 4 algarismos distintos maiores que 3000 podemos formar a partir dos algarismos 1, 2, 3, 5, 6 e 9?

Perceba que similar ao exemplo anterior, a ordem dos algarismos é importante, ou seja, tal problema se caracteriza como arranjo. Como os números devem ser maiores que 3000 eles não podem começar com os algarismos 1 e 2. Desse modo, para o 1° algarismo existem apenas 4 possibilidades (3, 5, 6 e 9).

Escolhido o primeiro algarismo, não há restrições para a escolha dos demais algarismos. Assim, devem ser escolhidos 3 algarismos dentre os 5 restantes.

Portanto, a quantidade (x) de números com 4 algarismos e maiores que 3000 é expressa por:

$$x = 4 \,.\, A_{5,3} \Rightarrow x = 4 \,.\, \frac{5!}{(5-3)!} \Rightarrow x = 4 \,.\, \frac{5.4.3.2!}{2!} \Rightarrow x = 240 \text{ números.}$$

É possível formar 240 números de quatro algarismos distintos e maiores que 3000.

Combinação Simples

A combinação simples de n elementos tomados p a p $(p \leq n)$ é o número de subconjuntos que podem ser formados com p dos n elementos dados.

Observação: Diferente do arranjo simples – no qual a ordem dos elementos importa – a combinação simples considera apenas os subconjuntos de um conjunto, portanto, a ordem dos elementos não importa.

Exemplo 1: Maria foi à feira e comprou laranja, maçã, banana, mamão e ameixa. De quantas maneiras ela pode fazer uma vitamina utilizando apenas 3 frutas diferentes?

Perceba que se Maria escolher as frutas maçã/banana/ameixa ou banana/ameixa/maçã a vitamina produzida será a mesma, portanto, como a ordem das frutas não resulta em uma vitamina diferente, trata-se de um caso de combinação.

Desse modo, Maria pode fazer vitaminas com as seguintes frutas:

Laranja/Maçã/Banana	Laranja/Mamão/Ameixa
Laranja/Maçã/Mamão	Maçã/Banana/Mamão
Laranja/Maçã/Ameixa	Maçã/Banana/Ameixa
Laranja/Banana/Mamão	Maçã/Mamão/Ameixa
Laranja/Banana/Ameixa	Banana/Mamão/Ameixa

Logo, Maria pode fazer a vitamina de 10 maneiras.

O número de subconjuntos (combinações) formados a partir de n elementos tomados p a p – indicado por $C_{n,p}$ ou C_n^p – é expresso por:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Exemplo 2: Um plano possui 7 pontos distintos. Sabendo que 3 pontos nunca estão em linha reta, quantos triângulos podem ser formados a partir dos pontos desse plano?

O número de triângulos formados é igual à combinação 7 pontos tomados 3 a 3, desse modo, utilizando a expressão $C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$, temos

$$C_{7,3} = \frac{7!}{3!(7-3)!} \Rightarrow C_{7,3} = \frac{7.6.5.4!}{3!4!} \Rightarrow C_{7,3} = \frac{7.6.5}{3.2.1} \Rightarrow C_{7,3} = 35 \text{ triângulos.}$$

Logo, 35 triângulos podem ser formados a partir dos 7 pontos existentes no plano.

Exemplo 3: Os alunos do 3° ano do ensino médio de um colégio pretendem montar uma comissão para organizar a formatura que ocorrerá no final do ano. Sabendo que 30 alunos participarão da formatura e que, destes, 18 são mulheres e 12 são homens, de quantas maneiras uma comissão de 5 pessoas (3 mulheres e 2 homens) pode ser formada?

Perceba que a comissão não estabelece uma ordem entre os seus componentes, todos possuem a mesma importância, ou seja, o problema está relacionado à ideia de combinação.

Em relação às mulheres, devem ser escolhidas 3 dentre as 18 mulheres. Assim, a quantidade de maneiras possíveis é igual a $C_{18,3}$.

Quanto aos homens, devem ser escolhidos 2 dentre os 12 homens. Logo, a quantidade de maneiras possíveis para essa escolha é igual a $C_{12,2}$.

Se a comissão deve ser formada por 3 mulheres e 2 homens, pelo princípio fundamental da contagem, multiplicamos a quantidade de maneiras possíveis de escolher as mulheres pela quantidade de maneiras de escolher os homens. Portanto:

$$C_{18,3} \cdot C_{12,2} = \frac{18!}{3!\,(18-3)!} \cdot \frac{12!}{2!\,(12-2)!} \Rightarrow C_{18,3} \cdot C_{12,2} = \frac{18.17.16.15!}{3!\,15!} \cdot \frac{12.11.10!}{2!\,10!}$$

$$\Rightarrow C_{18,3} \cdot C_{12,2} = \frac{18.17.16}{3.2.1} \cdot \frac{12.11}{2.1} \Rightarrow C_{18,3} \cdot C_{12,2} = 816 \cdot 66 \Rightarrow C_{18,3} \cdot C_{12,2} = 53856 \text{ maneiras.}$$

Haverá 53856 maneiras de formar a comissão de formatura.

Atenção!

Propriedade da Combinação

- $C_{n,p} = C_{n,n-p}$

Exemplos:

a) $C_{30,27} = C_{30,3} = \frac{30 \,.\, 29 \,.\, 28}{3 \,.\, 2 \,.\, 1} = 4060$

b) $C_{100,99} = C_{100,1} = \frac{100}{1} = 100$

Exercícios

01 - (ENEM MEC/2020) A prefeitura de uma cidade está renovando os canteiros de flores de suas praças. Entre as possíveis variedades que poderiam ser plantadas, foram escolhidas cinco: amor-perfeito, cravina, petúnia, margarida e lírio. Em cada um dos canteiros, todos com composições diferentes, serão utilizadas somente três variedades distintas, não importando como elas serão dispostas.
Um funcionário deve determinar os trios de variedades de flores que irão compor cada canteiro.

De acordo com o disposto, a quantidade de trios possíveis é dada por

a) 5
b) $5 \cdot 3$
c) $\frac{5!}{(5-3)!}$
d) $\frac{5!}{(5-3)!2!}$
e) $\frac{5!}{(5-3)!3!}$

02 - (ENEM MEC/2020) O governador de um estado propõe a ampliação de investimentos em segurança no transporte realizado por meio de trens. Um estudo para um projeto de lei prevê que se tenha a presença de três agentes mulheres, distribuídas entre os 6 vagões de uma composição, de forma que duas dessas agentes não estejam em vagões adjacentes, garantindo assim maior segurança aos usuários.

Disponível em: www.sisgraph.com.br. Acesso em: 29 jan. 2015 (adaptado).

A expressão que representa a quantidade de maneiras distintas das três agentes serem distribuídas nos vagões é

a) $C_4^3 + 3!$
b) C_6^3
c) $C_4^3 \times 3!$
d) A_6^3
e) $A_4^3 \times 3!$

03 - (ENEM MEC/2020) Eduardo deseja criar um e-mail utilizando um anagrama exclusivamente com as sete letras que compõem o seu nome, antes do símbolo @.
O e-mail terá a forma *******@site.com.br e será de tal modo que as três letras "edu" apareçam sempre juntas e exatamente nessa ordem.
Ele sabe que o e-mail eduardo@site.com.br já foi criado por outro usuário e que qualquer outro agrupamento das letras do seu nome forma um e-mail que ainda não foi cadastrado.

De quantas maneiras Eduardo pode criar um e-mail desejado?

a) 59
b) 60
c) 118
d) 119
e) 120

04 - (ENEM MEC/2020) Um modelo de telefone celular oferece a opção de desbloquear a tela usando um padrão de toques como senha.



Os toques podem ser feitos livremente nas 4 regiões numeradas da tela, sendo que o usuário pode escolher entre 3, 4 ou 5 toques ao todo.

Qual expressão representa o número total de códigos existentes?

a) $4^5 - 4^4 - 4^3$
b) $4^5 + 4^4 + 4^3$
c) $4^5 \times 4^4 \times 4^3$
d) $(4!)^5$
e) 4^5

05 - (ENEM MEC/2020) Nos livros *Harry Potter*, um anagrama do nome do personagem "TOM MARVOLO RIDDLE" gerou a frase "I AM LORD VOLDEMORT".
Suponha que Harry quisesse formar todos os anagramas da frase "I AM POTTER", de tal forma que as vogais e consoantes aparecessem sempre intercaladas, e sem considerar o espaçamento entre as letras.

Nessas condições, o número de anagramas formados é dado por

a) 9!
b) 4!5!

c) $2 \times 4!5!$

d) $\frac{9!}{2}$

e) $\frac{4!5!}{2}$

06 - (Uncisal AL/2020) A comissão organizadora dos processos de seleção de novos alunos de uma universidade decidiu que candidatos oriundos de uma mesma escola de ensino médio deveriam ser alocados em salas de aplicação de provas diferentes, a fim de garantir a lisura do processo. Em um processo de seleção, inscreveram-se 5.000 candidatos, oriundos de 50 escolas diferentes. De cada uma dessas escolas, saíram exatamente 100 candidatos. Em um colégio onde serão aplicadas as provas dessa seleção, as salas têm capacidade para 40 candidatos.

A quantidade de maneiras distintas de se escolher e destinar 40 desses candidatos para realizarem as provas em uma das salas desse colégio, respeitando-se a decisão da comissão organizadora, é expressa por

a) $\frac{50! \times 100^{40}}{40! \times 10!}$.

b) $\frac{5.000!}{40! \times 4.960!}$.

c) $\frac{5.000!}{100! \times 50! ! \times 40!}$.

d) $\frac{50! \times 10! \times 40^{100}}{40! \times 100!}$.

e) $\frac{5.000! \times 50!}{4.900! \times 100! \times 40! \times 10!}$.

07 - (FGV/2020) Dez pessoas, entre elas Gilberto e Laura, pretendem formar uma comissão com quatro membros escolhidos entre os dez.
Quantas comissões são possíveis se Gilberto e Laura podem ou não comparecer mas nunca juntos na mesma comissão?

a) 182
b) 45
c) 240
d) 100
e) 70

08 - (FCM MG/2020) Um hospital possui 5 salas de cirurgias eletivas, utilizadas diariamente por 8 médicos cirurgiões. Duas dessas salas destinam-se apenas aos procedimentos ortopédicos, sendo ocupadas, em todos os momentos de funcionamento do hospital, por 1 dos 2 ortopedistas que compõem a equipe.

Em certo momento, o número de possibilidades de organizações para a ocupação das salas é de:

a) 120.

b) 240.
c) 336.
d) 6720.

09 - (Famema SP/2020) Em uma classe há 9 alunos, dos quais 3 são meninos e 6 são meninas. Os alunos dessa classe deverão formar 3 grupos com 3 integrantes em cada grupo, de modo que em cada um dos grupos haja um menino. O número de maneiras que esses grupos podem ser formados é

a) 30.
b) 60.
c) 120.
d) 90.
e) 15.

10 - (Fac. Santo Agostinho BA/2020) Na escola Bem Viver, a direção e os professores estão preocupados com o lanche hipercalórico e sem fonte de vitaminas que os alunos estavam levando para escola. Então, eles tiveram a ideia de ofertar lanches balanceados para os alunos durante o recreio.
A escola oferece no cardápio 2 tipos de salada de fruta, 4 tipos de sanduíches naturais, 3 variedades de sucos naturais e 6 tipos diferentes de frutas higienizadas.

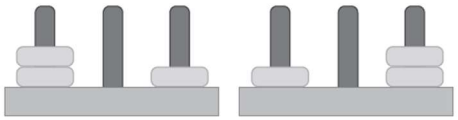


SHUTTERSTOCK/Africa Studio

Um aluno da escola decide comprar o lanche na escola, uma salada de fruta, um sanduíche natural, um suco e uma fruta, para comer mais tarde. De quantas maneiras o aluno poderá fazer seu pedido?

a) 120 maneiras.
b) 138 maneiras.
c) 140 maneiras.
d) 144 maneiras.
e) 166 maneiras.

11 - (ESPM SP/2020) A figura abaixo mostra dois exemplos diferentes de como distribuir 3 discos idênticos em 3 pinos.



O número total de maneiras de se fazer essa distribuição é:

a) 12
b) 6
c) 27
d) 8
e) 10

12 - (Univag MT/2020) Para uma atividade, serão confeccionados alguns cartões. Cada cartão deverá conter um número e a figura de um animal, nessa ordem. Os números podem ser de 1 a 9 e os animais podem ser elefante, cachorro, gato, pássaro ou zebra. Não serão confeccionados cartões com números ímpares cuja imagem de animal seja uma zebra. Não serão confeccionados cartões com os números 4 ou 5 cuja imagem de animal seja um gato ou um pássaro. Nessas condições, o número de cartões distintos que podem ser criados é

a) 35.
b) 36.
c) 37.
d) 34.
e) 38.

13 - (Unicamp SP/2020) Cinco pessoas devem ficar em pé, uma ao lado da outra, para tirar uma fotografia, sendo que duas delas se recusam a ficar lado a lado. O número de posições distintas para as cinco pessoas serem fotografadas juntas é igual a

a) 48.
b) 72.
c) 96.
d) 120.

14 - (Fac. Medicina de Petrópolis RJ/2020) Considere a palavra “ENXAME”.
Quantos são os anagramas dessa palavra que começam com “XA”?

a) 12
b) 60
c) 120
d) 24
e) 96

15 - (Fatec SP/2020) No mundo digital, podem-se definir as cores com o auxílio de um sistema de códigos que é composto pelo sinal de sustenido (#) seguido por seis caracteres que podem ser algarismos (que vão de 0 até 9) ou letras (de A até F).
Deste modo, são exemplos de códigos que representam cores:

Código	Cor
#084D6E	Azul Petróleo
#DA70D6	Orquídea
#FF00FF	Fúcsia

<https://tinyurl.com/y4qkz9j5>
Acesso em: 19.10.2019. Adaptado.

Logo, utilizando esse código, a quantidade de cores que é possível representar é igual a

a) 2^6
b) 2^{10}
c) 2^{12}
d) 2^{18}
e) 2^{24}

16 - (ENEM MEC/2021) Uma pessoa produzirá uma fantasia utilizando como materiais: 2 tipos de tecidos diferentes e 5 tipos distintos de pedras ornamentais. Essa pessoa tem à sua disposição 6 tecidos diferentes e 15 pedras ornamentais distintas.

A quantidade de fantasias com materiais diferentes que podem ser produzidas é representada pela expressão

a) $\frac{6!}{4!2!} \cdot \frac{15!}{10!5!}$
b) $\frac{6!}{4!2!} + \frac{15!}{10!5!}$
c) $\frac{6!}{2!} + \frac{15!}{5!}$
d) $\frac{6!}{2!} \cdot \frac{15!}{5!}$
e) $\frac{21!}{7!14!}$

17 - (Santa Casa SP/2021) Ana, Beatriz e Carina são médicas intensivistas. Diana, Elisa, Fernanda, Gabriela, Helena, Inês e Júlia são enfermeiras da unidade de terapia intensiva (UTI). No sábado, haverá plantão de duas médicas intensivistas e quatro enfermeiras nessa UTI. No domingo, o plantão será feito pela médica intensivista que não fez plantão no sábado e por cinco enfermeiras, sendo que três delas não fizeram plantão no sábado. O total de combinações diferentes que esse cronograma de trabalho do fim de semana permite é igual a

a) 840.
b) 245.
c) 420.
d) 490.
e) 630.

18 - (PUC Campinas SP/2021) Sorteando-se simultaneamente 5 cartas de um baralho comum com 52 cartas, o número de maneiras distintas de se retirar o rei de ouros e exatamente dois valetes de qualquer naipe é:

a) 7 056
b) 12 972
c) 25 944
d) 3 243
e) 6 486

19 - (PUC RS/2021) A papelaria Rei do Caderno decidiu fazer doações de estojos para os alunos da escola municipal do bairro no qual está localizada. Cada estojo deve ter 5 itens distintos, os quais serão selecionados entre 8 tipos de canetas e 6 tipos de lápis. Cada estojo deve conter pelo menos uma caneta e pelo menos um lápis. Quantos estojos diferentes poderão ser montados?

a) $2 \cdot 020$
b) $1 \cdot 990$
c) $1 \cdot 960$
d) $1 \cdot 940$

20 - (PUC Campinas SP/2021) Em um restaurante, o cliente deve montar seu prato escolhendo um tipo de grelhado, entre carne, frango ou peixe, e dois ingredientes de salada, entre alface, tomate, pepino e cenoura. A sobremesa também compõe o prato e é sempre uma salada de frutas, exceto se o cliente escolher alface entre os ingredientes de salada. Nesse caso, para a sobremesa, ele pode escolher entre salada de frutas ou sorvete. O número de diferentes pratos que podem ser montados é:

a) 27
b) 24
c) 21
d) 18
e) 30

21 - (FMABC SP/2021) Um pai comprou 7 camisas numeradas de 1 a 7, todas do mesmo tamanho. Seus filhos Gustavo e Henrique devem escolher, cada um, 3 camisas, e a camisa restante ficará com o pai. Sabendo que Gustavo não escolherá a camisa de número 5 e Henrique escolherá a camisa de número 1, o número de maneiras distintas de essa distribuição ser feita é

a) 40.
b) 35.
c) 45.
d) 30.
e) 50.

22 - (UCB DF/2021) Um grupo de 15 voluntários participará de um estudo a respeito da COVID-19. Desse grupo, 5 receberão uma medicação experimental contra COVID-19, 5 receberão uma medicação existente no mercado farmacêutico e o restante formará

o grupo de controle e receberá um placebo. De quantas maneiras distintas podem ser formados os 3 grupos?

a) 126.126
b) 63.063
c) 45.620
d) 252.252
e) 756.756

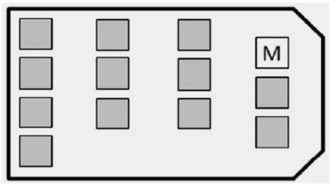
23 - (Famerp SP/2021) Em uma empresa, o número de pessoas atuando na limpeza em cada dia pode variar de 1 a 9, dependendo da ocupação do prédio. Para compor a equipe de cada dia, a empresa conta com 5 funcionários experientes e 4 em treinamento. Sabendo que a equipe de limpeza de um dia deve ter, necessariamente, um funcionário experiente a mais do que a quantidade de funcionários em treinamento, o total de equipes diferentes que podem ser formadas é igual a

a) 104.
b) 116.
c) 120.
d) 126.
e) 132.

24 - (Unicamp SP/2021) O número de anagramas da palavra REFLORESTAMENTO que começam com a sequência FLORES é

a) 9!.
b) 9!/2!.
c) 9!/(2! 2!).
d) 9!/(2! 2! 2!).

25 - (Fac. Medicina de Petrópolis RJ/2021) A Figura abaixo mostra o desenho de uma van. O lugar do motorista está assinalado com M e os lugares dos passageiros são os quadradinhos sombreados.



A van está, inicialmente, vazia e Bruno e Ana serão os primeiros a entrar. Eles desejam sentar juntos (um ao lado do outro), mas Ana não quer ficar ao lado do motorista.

Considerando esse contexto, de quantas maneiras esse casal pode se sentar nessa van?

a) 6
b) 14
c) 30
d) 7

e) 15

26 - (UEG GO/2022) Para montar um lanche, com três itens, estão disponíveis duas bebidas e quatro frutas. Necessariamente, o lanche deve ser composto por duas frutas e uma bebida, ou uma fruta e duas bebidas. De quantas maneiras possíveis pode-se montar o lanche?

a) 16
b) 12
c) 6
d) 32
e) 48

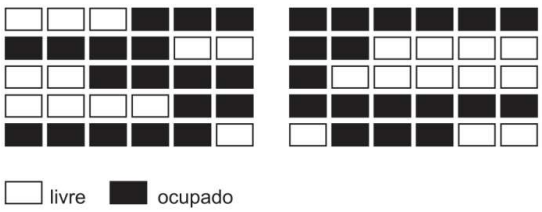
27 - (UEG GO/2022) O corpo de bombeiros possui uma equipe de 10 paramédicos. A cada chamada, 3 paramédicos saem juntos para fazer o atendimento. A quantidade de diferentes composições com 3 paramédicos que podem ser formadas é

a) 125
b) 120
c) 110
d) 100
e) 90

28 - (Fac. Medicina de Petrópolis RJ/2022) Quantos números naturais formados por quatro algarismos há, em que o algarismo das dezenas é igual ao algarismo das centenas, e o algarismo das unidades é diferente do algarismo das unidades de milhar?

a) 999
b) 900
c) 810
d) 729
e) 720

29 - (Fac. Cesgranrio RJ/2022) Ao organizar uma sala para uma palestra, os organizadores dispuseram 60 cadeiras em 5 filas. Quando Julia, Ana e Clara chegaram para assistir à palestra, diversos lugares já estavam ocupados, conforme a figura a seguir.



Se as três amigas querem sentar juntas (em três cadeiras consecutivas), de quantos modos distintos elas podem escolher três dos lugares disponíveis?

a) 8
b) 9

c) 12
d) 15
e) 19

30 - (ENEM MEC/2022) Uma montadora de automóveis divulgou que oferta a seus clientes mais de 1 000 configurações diferentes de carro, variando o modelo, a motorização, os opcionais e a cor do veículo. Atualmente, ela oferece 7 modelos de carros com 2 tipos de motores: 1.0 e 1.6. Já em relação aos opcionais, existem 3 escolhas possíveis: central multimídia, rodas de liga leve e bancos de couro, podendo o cliente optar por incluir um, dois, três ou nenhum dos opcionais disponíveis.

Para ser fiel à divulgação feita, a quantidade mínima de cores que a montadora deverá disponibilizar a seus clientes é

a) 8.
b) 9.
c) 11.
d) 18.
e) 24.

31 - (ENEM MEC/2022) Um prédio, com 9 andares e 8 apartamentos de 2 quartos por andar, está com todos os seus apartamentos à venda. Os apartamentos são identificados por números formados por dois algarismos, sendo que a dezena indica o andar onde se encontra o apartamento, e a unidade, um algarismo de 1 a 8, que diferencia os apartamentos de um mesmo andar. Quanto à incidência de sol nos quartos desses apartamentos, constatam-se as seguintes características, em função de seus números de identificação:

• naqueles que finalizam em 1 ou 2, ambos os quartos recebem sol apenas na parte da manhã;

• naqueles que finalizam em 3, 4, 5 ou 6, apenas um dos quartos recebe sol na parte da manhã;

• naqueles que finalizam em 7 ou 8, ambos os quartos recebem sol apenas na parte da tarde.

Uma pessoa pretende comprar 2 desses apartamentos em um mesmo andar, mas quer que, em ambos, pelo menos um dos quartos receba sol na parte da manhã.

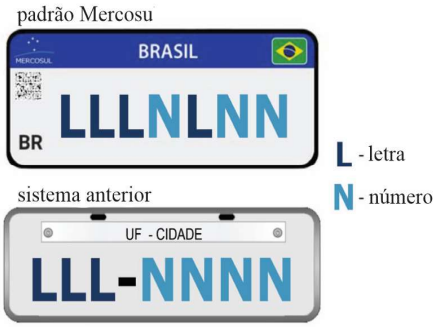
De quantas maneiras diferentes essa pessoa poderá escolher 2 desses apartamentos para compra nas condições desejadas?

a) $9 \times \frac{6!}{(6-2)!}$
b) $9 \times \frac{6!}{(6-2)! \times 2!}$
c) $9 \times \frac{4!}{(4-2)! \times 2!}$
d) $9 \times \frac{2!}{(2-2)! \times 2!}$
e) $9 \times \left(\frac{8!}{(8-2)! \times 2!} - 1 \right)$

32 - (PUC Campinas SP/2022) Uma chave Pix é formada por 9 algarismos distintos, sendo que o primeiro é 9. O número de chaves distintas com essas características é:

a) $9 \times 7!$
b) $8!$
c) $9!$
d) $7!$
e) $81 \times 6!$

33 - (Fuvest SP/2022) Atualmente, no Brasil, coexistem dois sistemas de placas de identificação de automóveis: o *padrão Mercosul* (o mais recente) e aquele que se iniciou em 1990 (o *sistema anterior*, usado ainda pela maioria dos carros em circulação). No sistema anterior, utilizavam-se 3 letras (em um alfabeto de 26 letras) seguidas de 4 algarismos (de 0 a 9). No padrão Mercosul adotado no Brasil para automóveis, são usadas 4 letras e 3 algarismos, com 3 letras nas primeiras 3 posições e a quarta letra na quinta posição, podendo haver repetições de letras ou de números. A figura ilustra os dois tipos de placas.



Dessa forma, o número de placas possíveis do padrão Mercosul brasileiro de automóveis é maior do que o do sistema anterior em

a) 1,5 vezes.
b) 2 vezes.
c) 2,6 vezes.
d) 2,8 vezes.
e) 3 vezes.

34 - (Famema SP/2022) Hugo deseja pintar as faces de um tetraedro regular com uma face de cada cor, todas diferentes, e possui tintas de 8 cores diferentes.

O número de maneiras que esse tetraedro pode ser pintado é

a) 64.
b) 70.
c) 140.
d) 210
e) 420.

35 - (UNEB BA/2023) Em um Concurso Público deseja-se produzir versões diferentes de uma mesma prova composta por 20 questões de múltipla escolha com 5 alternativas.

Nessas condições, a quantidade de gabaritos possíveis para essa prova é de:

a) 100
b) $\frac{20!}{15!5!}$
c) 20^5
d) $\frac{20!}{5!}$
e) 5^{20}

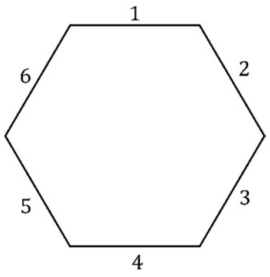
36 - (UFT TO/2023) Carol abriu uma conta em uma rede social que permite que sejam postadas nove fotos em uma grade com espaços dispostos como na figura seguinte. Em uma das linhas horizontais, Carol pretende colocar três fotos distintas de sua viagem para Salvador, em outra, ela pretende colocar três fotos distintas de sua viagem para o Jalapão e, na restante, pretende colocar três fotos distintas de sua viagem para o Rio de Janeiro. Carol possui 4 fotos de sua viagem para Salvador, 5 fotos de sua viagem para o Jalapão e 5 fotos de sua viagem para o Rio de Janeiro, todas distintas.

FOTO 9	FOTO 8	FOTO 7
FOTO 6	FOTO 5	FOTO 4
FOTO 3	FOTO 2	FOTO 1

Nestas condições, é **CORRETO** afirmar que o número total de possibilidades de Carol organizar suas fotos é:

a) $(5!)^2 \times 3!$
b) $(5!)^2 \times (3!)^2$
c) $(5!)^2 \times (4!)^2$
d) $5! \times 4!$

37 - (UFPR/2023) Ana, Beatriz e Carlos escolhem lugares para se sentar em uma mesa hexagonal regular. Cada lugar corresponde a um dos lados do hexágono, que estão numerados de 1 a 6, conforme a figura ao lado. Os lados 1 e 4 são considerados lados opostos na mesa, assim como 2 e 5, e 3 e 6. De quantas formas diferentes Ana, Beatriz e Carlos podem escolher os lugares numerados de modo que nenhum deles fique sentado ao lado oposto do outro?



a) 48.
b) 36.
c) 24.
d) 12.
e) 8.

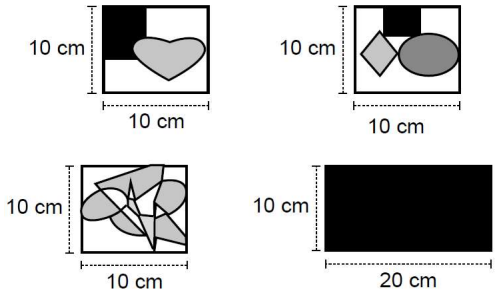
38 - (FMJ SP/2023) Uma praia tem 9 postos de guarda-vidas. Em cada posto atua um mesmo número de guarda-vidas de modo que cada guarda-vidas atua em apenas 2 postos e quaisquer 2 postos têm exatamente 1 guarda-vidas em comum. Dessa maneira, o número de guarda-vidas dessa praia é

a) 54.
b) 36.
c) 27.
d) 18.
e) 45.

39 - (FMABC SP/2023) A fim de criar uma senha de três dígitos, da qual pudesse se lembrar com facilidade, Amélia definiu que o primeiro dígito da senha seria um número ímpar, que o terceiro seria um número par e que a sequência formada pelos primeiro, segundo e terceiro dígitos fosse estritamente crescente. O número de senhas que podem ser formadas nessas condições é

a) 24.
b) 20.
c) 60.
d) 48.
e) 12.

40 - (ENEM MEC/2023) Uma costureira tem à sua disposição pelo menos duas unidades de cada um dos quatro tipos de retalhos retangulares com as estampas e os tamanhos apresentados.



Para confeccionar um tapete em formato retangular de 10 cm × 50 cm, ela utilizará os retalhos, na posição indicada na figura, costurando um lado de um a um lado do outro, sem que haja rotações desses retalhos. O modelo de tapete que pretende confeccionar deverá conter um único retalho de 10 cm × 20 cm e mais três retalhos de formato 10 cm × 10 cm, sendo que retalhos de mesma estampa não poderão ficar lado a lado.

Quantos modelos diferentes de tapetes poderão ser confeccionados?

a) 12
b) 24
c) 34
d) 48
e) 60

41 - (Famerp SP/2023) Para completar o álbum de figurinhas da Copa do Mundo, são necessárias 670 figurinhas diferentes. Sabendo-se que cada pacotinho contém 5 figurinhas, todas distintas, o total de pacotinhos diferentes que podem ser formados com as figurinhas do álbum pode ser calculado por meio do produto

a) $67 \times 223 \times 167 \times 667 \times 666$
b) $67 \times 669 \times 668 \times 667 \times 666$
c) $67 \times 223 \times 167 \times 667 \times 222$
d) $670 \times 669 \times 668 \times 667 \times 666$
e) 670^5

42 - (Famema SP/2023) Camila vai escolher uma senha para sua primeira conta bancária. A senha será de seis campos, sendo que:

- os dois primeiros campos têm que ser símbolos, iguais ou distintos, do conjunto {#, &};
- os dois campos seguintes devem ser elementos do conjunto {a, b, A, B}, iguais ou distintos (note que aA constitui senha diferente de AA); e
- os dois últimos campos devem ser elementos do conjunto {0, 2, 4}, iguais ou distintos.

Sendo assim, o maior número de senhas diferentes que Camila poderá escolher é igual a

a) 144.
b) 288.
c) 576.
d) 524.
e) 432.

43 - (Unicamp SP/2023) Em um sorteio com cartelas numeradas de 0001 a 2000, João decidiu comprar todas as cartelas em que a numeração exibisse os números 2 e 5, e nenhuma a mais. Por exemplo, João comprou as cartelas 1205 e 0025, mas não comprou as cartelas 0514 e 2000.

Considere as afirmações:

I) João comprou 108 cartelas.
II) Se ao invés das cartelas com 2 e 5, João tivesse comprado as cartelas com 1 e 5, ele teria comprado menos cartelas.
III) João comprou 18 cartelas que possuem o número 3.

Assinale a alternativa correta:

a) Todas as afirmações são verdadeiras.
b) Apenas a afirmação I é verdadeira.
c) Apenas a afirmação II é verdadeira.
d) Apenas as afirmações I e III são verdadeiras.

44 - (Fuvest SP/2023) Um professor precisa elaborar uma prova multidisciplinar que consta de duas questões de Matemática e seis de Física. Ele deve escolher questões de um banco de dados que contém três questões de Matemática e oito de Física. O número de provas distintas possíveis, sem levar em conta a ordem em que as questões aparecem, é:

a) 42
b) 54
c) 62
d) 72
e) 84

45 - (Unicamp SP/2024) Terminado o almoço, Ana foi à cozinha para a escolha das sobremesas. A garota estava decidida a pegar dois itens. Seu pai, preocupado com a alimentação dela, instruiu-a da seguinte forma: "Escolha o que quiser, mas, se você pegar algum pirulito, pegue também alguma fruta". Na cozinha, tinha 5 frutas diferentes, 3 pirulitos diferentes e 2 pedaços de bolos de sabores diferentes. De quantas formas Ana poderia escolher seus dois itens?

a) 34.
b) 36.
c) 45.
d) 47.

46 - (UFPR/2024) Ana quer descobrir a senha do celular de seu irmão Carlos, a qual é formada por uma sequência de quatro dígitos numéricos dentre 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Ela sabe que o irmão sempre usa, em suas senhas, os três dígitos de sua residência: 4, 6 e 8. Recentemente, ela descobriu que o número formado pela senha é ímpar. De acordo com essas informações, quantas possibilidades Ana deve considerar para descobrir a senha de Carlos?

a) 8
b) 11
c) 15
d) 24
e) 30

47 - (UEG GO/2024) Uma proposta alimentar de almoço é composta por 4 opções de carboidrato (batata-doce, mandioca, quinoa ou grão de bico), 4 opções de proteína (carne, frango, peixe ou ovo), 2 opções de sobremesa (fruta ou castanhas), além de salada à vontade. Uma pessoa que aderiu a essa proposta alimentar em 5 refeições na semana terá um cardápio variado e sem repetição, composto por 1 tipo de carboidrato, 1 tipo de proteína e 1 tipo de sobremesa, por aproximadamente

a) 5 semanas
b) 4 semanas
c) 8 semanas
d) 7 semanas
e) 6 semanas

48 - (FGV/2024) Uma tabela 5 x 5 é totalmente preenchida apenas com 0's e 1's, de tal maneira que uma de suas linhas tem a soma dos elementos igual a 1, outra tem soma igual a 2, outra tem soma igual a 3, outra tem soma igual a 4 e a restante tem soma igual a 5. O mesmo ocorre com as colunas dessa tabela, tendo somas iguais a 1, 2, 3, 4 e 5. A figura mostra um exemplo:

0	1	1	0	1
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	1	1	1	1
0	1	0	0	1

O número de tabelas diferentes que satisfazem as condições do enunciado é:

a) 25
b) 1225
c) 625
d) 120
e) 14400

49 - (FGV/2024) Em torno de uma mesa circular, há 25 cadeiras igualmente espaçadas e N pessoas sentadas, de modo que não há pessoas sentadas em cadeiras adjacentes, mas a próxima pessoa a sentar terá que sentar, necessariamente, em uma cadeira adjacente a uma pessoa já sentada. O valor mínimo de N é:

a) 10
b) 9
c) 12
d) 7
e) 8

50 - (Famema SP/2024) O número de anagramas distintos da palavra FAMEMA que começam e terminam com uma mesma letra é

a) 20.
b) 28.
c) 8.

d) 12.
e) 24.

Probabilidade

A Probabilidade é o ramo da Matemática que estuda experimentos ou fenômenos aleatórios, como lançar um dado não viciado e observar o número da face de cima, lançar uma moeda e observar a face de cima, resultado de um jogo de roleta e selecionar uma carta de um baralho e observar seu naipe.

Espaço Amostral

O espaço amostral, indicado por (Ω), é o conjunto formado por todos os resultados possíveis de um fenômeno ou experimento aleatório. Denotamos por $n(\Omega)$ o número de resultados possíveis do espaço amostral Ω.

Exemplo 1: Lançar uma moeda duas vezes e observar o número de caras.

Temos que $\Omega = 0,1,2$, e $n(\Omega) = 3$.

Exemplo 2: Lançar um dado e observar o número da face de cima.

Temos que $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, e $n(\Omega) = 6$.

Exemplo 3: De uma urna contendo 3 bolas vermelhas (V), 2 bolas brancas (B) e 5 bolas azuis (A), extrair uma bola e observar sua cor.

Temos que $\Omega = \{V, B, A\}$ e $n(\Omega) = 3$.

Evento

Consideremos um experimento aleatório, cujo espaço amostral é Ω. Chamaremos de evento todo subconjunto de Ω. Em geral, indicamos um evento por uma letra maiúscula do alfabeto: $A, B, \dots, Y, Z$.

Diremos que um evento A ocorre se, realizado o experimento, o resultado obtido for pertencente a A. Além disso, o número de ocorrências do evento A é indicado por $n(A)$.

Exemplo: Lançar um dado e observar o número da face de cima.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Eis alguns eventos:

$\boldsymbol{A}$: ocorrência de número ímpar, $A = 1,3,5$, e $n(A) = 3$.
$\boldsymbol{B}$: ocorrência de número primo, $B = 2,3,5$, e $n(B) = 3$.
$\boldsymbol{C}$: ocorrência de número menor que 3, $C = 1,2$, e $n(C) = 2$.
$\boldsymbol{D}$: ocorrência de número menor que 7, $D = 1,2,3,4,5,6$, e $n(D) = 6$.
$\boldsymbol{E}$: ocorrência de número maior que 7, $E = \emptyset$, e $n(E) = 0$.

Probabilidade de um evento

A probabilidade de que um evento A ocorra em relação ao espaço amostral Ω, indicado por $P(A)$, é definido por

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}.$$

Exemplo: **Ao lançar um dado e observar o número da face de cima, obtemos que:**

- a probabilidade de que ocorra um número primo será

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2};$$

- a probabilidade de que ocorra um número menor que 3 será

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3};$$

- a probabilidade de que ocorra um número menor que 7 será

$$P(D) = \frac{n(D)}{n(\Omega)} = \frac{6}{6} = 1;$$

- a probabilidade de que ocorra um número maior que 7 será

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{0}{6} = 0.$$

Atenção!

- Se A é um evento, então $0 \leq P(A) \leq 1$.
- A probabilidade do evento certo é 1.

Probabilidade de um evento complementar

A probabilidade de que um evento A **não** ocorra em relação ao espaço amostral Ω, indicado por $P(A^c)$, é definido por

$$P(A^c) = 1 - P(A).$$

Exemplo: **Ao lançar um dado e observar o número da face de cima, obtemos que:**

- a probabilidade de que não ocorra um número primo será

$$P(B^c) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2};$$

- a probabilidade de que não ocorra um número menor que 3 (o número obtido é maior que 3) será

$$P(C^c) = 1 - P(C) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3};$$

- a probabilidade de que não ocorra um número menor que 7 (o número obtido é maior que 7) será

$$P(D^c) = 1 - P(D) = 1 - 1 = 0;$$

- a probabilidade de que não ocorra um número maior que 7 (o número obtido é menor que 7) será

$$P(E^c) = 1 - P(E) = 1 - 0 = 1.$$

Probabilidade da união de dois eventos

A probabilidade de que o evento A ou o evento B ocorram, em relação ao espaço amostral Ω, é dada por:

$$P(A \cup B) = \frac{n(A) + n(B) - n(A \cap B)}{n(\Omega)},$$

onde $n(A)$, $n(B)$ e $n(A \cap B)$ são respectivamente os números de elementos de A, de B e de $A \cap B$.

Exemplo: Ao lançar um dado e observar o número da face de cima, obtemos que:

- a probabilidade de que ocorra um número primo ou um número menor que 3 será

$$P(B \cup C) = \frac{n(B) + n(C) - n(B \cap C)}{n(\Omega)} = \frac{3 + 2 - 1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3};$$

- a probabilidade de que ocorra um número ímpar ou um número primo será

$$P(A \cup B) = \frac{n(A) + n(B) - n(A \cap B)}{n(\Omega)} = \frac{3 + 3 - 2}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3};$$

- a probabilidade de que ocorra um número ímpar ou um número maior que 7 será

$$P(A \cup E) = \frac{n(A) + n(E) - n(A \cap E)}{n(\Omega)} = \frac{3 + 0 - 0}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Probabilidade da intersecção de dois eventos

A probabilidade de que o evento A e o evento B ocorram **simultaneamente**, em relação ao espaço amostral Ω, é dada por:

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)}.$$

Exemplo: Ao lançar um dado e observar o número da face de cima, obtemos que:

- a probabilidade de que ocorra um número primo e menor que 3 será

$$P(B \cap C) = \frac{n(B \cap C)}{n(\Omega)} = \frac{1}{6};$$

- a probabilidade de que ocorra um número ímpar e primo será

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3};$$

- a probabilidade de que ocorra um número ímpar e maior que 7 será

$$P(A \cap E) = \frac{n(A \cap E)}{n(\Omega)} = \frac{0}{6} = 0.$$

Probabilidade condicional

A probabilidade de que o evento A ocorra, dado que o evento B já ocorreu, denotada por $P(B)$, é dada por:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \qquad P(B) \neq 0.$$

Observação: Neste caso a ordem dos eventos não pode ser trocada.

Exemplo 1: Ao lançar um dado e observar o número da face de cima, verifica-se que o número obtido é um número ímpar. A probabilidade de que este número seja menor que 3 será

$$P(C|A) = \frac{P(C \cap A)}{P(A)} = \frac{1/6}{3/6} = \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{3} = \frac{1}{3}.$$

Exemplo 2: Ao lançar um dado e observar o número da face de cima, verifica-se que o número obtido é um número menor que 3. A probabilidade de que este número ímpar será

$$P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{1/6}{2/6} = \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{2} = \frac{1}{2}.$$

Exercícios

01 - (ENEM MEC/2021) A senha de um cofre é uma sequência formada por oito dígitos, que são algarismos escolhidos de 0 a 9. Ao inseri-la, o usuário se esqueceu dos dois últimos dígitos que formam essa senha, lembrando somente que esses dígitos são distintos.

Digitando ao acaso os dois dígitos esquecidos, a probabilidade de que o usuário acerte a senha na primeira tentativa é

a) $\frac{2}{8}$

b) $\frac{1}{90}$

c) $\frac{2}{90}$

d) $\frac{1}{100}$

e) $\frac{2}{100}$

02 - (ENEM MEC/2021) Em uma fábrica de circuitos elétricos, há diversas linhas de produção e montagem. De acordo com o controle de qualidade da fábrica, as peças produzidas devem seguir um padrão. Em um processo produtivo, nem todas as peças produzidas são totalmente aproveitáveis, ou seja, há um percentual de peças defeituosas que são descartadas. Em uma linha de produção dessa fábrica, trabalham três máquinas, M_1, M_2 e M_3, dia e noite. A máquina M_1 produz 25% das peças, a máquina M_2 produz 30% e a máquina M_3 produz 45%. O percentual de peças defeituosas da máquina M_1 é de 2%, da máquina M_2 é de 3% e da máquina M_3 é igual a 4%.

A probabilidade de uma peça defeituosa ter sido produzida pela máquina M_2 é mais próxima de

a) 15,6%
b) 28,1%
c) 43,7%
d) 56,2%
e) 71,8%

03 - (Fac. Israelita de C. da Saúde Albert Einstein SP/2021) Em um kit com 10 testes rápidos de gravidez, dois estão com defeito de fabricação. Se os dez testes forem alinhados aleatoriamente, a probabilidade de que os dois com defeito fiquem lado a lado no alinhamento é de

a) 18%.
b) 20%.
c) 16%.
d) 15%.
e) 12%.

04 - (ENEM MEC/2021) O organizador de uma competição de lançamento de dardos pretende tornar o campeonato mais competitivo. Pelas regras atuais da competição, numa rodada, o jogador lança 3 dardos e pontua caso acerte pelo menos um deles no alvo. O organizador considera que, em média, os jogadores têm, em cada lançamento, $\frac{1}{2}$ de probabilidade de acertar um dardo no alvo.
A fim de tornar o jogo mais atrativo, planeja modificar as regras de modo que a probabilidade de um jogador pontuar em uma rodada seja igual ou superior a $\frac{9}{10}$. Para isso, decide aumentar a quantidade de dardos a serem lançados em cada rodada.

Com base nos valores considerados pelo organizador da competição, a quantidade mínima de dardos que devem ser disponibilizados em uma rodada para tornar o jogo mais atrativo é

a) 2.
b) 4.
c) 6.
d) 9.
e) 10.

05 - (UnirG TO/2021) Um supermercado oferece a seus clientes apenas as marcas P e Q de um produto de limpeza que é vendido em pacotes de um quilo. Da totalidade desses produtos expostos à venda nas gôndolas do supermercado, 25% são da marca P. Com relação aos produtos expostos à venda, sabe-se, também, que: 20% dos produtos da marca P possuem menos de um mês de validade; e 5% dos produtos da marca Q possuem menos de um mês de validade.
Uma cliente comprou um pacote do produto de limpeza nesse supermercado, escolhendo-o aleatoriamente, sem observar a marca e a validade. Ao chegar em casa, ela verificou que a validade do produto que comprou era inferior a um mês. A probabilidade, expressa em porcentagem, de o produto comprado pela cliente ser da marca Q é, aproximadamente, igual a:

a) 43%
b) 54%
c) 50%
d) 38%

06 - (UEMA/2021) Em um debate entre candidatos à Prefeitura de uma determinada cidade, havia, no auditório, um público com um número de mulheres igual ao número de homens. Do total de presentes, sabe-se que 13,2% dos homens e 0,33% das mulheres apoiam o candidato A.

A probabilidade de que seja homem um apoiador do candidato A, selecionado ao acaso, é

a) 3/123
b) 1/2
c) 1287/100
d) 40/41
e) 1353/100

07 - (UEMA/2021) Num comício com 1.800 apoiadores a uma candidatura a prefeito de uma cidade do interior brasileiro, foram identificadas todas as pessoas que estavam com COVID-19 e as gripadas.
Ao final da identificação, constatou-se que 6% estavam com COVID-19; 3% estavam gripadas; 92% das pessoas não estavam com nenhuma das duas doenças.
Ao escolher um apoiador desse comício ao acaso e, sabendo que ele não está com COVID-19, qual a probabilidade de que esse apoiador esteja somente gripado?

a) 54/7
b) 3/91
c) 1/47
d) 5/188
e) 12/85

08 - (UFMS/2021) Na fazenda Boa Esperança, a probabilidade de, pela inseminação, nascer um macho é de 0,6 e de nascer uma fêmea é de 0,4. Foram feitas 4 inseminações. Se todas vingarem, qual a probabilidade de nascer pelo menos um macho?

a) 97,44%.
b) 87,04%.
c) 76%.
d) 60%.
e) 40%.

09 - (UEG GO/2021) Na prova de Estatística, a probabilidade de a questão A ser resolvida corretamente é $\frac{3}{7}$. Se quatro alunos fizerem essa prova, a probabilidade de a questão ser resolvida corretamente por pelo menos um aluno é aproximadamente

a) 0,42
b) 0,03
c) 0,59
d) 0,96
e) 0,89

10 - (Univag MT/2021) Uma urna contém apenas bolas brancas e bolas pretas, sendo que a diferença entre o número de bolas brancas e o número de bolas pretas é igual a 70. Sabendo que a probabilidade de se retirar uma bola branca dessa urna é igual a $\frac{8}{15}$, o número total de bolas na urna é

a) 1 190.
b) 1 120.
c) 1 260.
d) 1 050.
e) 1 330.

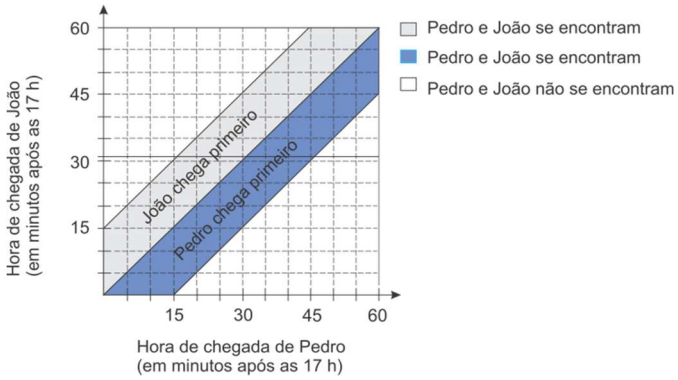
11 - (UFPR/2021) Ana, Beatriz e Carlos pediram uma pizza de oito fatias, metade sabor mozarela e outra metade sabor calabresa. Sabendo que Ana e Carlos preferem calabresa e Beatriz prefere mozarela, após cada um dos três ter escolhido uma fatia de pizza de acordo com sua preferência, qual é a probabilidade de Ana, Beatriz e Carlos terem escolhido pedaços que estejam lado a lado na pizza?

a) $\frac{1}{12}$
b) $\frac{1}{6}$
c) $\frac{1}{4}$
d) $\frac{1}{3}$
e) $\frac{1}{2}$

12 - (Acafe SC/2021) Uma fábrica de peças automotivas produz três tipos de peças P_1,P_2 e P_3. Sabe-se que 30% das peças produzidas nessa fábrica são do tipo P_1 e 95% das peças do tipo P_1 não apresentam defeitos. Escolhendo, ao acaso, uma das peças produzidas por essa fábrica, qual a probabilidade de se selecionar uma peça defeituosa do tipo P_1?

a) 35%
b) 3%
c) 5%
d) 1,5%

13 - (UCB DF/2021)



Pedro e João combinam de se encontrar no restaurante favorito deles entre 17 h e 18 h. Quem chega primeiro espera 15 minutos pelo outro e depois sai (veja a figura). Qual é a probabilidade de Pedro e João realmente se encontrarem, supondo que seus horários de chegada sejam aleatórios entre 17 h e 18 h?

a) $\frac{1}{2}$
b) $\frac{1}{16}$
c) $\frac{1}{4}$
d) $\frac{5}{16}$
e) $\frac{7}{16}$

14 - (Unesp SP/2021) Para a identificação do câncer de próstata utiliza-se, além do exame digital, o exame de sangue PSA (antígeno prostático específico), que é um procedimento básico para início do rastreamento. No entanto, o PSA é um biomarcador imperfeito, pois pode levar a falsos diagnósticos e excesso de tratamento cirúrgico.
Um grupo de pesquisadores obteve, para uma determinada população, que a probabilidade de um resultado do exame PSA ser verdadeiro, ou seja, indicar positivo para quem tem a doença ou negativo para quem não tem a doença, é de 60%. Ao analisar o resultado de dois testes desse grupo, a probabilidade de que pelo menos um seja falso é de

a) 64%.
b) 16%.
c) 40%.
d) 48%.
e) 24%.

15 - (Unesp SP/2021) Um estudo para determinar a probabilidade da efetividade de um novo exame para obtenção do diagnóstico de uma doença baseou-se nos resultados obtidos em um grupo constituído de 1 620 pessoas. A tabela mostra os resultados desse estudo.

		Possui a doença?	
		SIM	NÃO
Resultado do Exame	Positivo	204	612
	Negativo	36	768

A análise dos resultados mostra que, apesar de a probabilidade de o teste detectar a doença em quem a possui ser de _____, a probabilidade de uma pessoa desse grupo que obtém um resultado positivo não ter a doença, ou seja, um falso positivo, é de _____, indicando que esse novo exame precisa ser aprimorado.

Os percentuais que completam, respectivamente, a frase são:

a) 85% ; 38%.
b) 50% ; 38%.
c) 50% ; 75%.
d) 85% ; 44%.
e) 85% ; 75%.

16 - (Famema SP/2021) A figura indica as marcações na frente e no verso de três cartas:



Sorteando-se aleatoriamente o lado que cada carta ficará voltada para cima em uma mesa, a probabilidade de que pelo menos uma das cartas tenha a letra M voltada para cima é igual a

a) $\frac{3}{5}$
b) $\frac{2}{3}$
c) $\frac{5}{8}$
d) $\frac{3}{4}$
e) $\frac{1}{2}$

17 - (UFU MG/2022) No início da pandemia de COVID, alguns países adotaram procedimentos de controle no fluxo de pessoas em seus aeroportos internacionais. Em um determinado país, por questões logísticas, a cada voo que chegava do exterior com um número par, **p**, de passageiros, eram sorteados aleatoriamente $\frac{p}{2}$ desses passageiros para serem entrevistados, na tentativa de aferir possíveis sintomas da doença. Duas irmãs viajam juntas em um voo para esse país com um total de 200 passageiros.
Nas condições apresentadas, a probabilidade de que ambas sejam entrevistadas é aproximadamente igual a

a) 2%

b) 25%
c) 75%
d) 51%

18 - (ENEM MEC/2022)

Sete países americanos, Argentina, Brasil, Canadá, Chile, Estados Unidos, Paraguai e Uruguai; e sete países europeus, Portugal, Espanha, França, Inglaterra, Itália, Alemanha e Suíça, decidem criar uma comissão com representantes de oito desses países, objetivando criar políticas de incentivo e regulação do turismo entre eles. Na hipótese de criação da comissão, serão escolhidos aleatoriamente quatro representantes de países das Américas e quatro representantes de países europeus, não podendo estar na comissão dois representantes de um mesmo país.

Qual é a probabilidade de o Brasil e a França pertencerem a essa comissão?

a) $\frac{1}{182}$
b) $\frac{1}{49}$
c) $\frac{1}{4}$
d) $\frac{1}{13}$
e) $\frac{16}{49}$

19 - (UFGD MS/2022) No ano de 2019, a Pesquisa Nacional de Saúde (PNS) estimou um percentual total de adultos (pessoas de 18 anos ou mais de idade) fumantes em 12,6% da população brasileira. A pesquisa revelou que 59,2% desses fumantes eram do sexo masculino. Na população de fumantes, 15% residiam na zona rural, dos quais 70% era do sexo masculino.

IBGE. **PNS - Pesquisa Nacional de Saúde**. Disponível em: https://www.ibge.gov.br/estatisticas/sociais/saude.html. Acesso em: 12 out. 2021.

Selecionando-se, ao acaso, um indivíduo fumante dessa pesquisa, verificou-se ser ele residente da zona urbana. Qual a probabilidade de esse indivíduo ser do sexo feminino?

a) 40,8%.
b) 42,7%.
c) 48,7%.
d) 30,0%.
e) 89,0%.

20 - (FMABC SP/2022) Considere três caixas contendo cartelas de certo medicamento. A caixa P tem 10 cartelas, das quais 4 já ultrapassaram o prazo de validade. A caixa Q tem 6 cartelas, das quais 1 já ultrapassou o prazo de validade, e a caixa R tem 9 cartelas, das quais 3 já ultrapassaram o prazo de validade. Tomando-se aleatoriamente

uma das caixas e retirando-se ao acaso uma cartela dessa caixa, a probabilidade de que essa cartela contenha medicamento com prazo de validade ultrapassado é de

a) $\frac{2}{3}$
b) $\frac{4}{15}$
c) $\frac{3}{5}$
d) $\frac{1}{3}$
e) $\frac{3}{10}$

TEXTO: 1 - Comum à questão: 21

No início da epidemia de COVID–19, o governo chinês tomou uma série de medidas na tentativa de inibir a disseminação desse vírus, entre as quais, a suspensão da circulação de trens em três cidades: Wuhan, Huanggang e Ezhou.
Suponha que, na manhã anterior à suspensão de circulação dos trens, em uma estação, 36 passageiros foram selecionados e examinados.

Constatou-se que:
- somente 20 dos passageiros selecionados estiveram em Wuhan ou em Huanggang;
- exatamente 6 desses 20 passageiros estiveram em Wuhan e em Huanggang; e
- nenhum desses 20 passageiros esteve em Ezhou.

21 - (Fatec SP/2022) Escolhendo-se um passageiro ao acaso, dentre os selecionados e examinados, a probabilidade de ele ter estado em exatamente duas das três cidades citadas no texto é de

a) $\frac{1}{6}$.
b) $\frac{1}{3}$.
c) $\frac{5}{9}$.
d) $\frac{7}{9}$.
e) $\frac{17}{36}$.

22 - (Fac. Cesgranrio RJ/2022) Seiscentos talões de uma rifa, numerados de 1 a 600, foram vendidos. Apenas um número será premiado. Uma pessoa adquiriu todos os talões da rifa com números menores que 10 e, também, todos os talões com números maiores que 591.

Qual é a probabilidade de que essa pessoa ganhe o prêmio?
a) 18%
b) 10%

c) 6%
d) 5%
e) 3%

23 - (ENEM MEC/2022) Em um jogo de bingo, as cartelas contêm 16 quadrículas dispostas em linhas e colunas. Cada quadrícula tem impresso um número, dentre os inteiros de 1 a 50, sem repetição de número. Na primeira rodada, um número é sorteado, aleatoriamente, dentre os 50 possíveis. Em todas as rodadas, o número sorteado é descartado e não participa dos sorteios das rodadas seguintes. Caso o jogador tenha em sua cartela o número sorteado, ele o assinala na cartela. Ganha o jogador que primeiro conseguir preencher quatro quadrículas que formam uma linha, uma coluna ou uma diagonal, conforme os tipos de situações ilustradas na Figura 1.



Figura 1

O jogo inicia e, nas quatro primeiras rodadas, foram sorteados os seguintes números: 03, 27, 07 e 48. Ao final da quarta rodada, somente Pedro possuía uma cartela que continha esses quatro números sorteados, sendo que todos os demais jogadores conseguiram assinalar, no máximo, um desses números em suas cartelas. Observe na Figura 2 o cartão de Pedro após as quatro primeiras rodadas.

03	48	12	27
49	11	22	05
29	50	19	45
33	23	38	07

Figura 2

A probabilidade de Pedro ganhar o jogo em uma das duas próximas rodadas é

a) $\frac{1}{46}+\frac{1}{45}$
b) $\frac{1}{46}+\frac{2}{46\times 45}$
c) $\frac{1}{46}+\frac{8}{46\times 45}$
d) $\frac{1}{46}+\frac{43}{46\times 45}$
e) $\frac{1}{46}+\frac{49}{46\times 45}$

24 - (ENEM MEC/2022) A *World Series* é a decisão do campeonato norte-americano de beisebol. Os dois times que chegam a essa fase jogam, entre si, até sete partidas. O primeiro desses times que completar quatro vitórias é declarado campeão.
Considere que, em todas as partidas, a probabilidade de qualquer um dos dois times vencer é sempre $\frac{1}{2}$.

Qual é a probabilidade de o time campeão ser aquele que venceu a primeira partida da *World Series*?

a) $\frac{35}{64}$
b) $\frac{40}{64}$
c) $\frac{42}{64}$
d) $\frac{44}{64}$
e) $\frac{52}{64}$

25 - (Unesp SP/2022) Em uma sala de aula com meninos e meninas, ninguém ambidestro, um quarto dos meninos são canhotos e as meninas canhotas são um quarto do total de estudantes canhotos da sala. O número de meninos destros na sala é igual a três décimos do total de estudantes da sala. Sorteando-se ao acaso um estudante dessa sala, a probabilidade de que seja uma aluna canhota é igual a:

a) $\frac{3}{5}$
b) $\frac{1}{30}$
c) $\frac{1}{15}$
d) $\frac{1}{10}$
e) $\frac{2}{15}$

26 - (PUC Campinas SP/2022) Em uma escola, 60% dos estudantes são moças e 15% são rapazes esportistas. Se um estudante escolhido ao acaso dessa escola é um rapaz, a probabilidade de ele não ser um esportista é:

a) 0,375
b) 0,625
c) 0,250
d) 0,400
e) 0,550

27 - (Unicamp SP/2022) Pedra-papel-tesoura, também chamado *jankenpon* ou *jokempô*, é um jogo recreativo para duas pessoas. Nesse jogo, os participantes usam as mãos para representar os símbolos de pedra, papel e tesoura, conforme mostrado nos *emojis* a seguir:



Pelas regras do jogo, o participante que escolher “pedra” ganha do que escolher tesoura; o participante que escolher tesoura ganha do que escolher papel; por fim, o que escolher papel ganha do que escolher pedra. Se ambos escolherem os mesmos símbolos, eles empatam.

Admitindo que os participantes escolhem os símbolos com igual probabilidade, qual a chance de acontecer pelo menos um empate em três partidas?

a) 16/27.
b) 17/27.
c) 18/27.
d) 19/27.

28 - (Uniderp MS/2022) Um estudo foi realizado com um grupo de mulheres com supostos tumores nos seios, para avaliar se fizeram exames periódicos, como a mamografia e a biópsia, na ocasião da descoberta do tumor. Esta pesquisa mostrou que 77% dessas mulheres procuraram uma clínica para fazer os respectivos exames.

Idade das mulheres do grupo	Fizeram exames	Não fizeram exames
Menos de 65 anos		0,125
65 anos ou mais	0,425	

Com base nas informações do texto e da tabela, referentes aos resultados desse estudo, afirma-se:

I. A probabilidade de uma mulher do grupo ter menos de 65 anos e ter feito os exames é de 24,5%.
II. A probabilidade de uma mulher do grupo não ter feito exames é igual a 0,23.
III. A probabilidade de uma mulher do grupo não ter feito exames e ter 65 anos ou mais é de 12,5%.
IV. A frequência da não realização dos exames nesse grupo foi menor que a frequência da realização dos exames, independentemente da idade da paciente.

Com relação as afirmativas I, II, III e IV, estão corretas, apenas:

a) I e II.
b) I e IV.
c) II e III.
d) II e IV.
e) III e IV.

29 - (Unesp SP/2022) Analise a tabela, que indica os resultados de um estudo para avaliação da relação entre o peso e a pressão arterial de um grupo de indivíduos.

Pressão arterial	Peso deficiente	Peso normal	Peso em excesso
Normal	20%	45%	15%
Elevada	1%	9%	10%

Renato fez parte desse estudo e sabe que está com excesso de peso. Ao ver a tabela com o resultado do estudo, calculou corretamente que a probabilidade da aferição da sua pressão arterial ter indicado valores elevados é de

a) 12%.
b) 4%.
c) 50%.
d) 40%.
e) 10%.

30 - (Famerp SP/2022) Um grupo de 50 pessoas foi questionado sobre a prática regular de exercícios aeróbicos e anaeróbicos. Os resultados da pesquisa estão indicados na tabela.

Exercício praticado regularmente	Total de pessoas
Aeróbico	37
Anaeróbico	29
Nenhum	6

Sorteando-se ao acaso uma dessas pessoas, a probabilidade de que ela pratique regularmente ambas as formas de exercícios avaliadas no estudo é de

a) 44%.
b) 2%.
c) 60%.
d) 22%.
e) 10%.

31 - (Famema SP/2022) Em um grupo de voluntários, sabe-se que 2% estão infectados com um determinado vírus. Em um experimento para avaliar a eficácia de um teste para detectar a presença do vírus nesse grupo de voluntários, verificou-se que dos que estavam infectados, 10% testaram negativo e dos não infectados, 3% testaram positivo.

Considerando-se os resultados desse experimento, quando uma pessoa testa positivo nesse teste, a probabilidade de ela estar realmente infectada é, aproximadamente, de

a) 98%.
b) 90%.
c) 65%.
d) 56%
e) 38%.

32 - (UFT TO/2023) Suponha que você sabe resolver cinco das oito questões que compõem a prova de Matemática e suas Tecnologias deste vestibular, e que as respostas destas cinco questões serão marcadas corretamente na folha de respostas.

Sabendo-se que são quatro alternativas para cada questão, qual é a probabilidade de você acertar todas as questões de Matemática e suas Tecnologias se as respostas das três questões restantes serão escolhidas aleatoriamente?

a) 1/64
b) 1/16
c) 3/64
d) 3/4

33 - (FMJ SP/2023) Um grupo de 8 turistas é formado por 4 homens e 4 mulheres. Sorteando-se 3 pessoas desse grupo, a probabilidade de exatamente um homem ser sorteado é

a) $\frac{3}{14}$
b) $\frac{9}{14}$
c) $\frac{9}{28}$
d) $\frac{15}{28}$
e) $\frac{3}{7}$

34 - (FMABC SP/2023) Giovana tem alguns cartões coloridos. Ela fez duas pilhas com esses cartões. Em uma dessas pilhas, colocou 3 cartões verdes, 2 cartões amarelos e 1 cartão vermelho. Na outra pilha, colocou 2 cartões verdes, 2 cartões amarelos e 4 cartões vermelhos. Se tomar um cartão de cada pilha ao acaso, a probabilidade de os cartões terem a mesma cor é

a) $\frac{3}{16}$
b) $\frac{1}{3}$
c) $\frac{2}{9}$
d) $\frac{5}{12}$
e) $\frac{7}{24}$

35 - (ENEM MEC/2023) Um funcionário de uma loja de computadores misturou, por descuido, três computadores defeituosos com sete computadores perfeitos que estavam no estoque. Uma pequena empresa fez a compra de cinco computadores nessa loja, escolhendo-os aleatoriamente dentre os dez que estavam no estoque.

Qual é a probabilidade de essa empresa ter levado, em sua compra, todos os três computadores defeituosos?

a) $\frac{1}{72}$

b) $\frac{1}{12}$

c) $\frac{1}{4}$

d) $\frac{3}{10}$

e) $\frac{3}{7}$

36 - (ENEM MEC/2023) Após uma reforma, um clube decide comprar duchas para serem instaladas no vestiário. O tipo de ducha escolhida, segundo o fabricante, tem probabilidade igual a $\frac{1}{10}$ de apresentar funcionamento irregular. O administrador do clube planeja adquirir uma certa quantidade dessas duchas, de forma que a probabilidade de que pelo menos uma das duchas adquiridas apresente funcionamento regular seja igual a, no mínimo, $\frac{99}{100}$.

A quantidade mínima de duchas que deverá ser adquirida para atender ao planejamento desse administrador é

a) 2.
b) 8.
c) 9.
d) 10.
e) 11.

37 - (ENEM MEC/2023) Visando atrair mais clientes, o gerente de uma loja anunciou uma promoção em que cada cliente que realizar uma compra pode ganhar um voucher para ser usado em sua próxima compra. Para ganhar seu voucher, o cliente precisa retirar, ao acaso, uma bolinha de dentro de cada uma das duas urnas A e B disponibilizadas pelo gerente, nas quais há apenas bolinhas pretas e brancas. Atualmente, a probabilidade de se escolher, ao acaso, uma bolinha preta na urna A é igual a 20% e a probabilidade de se escolher uma bolinha preta na urna B é 25%. Ganha o voucher o cliente que retirar duas bolinhas pretas, uma de cada urna.
Com o passar dos dias, o gerente percebeu que, para a promoção ser viável aos negócios, era preciso alterar a probabilidade de acerto do cliente sem alterar a regra da promoção. Para isso, resolveu alterar a quantidade de bolinhas brancas na urna B de forma que a probabilidade de um cliente ganhar o voucher passasse a ser menor ou igual a 1%. Sabe-se que a urna B tem 4 bolinhas pretas e que, em ambas as urnas, todas as bolinhas têm a mesma probabilidade de serem retiradas.

Qual é o número mínimo de bolinhas brancas que o gerente deve adicionar à urna B?

a) 20
b) 60
c) 64
d) 68

e) 80

38 - (ENEM MEC/2023) Em um colégio público, a admissão no primeiro ano se dá por sorteio. Neste ano há 55 candidatos, cujas inscrições são numeradas de 01 a 55. O sorteio de cada número de inscrição será realizado em etapas, utilizando-se duas urnas. Da primeira urna será sorteada uma bola, dentre bolas numeradas de 0 a 9, que representará o algarismo das unidades do número de inscrição a ser sorteado e, em seguida, da segunda urna, será sorteada uma bola para representar o algarismo das dezenas desse número. Depois do primeiro sorteio, e antes de se sortear o algarismo das dezenas, as bolas que estarão presentes na segunda urna serão apenas aquelas cujos números formam, com o algarismo já sorteado, um número de 01 a 55.

As probabilidades de os candidatos de inscrição número 50 e 02 serem sorteados são, respectivamente,

a) $\frac{1}{50}$ e $\frac{1}{60}$

b) $\frac{1}{50}$ e $\frac{1}{50}$

c) $\frac{1}{50}$ e $\frac{1}{10}$

d) $\frac{1}{55}$ e $\frac{1}{54}$

e) $\frac{1}{100}$ e $\frac{1}{100}$

39 - (ENEM MEC/2023) Ao realizar o cadastro em um aplicativo de investimentos, foi solicitado ao usuário que criasse uma senha, sendo permitido o uso somente dos seguintes caracteres:

- algarismos de 0 a 9;
- 26 letras minúsculas do alfabeto;
- 26 letras maiúsculas do alfabeto;
- 6 caracteres especiais !, @, #, $, , &.

Três tipos de estruturas para senha foram apresentadas ao usuário:

- tipo I: formada por quaisquer quatro caracteres distintos, escolhidos dentre os permitidos;
- tipo II: formada por cinco caracteres distintos, iniciando por três letras, seguidas por um algarismo e, ao final, um caractere especial;
- tipo III: formada por seis caracteres distintos, iniciando por duas letras, seguidas por dois algarismos e, ao final, dois caracteres especiais.

Considere p_1, p_2 e p_3 as probabilidades de se descobrirem ao acaso, na primeira tentativa, as senhas dos tipos I, II e III, respectivamente.

Nessas condições, o tipo de senha que apresenta a menor probabilidade de ser descoberta ao acaso, na primeira tentativa, é o

a) tipo I, pois $p_1 < p_2 < p_3$.
b) tipo I, pois tem menor quantidade de caracteres.
c) tipo II, pois tem maior quantidade de letras.

d) tipo III, pois $p_3 < p_2 < p_1$.
e) tipo III, pois tem maior quantidade de caracteres.

40 - (ENEM MEC/2023) No alojamento de uma universidade, há alguns quartos com o padrão superior ao dos demais. Um desses quartos ficou disponível, e muitos estudantes se candidataram para morar no local. Para escolher quem ficará com o quarto, um sorteio será realizado. Para esse sorteio, cartões individuais com os nomes de todos os estudantes inscritos serão depositados em uma urna, sendo que, para cada estudante de primeiro ano, será depositado um único cartão com seu nome; para cada estudante de segundo ano, dois cartões com seu nome; e, para cada estudante de terceiro ano, três cartões com seu nome. Foram inscritos 200 estudantes de primeiro ano, 150 de segundo ano e 100 de terceiro ano. Todos os cartões têm a mesma probabilidade de serem sorteados.

Qual a probabilidade de o vencedor do sorteio ser um estudante de terceiro ano?

a) $\frac{1}{2}$
b) $\frac{1}{3}$
c) $\frac{1}{8}$
d) $\frac{2}{9}$
e) $\frac{3}{8}$

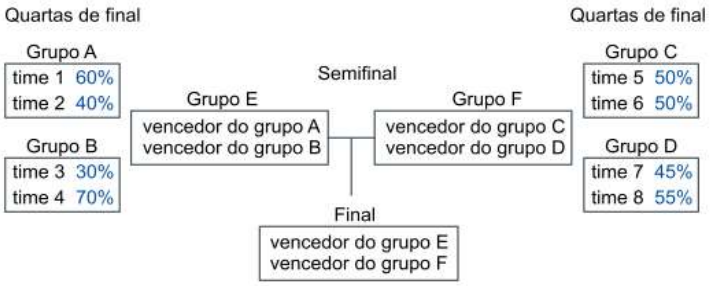
41 - (Unesp SP/2023) Uma urna contém bolas numeradas de 1 até 100. Considere os seguintes eventos associados à retirada aleatória de uma bola dessa urna:

E_1: sair um número de 2 algarismos;
E_2: sair um número cuja soma de seus algarismos seja igual a 3;
E_3: sair um número estritamente maior que k (sendo k um inteiro de 1 até 100).

Sendo $P(E_2) < P(E_3) \leq P(E_1)$ a ordenação das probabilidades associadas a cada um dos três eventos, a quantidade de possibilidades distintas para k é igual a

a) 87.
b) 86.
c) 88.
d) 90.
e) 89.

42 - (Unesp SP/2023) A tabela indica o chaveamento de 8 times que chegaram às quartas de final de um torneio de futebol. Nos jogos de quartas de final, as porcentagens ao lado de cada time indicam sua probabilidade de seguir adiante no torneio. Nos jogos da semifinal, as probabilidades de cada time dos grupos E e F são iguais a 50%.



Qual é a probabilidade de o time 1 disputar a final desse torneio contra os times 5 ou 7?

a) 16,25%
b) 14,25%
c) 15,75%
d) 15,50%
e) 12,50%

43 - (Fac. Medicina de Petrópolis RJ/2023) Em uma urna, há 4 plaquinhas com igual tamanho e forma, e, em cada uma, está escrita uma letra:

- Uma placa tem a letra C;
- Duas placas têm a letra A;
- Uma placa tem a letra S.

As placas serão retiradas aleatoriamente, uma por vez, sem reposição, e serão fixadas em um quadro, segundo a mesma ordem em que forem retiradas.

Qual é a probabilidade de, ao final, a palavra formada ser CASA?

a) $\frac{1}{24}$
b) $\frac{1}{12}$
c) $\frac{1}{6}$
d) $\frac{1}{4}$
e) $\frac{1}{3}$

44 - (Unicamp SP/2024) João e Maria estão passeando pela floresta. Para não se perderem no caminho, levaram consigo uma sacola com 100 pedrinhas, sendo 60 pedrinhas brancas e 40 pedrinhas pretas. A cada 5 passos eles retiram aleatoriamente uma pedrinha da sacola e jogam-na no chão para marcar o caminho.
Quando eles pararam para fazer um lanche, notaram que já tinham sido jogadas 35 pedrinhas brancas e 25 pedrinhas pretas.

Qual a probabilidade de as próximas duas pedrinhas jogadas serem brancas?

a) 7/13.
b) 5/13.

c) 11/52.
d) 7/52.

45 - (Unesp SP/2024) Ana somou dois números distintos sorteados ao acaso do conjunto {8,9,10}. Beto multiplicou dois números distintos sorteados ao acaso do conjunto {3,5,6}. A probabilidade de que o resultado obtido na conta de Ana tenha sido maior ou igual ao obtido na conta de Beto é igual a:

a) $\frac{1}{3}$
b) $\frac{2}{3}$
c) $\frac{4}{9}$
d) $\frac{3}{8}$
e) $\frac{5}{9}$

46 - (UFGD MS/2024) Na disciplina de Matemática ofertada para um curso de graduação de uma instituição de ensino superior, estão matriculados, no total, 12 acadêmicos. Deseja-se compor uma comissão com cinco estudantes para representar essa turma em um evento universitário e sabe-se que 75% desses estudantes são mulheres. Como não houve consenso em relação à composição dessa comissão pelos acadêmicos, ficou estabelecido que esta fosse composta por meio de um sorteio. Nesses termos, a probabilidade de que 40% dos membros dessa comissão sejam homens é aproximadamente igual a

a) 0,400.
b) 0,318.
c) 0,167.
d) 0,045.
e) 0,032.

47 - (UFGD MS/2024) Lançando-se simultaneamente dois dados comuns e observando-se as faces que caem voltadas para cima, a probabilidade da soma das faces ser igual a 7 ou igual a 9 é

a) 1/9.
b) 5/36.
c) 1/6.
d) 5/18.
e) 5/36.

48 - (FGV/2024) Quatro amigos estão realizando um sorteio de amigo oculto (também chamado de amigo secreto): eles escreveram seus nomes em um papel, colocaram em um chapéu e cada um vai retirar um papel aleatoriamente, sem reposição, com o nome do amigo que ele deverá presentear. Eles estão torcendo para que nenhum amigo sorteie o próprio nome (ciclo de tamanho 1) e também que não ocorra que dois amigos

se escolham mutuamente (ciclo de tamanho 2). A probabilidade de o sorteio ser do jeito que eles desejam, isto é, de gerar um único ciclo de tamanho 4, é

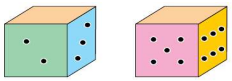
a) 1/2
b) 2/3
c) 1/4
d) 4/5
e) 3/5

49 - (FGV/2024) Em uma corrida de cavalos, quando dizemos que "as chances contra a vitória de um cavalo C são de p para q", isso significa que a probabilidade de C vencer a corrida é $\frac{q}{p+q}$.Três cavalos X, Y e Z são inscritos em uma corrida, com apenas eles três, em que empates não são possíveis.
As chances contra a vitória de X são de 4 para 1 e as chances contra a vitória de Y são de 3 para 2.

A probabilidade de o cavalo Z vencer a corrida é:

a) $\frac{1}{12}$
b) $\frac{7}{12}$
c) $\frac{2}{5}$
d) $\frac{3}{5}$
e) $\frac{4}{7}$

50 - (Famerp SP2024) A face correspondente ao número 1 de um dado comum de seis faces foi apagada. O mesmo ocorreu com a face correspondente ao número 4 de outro dado comum de seis faces.



Lançando-se ao acaso esses dois dados juntos, a probabilidade de a soma dos números obtidos ser igual a 7 é de

a) $\frac{1}{3}$
b) $\frac{1}{4}$
c) $\frac{1}{6}$
d) $\frac{1}{12}$
e) $\frac{1}{9}$

Apêndice 1 - Conjuntos Numéricos

Definição

Conjunto nada mais é do que um agrupamento de elementos, podendo ser numérico ou não. Representativamente, colocamos os elementos do conjunto entre chaves e separados entre si por uma vírgula. Por exemplo:

- Conjunto E das estações do ano: $E = \{primavera, verão, outono, inverno\}$.
- Conjunto P de números pares: $P = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, \dots\}$.
- Conjunto C de estados do centro-oeste:
$$C = \{Mato\ Grosso, Mato\ Grosso\ do\ Sul, Goiás\ e\ Distrito\ Federal\}.$$

- **Linguagem dos conjuntos**

Pertencer

Um objeto o pode ser elemento de determinado conjunto A.

- Nesse caso, dizemos que o **pertence** a A e escrevemos: $o \in A$.
- Caso contrário, dizemos que o **não pertence** a A e escrevemos: $o \notin A$.

Exemplo 1: No conjunto C de estados do centro-oeste: $C = \{Mato\ Grosso, Mato\ Grosso\ do\ Sul, Goiás\ e\ Distrito\ Federal\}$, podemos afirmar que $\{Goiás\} \in C$ e que $\{Maranhão\} \notin C$.

Inclusão

Agora, consideremos dois conjuntos, E e F. Se todos os elementos de F forem também elementos de E, afirma-se que F é um **subconjunto** de E ou que F **está contido** em E.

Exemplo 1: Considerando os conjuntos $E = \{primavera, verão, outono, inverno\}$ e $F = \{verão\ e\ inverno\}$, conclui-se que $F \subset E$.

Entretanto, como nem todos os elementos de E estão em F, pode-se afirmar também que $E \not\subset F$.

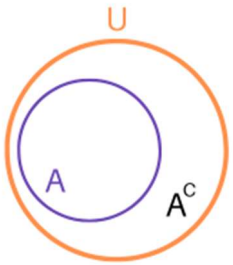
Propriedades e operações

- **Relação de complementaridade**

A complementaridade entre um conjunto em relação a outro, se dá pelos elementos presentes no segundo que não se encontra no primeiro.

$$\complement_U^A = \{x \in U, ou\ x \notin A\}$$

Exemplo 1: Dado o universo $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ e o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$, podemos afirmar que o **complementar de** A **em relação a** U é $\{0, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

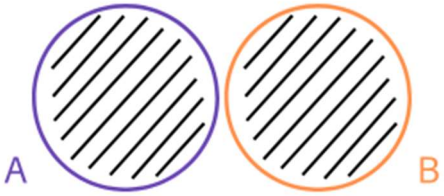


- **Reunião ou União de conjuntos**

A união de dois conjuntos é o conjunto de todos os elementos que pertencem a ambos os conjuntos.

$$A \cup B = \{x \in A, ou\, x \in B\}$$

Exemplo 1: Se $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{5, 6, 7, 8\}$, então $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

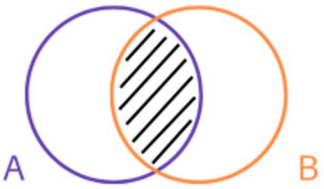


- **Interseção de conjuntos**

A interseção de dois conjuntos se dá por elementos que pertencem simultaneamente em ambos os conjuntos. No caso de não haver elementos em comum entre os conjuntos, afirmamos que eles são disjuntos.

$$A \cap B = \{x \in A\, e\, x \in B\}$$

Exemplo 1: Se $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ e $B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$, então $A \cap B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.



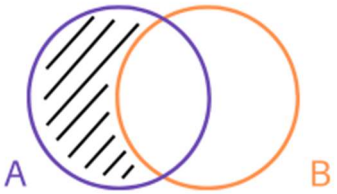
- **Diferença entre conjuntos**

A diferença entre dois conjuntos, sendo A e B, se dá pelos elementos que pertencem a A mas não pertencem a B.

$$A - B = \{x \in A\, e\, x \notin B\}$$

Exemplo 1: Se $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ e $B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$, então

$$A - B = \{2, 4, 6, 8, 10\}.$$



Conjuntos de números naturais ($\mathbb{N}$)

Esse conjunto é composto por números naturais, sendo o primeiro deles o zero (0), seguido do um (1) e assim por diante. Sabendo disso, nota-se que os números naturais existem em quantidade infinita, do mesmo modo o conjunto desses números também não apresenta fim.

Esse conjunto é representado por:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \dots\}$$

Você pode utilizar símbolos para especificar subconjuntos ou excluir números de $\mathbb{N}$.

Exemplos:

- $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \dots\}$, diante do uso do asterisco (*), exclui-se desse conjunto o número zero (0).
- $I = \{1, 3, 5, 7, 9 \dots\}$, sendo I um conjunto de números ímpares, logo, podemos afirmar que: $I \subset \mathbb{N}$, assim, dizemos que I é subconjunto de $\mathbb{N}$ ou está contido em $\mathbb{N}$.

Conjuntos de números inteiros ($\mathbb{Z}$)

Agrupando todos os números naturais e os números inteiros negativos, obtemos o conjunto dos números inteiros, que apresenta números positivos e negativos.

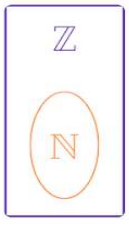
Esse conjunto é representado por:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

Você pode utilizar símbolos para especificar subconjuntos ou excluir números de $\mathbb{Z}$.

Exemplos:

- $\mathbb{Z}^* = \{\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \dots\}$, diante do uso do asterisco (*), exclui-se desse conjunto o número zero (0).
- Destacamos ainda os subconjuntos de Z, como sendo o principal deles o conjunto $\mathbb{N}$. Observe a ilustração:



Conjuntos de números racionais $(\mathbb{Q})$

Reunindo os elementos do conjunto dos inteiros Z com as frações não aparentes positivas e negativas, forma-se o conjunto dos números racionais Q. Este conjunto incorpora todos os números possíveis de serem escritos como fração, sendo o numerador e o denomidador números inteiros e o denomidador diferente de zero.

São exemplos de números racionais:

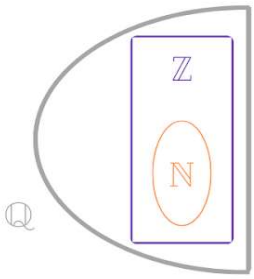
$$-12, -10, -2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, 10$$

Logo, este grupo pode ser representado como:

$$Q = \left\{x = \frac{a}{b}, com\ a\ \in\ Z, \qquad b\ \in\ Z\ e\ b \neq 0\right\}$$

É necessário que haja a restrição de $b \neq 0$, pois somente dessa forma a divisão de $\frac{a}{b}$ terá resultado viável.

- Destacamos ainda que se $b = 1, temos\ \frac{a}{b} = \frac{a}{1} = a$, portanto Z é subconjunto de Q.
- Logo, se $N \subset Z\ e\ Z \subset Q$, entende-se que: $N \subset Z \subset Q$, como mostra a ilustração:



Conjuntos de números irracionais (I)

Os números irracionais são aqueles que não admitem uma representação decimal exata nem mesmo como dízima periódica, como por exemplo $\sqrt{2}$.

Portanto nesse conjunto, representado pelo I, são trabalhados todos os números irracionais, sem incluir os números dos demais conjuntos já abordados.

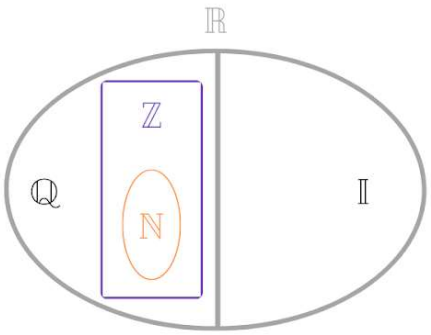
Observação: Um bom exemplo de número irracional é o π, definido como a representação entre o perímetro e o diâmetro da circunferência. Na sua representação escrevemos: 3,14159265..., logo entende-se que ele possui uma sequência infinita de decimais exatos finitos.

Conjuntos de números reais $(\mathbb{R})$

Quando falamos de conjunto dos números reais, falamos do conjunto da obra, logo este grupo reúne todos os números racionais $(\mathbb{Q})$ com os irracionais (I). Sendo este conjunto representado por $\mathbb{R}$.

- O conjunto $\mathbb{R}$ pode ser compreendido como um modelo aritmético de reta, pois ele agrega cada ponto da reta, antes não alcançados pelos números racionais, como: $-\sqrt{3}, \sqrt{2}$.
- Assim, os números reais esgotam todos os pontos da reta, logo cada ponto da reta representa um único número real.

Cada um dos conjuntos possui relação entre si, seja de complementaridade, de união, de inclusão, entre outros. Observe a imagem abaixo correlacionando todos os conjuntos estudados:



Apêndice 2 - Unidades de medida: comprimento, massa, área, capacidade, tempo e velocidade

Unidades de medida

Sabemos que medir significa comparar grandezas de mesma natureza. Logo, após uma medição é possível obter um número, resultado dessa comparação de grandezas, o qual chamamos de medida.

Com a evolução da matemática e das ciências, tornou-se necessário que estas unidades de medidas pudessem ser compreendidas em qualquer lugar do mundo. Assim, temos a criação do Sistema Internacional (SI) de Medidas que para cada grandeza (comprimento, massa, área..) possui a sua unidade padrão e as respectivas conversões para outras unidades.

Comprimento

O comprimento é uma medida definida pela distância de dois pontos ou mesmo a extensão de objeto, o qual será medido. Pelo SI a unidade fundamental de comprimento é o metro (m), este sendo composto de múltiplos e submúltiplos com os quais podem ser realizadas conversões, como mostrado na tabela a seguir.

Múltiplos do metro				Submúltiplos do metro		
quilômetro	hectômetro	decâmetro	**Metro** Unidade Fundamental	decímetro	centímetro	milímetro
(km)	(hm)	(dam)	$\mathbf{(m)}$	(dm)	(cm)	(mm)
÷ ←					→ ×	

Para as conversões, partindo da unidade fundamental, o metro, para os seus submúltiplos (dm, cm e mm), devemos multiplicar por 10, 100 e 1000, respectivamente, adicionando uma unidade de zero a cada nova conversão. Já para os múltiplos (dam, hm, km) realizamos a divisão por 10, 100 e 1000, respectivamente

Exemplo 1: 2.500 m ÷ 1.000 = 2,5 km.

Exemplo 2: 0,5 m × 100 = 50 cm, lembre-se que o oposto é verdadeiro, logo:

$$50\ cm \div 100 = 0{,}5\ m.$$

Massa

A massa é uma grandeza presente em todos os objetos, se você observar tudo possui uma massa, desde o seu próprio corpo ao lápis que usa para escrever. Logo, pequena ou grande, tudo à nossa volta possui uma quantidade de matéria que pode ser mensurada, por exemplo, em uma balança. Segundo o SI, a unidade padrão para massa é o quilograma.

Múltiplos da grama				Submúltiplos da grama		
Quilo Unidade Fundamental	hectograma	decagrama	grama	decigrama	centigrama	miligrama
(kg)	(hg)	(dag)	(g)	(dg)	(cg)	(mg)

$\div \leftarrow \quad \rightarrow \times$

Para as conversões em massa, usamos os submúltiplos do grama (dg, cg e mg), sendo estes multiplicados por 10, 100 e 1000, respectivamente. Nos múltiplos do grama (dag, hm, km) realizamos a divisão por 10, 100 e 1000, seguindo a ordem apresentada. Observe abaixo alguns exemplos:

Exemplo 1: 3.600 g ÷ 1.000 = 3,6 kg.

Exemplo 2: 0,4 g × 1.000 = 400 mg. Lembre-se que o oposto é verdadeiro, logo:

$$400\ mg \div 1.000 = 0{,}4\ g.$$

Área: medida de superfície

Na medição da área, procura-se verificar quantas vezes uma superfície contém a outra, diferente do comprimento, no qual abordamos um plano por vez, agora vamos trabalhar simultaneamente em dois planos.

Essa superfície pode ir desde de um campo de futebol ou até mesmo uma folha de papel, para isso o SI define como unidade fundamental o metro quadrado (m^2), que juntamente com as outras unidades de área, podem mensurar de forma adequada essas diversas superfícies presentes no nosso cotidiano. Observe abaixo as unidades de áreas estabelecidas.

Múltiplos do metro quadrado				Submúltiplos do metro quadrado		
quilômetro	hectômetro	decâmetro	**Metro Unidade Fundamental**	decímetro	centímetro	milímetro
(km^2)	(hm^2)	(dam^2)	**(m^2)**	(dm^2)	(cm^2)	(mm^2)

$\div \leftarrow \quad \rightarrow \times$

Para realizar as conversões entre as unidades de área seguimos a mesma lógica do comprimento, a diferença é que como cada unidade é 100 vezes maior que a unidade imediatamente inferior, a multiplicação ou a divisão de uma unidade para a seguinte será por 100. Observe os exemplos abaixo:

Exemplo 1: 2.000 m^2 ÷ 100 = 20 dam^2.

Exemplo 2: 5,4 m^2 × 10.000 = 54.000 cm^2. Lembre-se que o oposto é verdadeiro, logo:

$$54.000\ cm2\ \div\ 10.000\ =\ 5{,}4\ m^2$$

Capacidade

A capacidade é uma propriedade típica de objetos capazes de conter determinado volume em seu interior, como uma caixa de leite ou mesmo uma piscina. A unidade

fundamental determinada pelo SI nessa grandeza é o litro, que se encontra presente facilmente em objetos de uso diário. Note a tabela abaixo com as unidades de capacidades.

Múltiplos do litro				Submúltiplos do litro		
quilolitro	hectolitro	decalitro	**Litro** Unidade Fundamental	decilitro	centilitro	mililitro
(kL)	(hL)	(daL)	**(L)**	(dL)	(cL)	(mL)

$\div \leftarrow \quad \rightarrow \times$

Para as conversões em capacidade, usamos os submúltiplos do litro (dL, cL e mL), sendo estes multiplicados por 10, 100 e 1000, respectivamente. Nos múltiplos do litro (daL, hL, kL) realizamos a divisão por 10, 100 e 1000, seguindo a ordem apresentada. Note os exemplos:

Exemplo 1: 8,3 L × 1.000 = 8.300 mL. Lembre-se que o oposto é verdadeiro, logo:

$$8.300\ mL \div 1.000 = 8{,}3\ L.$$

Exemplo 2: 690 L ÷ 1.000 = 0,69 kL.

Tempo

O tempo é uma grandeza física e matemática que pode quantificar numericamente as horas do nosso dia ou mesmo os segundos que compõem uma respiração completa.

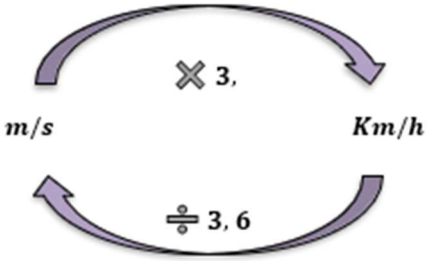
Dessa forma, o SI determina o segundo (s) como unidade fundamental do tempo, mas esta não é a única usada para quantificar tal grandeza. Observe abaixo outras unidades usadas e suas respectivas equivalências.

Medidas maiores que o segundo – Múltiplos				Medidas menores que o segundo – Submúltiplos		
dia	horas	minutos	**Segundo** Unidade Fundamental	décimo de segundo	centésimo de segundo	milésimo de segundo
(d)	(h)	(min)	**(s)**	(ds)	(cs)	(ms)

Equivalências
$1\ ms = 0{,}001\ s$
$1\ cs = 0{,}01\ s$
$1\ ds = 0{,}1\ s$
$1\ min = 60\ s$
$1\ h = 60\ min = 3.600s$
$1\ dia = 24h = 86.000s$

Velocidade

A velocidade é uma grandeza física e matemática que pode quantificar numericamente o espaço percorrido em determinado período de tempo. No SI, a unidade fundamental é da velocidade é o metro por segundo (m/s), que caracteriza a distância percorrida de um metro em um segundo de tempo. Além desta, o quilômetro por hora (km/h) também é comumente usado para expressar essa grandeza, observe abaixo como é feita a conversão entre m/s e km/h.



Apêndice 3 - Potenciação e Radiciação

Potenciação

Definição

Considere um determinado número real a e uma número natural n, sendo $n > 1$, logo, denomina-se potência a representação do produto de n **fatores iguais** sobre o número real a. Portanto, número real a é denominado **base** e o número natural n é o **expoente** da potência.

Observe as operações com potências abaixo:

Exemplo 1: $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$

Exemplo 2: $(-2)^5 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -32$

Exemplo 3: $(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$

Exemplo 4: $(-1{,}5)^3 = (-1{,}5) \cdot (-1{,}5) \cdot (-1{,}5) = 3{,}375$

Exemplo 5: $\left(-\frac{1}{8}\right)^3 = \left(-\frac{1}{8}\right) \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{512}$

Exemplo 6: $12^1 = 12$

Exemplo 7: $25^0 = 1$

Atenção!

- Para todo número real a , com $a \neq 0$, temos: $a^0 = 1$.
- Para $n = 1$, defini-se: $a^1 = a$.

Propriedades

- **Multiplicação com potências de mesma base**

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Exemplo 1: $6^2 \cdot 6^5 = (6 \cdot 6) \cdot (6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6) = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^7$

Exemplo 2: $(0{,}2)^3 \cdot (0{,}2)^5 = (0{,}2)^{3+5} = (0{,}2)^8$

- **Divisão com potências mesma base**

$$a^m \div a^n = a^{m-n}, \ a \neq 0.$$

Exemplo 1: $9^4 \div 9^2 = \frac{9^5}{9^2} = \frac{9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9}{9 \cdot 9} = 81$

Exemplo 2: $\left(\frac{2}{5}\right)^3 \div \left(\frac{1}{8}\right) = \left(\frac{2}{5}\right)^{3-1} = \left(\frac{2}{5}\right)^2$

- **Potência de uma potência**

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}.$$

Exemplo 1: $11^{2^3} = 11^{2 \cdot 3} = 11^6$.

Exemplo 2: $\{(0{,}4)^4\}^2 = (0{,}4)^{4\cdot 2} = (0{,}4)^6$.

- **Potência de uma multiplicação ou de uma divisão**

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \text{ ou } (a \div b)^n = a^n \div b^n, \quad b \neq 0.$$

Exemplo 1: $(2 \cdot 8)^2 = (2 \cdot 8) \cdot (2 \cdot 8) = 2 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 8 = 2 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 8 = 2^2 \cdot 8^2$.

Exemplo 2: $(3 \div 7)^2 = \left(\frac{3}{7}\right)^2 = \left(\frac{3}{7}\right) \cdot \left(\frac{3}{7}\right) = \frac{3\cdot 3}{7\cdot 7} = \frac{3^2}{7^2} = 3^2 \div 7^2$.

Radiciação

Definição

Considere que um número real a e um número natural n, sendo $n > 1$, podem formar **a raiz enésima** de um número real, sendo a o que definimos como **radianos** e n o **índice** dessa raiz. Observe a representação: $\sqrt[n]{a}$.

1ª Situação: Quando o n é par:

- **Radicando positivo** $(a > 0)$

Nesta situação n deve ser um número natural par diferente de zero, a fim de que a expressão $\sqrt[n]{a}$ seja igual a um número real b, cujo $b^n = a$.

Exemplo 1: $\sqrt{64} = 8$, pois $8^2 = 8 \cdot 8 = 64$.

Exemplo 2: $\sqrt[6]{729} = 3$, pois $3^6 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 729$.

- **Radicando negativo** $(a < 0)$

Nesta situação de $(a < 0)$ e o número natural par diferente de zero, a expressão $\sqrt[n]{a}$ não pode ser definida dentro do conjunto dos números reais.

Exemplo 1: $\sqrt[4]{-1}$, não se define em $\mathbb{R}$.

Exemplo 2: $\sqrt[8]{-256}$, nãos e define em $\mathbb{R}$.

Observação: No caso da raiz quadrada, não é possível definir um número real negativo, visto que todo número elevado ao quadrado é positivo. Dessa forma tanto 2^2 como $(-2)^2$ serão iguais a 4, logo não haverá número real que elevado ao quadrado se expresse em -4, assim $\sqrt{-4}$ não se define em $\mathbb{R}$.

2ª Situação: Quando o n é ímpar:
Nesta situação dado um determinado número real a e um número natural ímpar n, o termo $\sqrt[n]{a}$ será igual ao número real b, sendo $b^n = a$. Podendo o radicando ser tanto positivo como negativo.

Exemplo 1: $\sqrt[3]{125} = 5$, pois $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.

Exemplo 2: $\sqrt[5]{-1024} = 4$, pois $4^5 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 1024$.

Propriedades

Observação: Essa propriedades aplicam-se a todo radical aritmético com a expressão $\sqrt[n]{a}$, com $a \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$ e $n > 1$.

- **1ª propriedade**

$$\sqrt[n]{a^n} = a, \text{ com } a \in \mathbb{R}_+, \ n \in \mathbb{N} \text{ e } n > 1.$$

Exemplo 1: $\sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2$.

Exemplo 2: $\sqrt[4]{12^4} = 12$.

- **2ª propriedade**

$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n\div p]{a^{m\div p}}$, com $a \in \mathbb{R}_+$, $n, m, p \in \mathbb{N}$ e $n > 1$, $p \neq 0$ e p divisor comum de m e n.

Exemplo 1: $\sqrt[20]{3^5} = \sqrt[20\div 5]{3^{20\div 5}} = \sqrt[4]{3}$

Exemplo 2: $\sqrt[9]{216} = \sqrt[9]{6^3} = \sqrt[9\div 3]{6^{3\div 3}} = \sqrt[3]{6}$

- **3ª propriedade**

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m\cdot n]{a}, \text{ com } a \in \mathbb{R}_+, \ n, m \in \mathbb{N}, n > 1 \text{ e } m > 1.$$

Exemplo 1: $\sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[2\cdot 3]{64} = \sqrt[6]{64} = 2$

Exemplo 2: $\sqrt[4]{\sqrt{100}} = \sqrt[4\cdot 2]{100} = \sqrt[8]{100}$

- **4ª propriedade**

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}, \text{ com } a \in \mathbb{R}_+, b \in \mathbb{R}_+, \ n \in \mathbb{N} \text{ e } n > 1.$$

Exemplo 1: $\sqrt{3 \cdot 48} = \sqrt{144} = 12$

Exemplo 2: $\sqrt[3]{27 \cdot 125} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{5^3} = 3 \cdot 5 = 15$

- **5ª propriedade**

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \text{ com } a \in \mathbb{R}_+, b \in \mathbb{R}_+, \ n \in \mathbb{N} \text{ e } n > 1.$$

Exemplo 1: $\sqrt{\frac{64}{36}} = \frac{\sqrt[2]{64}}{\sqrt[2]{36}} = \frac{8}{6}$

Exemplo 2: $\sqrt[4]{\frac{32}{16}} = \frac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{16}} = \frac{3}{2}$

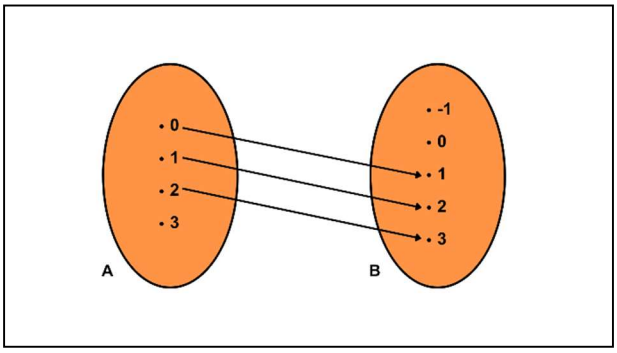
Apêndice 4 - Função

Definição

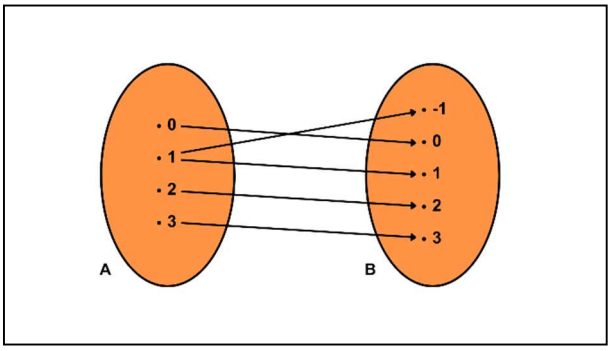
Se A e B representam conjuntos numéricos não vazios, a função $f: A \to B$ é uma relação que satisfaz as seguintes propriedades:

- Para cada $x \in A$, existe um **correspondente** em que $y \in B$, tal que $f(x) = y$. Assim todo elemento de A esta associado com um elemento de B.
- Se $f(x) = y_1$ e $f(x) = y_2$, então $y_1 = y_2$, tendo em vista que cada elemento de A só pode ter um **único** número associado em B.

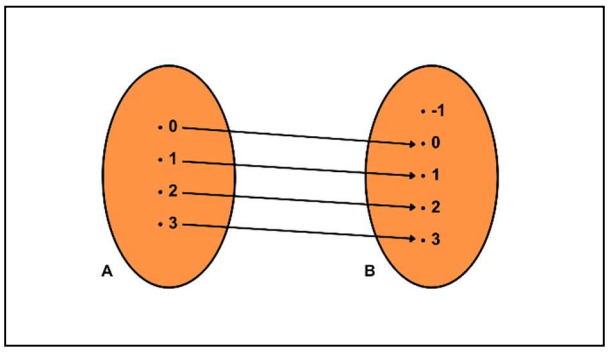
Exemplo: Considere os conjuntos: $A = 0, 1, 2, 3$ e $B = -1, 0, 1, 2, 3$.



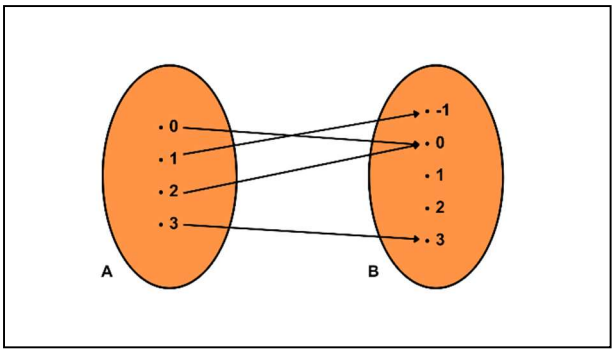
$$M = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x + 1\}$$



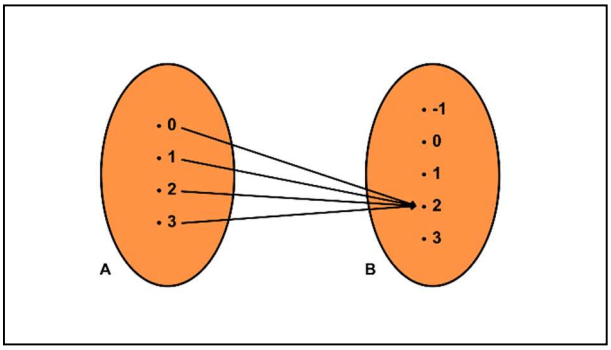
$$N = \{(x, y) \in A \times B \mid y^2 = x^2\}$$



$$O = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x\}$$



$$P = \{(x,y) \in A \times B \mid y = (x-1)^2 - 1\}$$



$$Q = \{(x,y) \in A \times B \mid y = 2\}$$

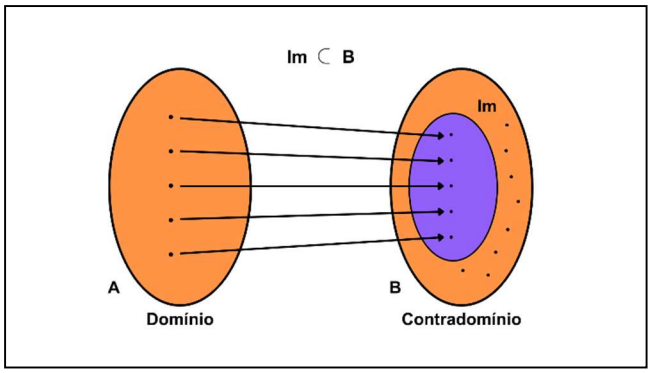
Particularmente em $O, P\ e\ Q$ para todo $x \in A$ existe apenas um $y \in B$, dessa forma pertencem à relação e são nomeados como função de A em B ou aplicação de A com imagens em B.

Observação: Toda função $f: A \to B$ é também uma relação e assim terá um domínio e uma imagem.

Domínio, Contradomínio, Imagem e Gráfico de uma função

Seja a função $f: A \to B$

- A é denominado de **domínio** de f, sendo representado como: $D(f) = A$.
- B é denominado de **contradomínio** de f.
- O conjunto dos pontos $y \in B$, sendo que existem $x \in A$ dessa forma $f(x) = y$ é denomidado de **imagem** e denota-se como: $Im(f)$ ou $f(A)$.



- Por fim, o **gráfico** de f é o conjunto $G(f) = \{(x,y) \in A \times B \mid y = f(x)\}$.

Funções Numéricas

As funções numéricas são as que o domínio A e o contradomínio B pertencem como subconjunto do grupo dos $\mathbb{R}$, conhecidas como funções reais de variável real.

Em uma função f e sua sentença $f(x) = y$, subentende-se que D é o conjunto dos números reais cuja as imagens também são números reais x, assim, D é formado por todos oas números reais x para os quais é possível calcular $f(x)$.

$$x \in D \Leftrightarrow f(x) \in \mathbb{R}$$

Observe os exemplos abaixo de algumas funções e seus respectivos domínios.

Exemplo 1: $\boldsymbol{f(x) = 3x}$.

Sendo $3x \in \mathbb{R}$, para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se que $D = \mathbb{R}$.

Exemplo 2: $\boldsymbol{f(x) = x^2}$.

Sendo $x^2 \in \mathbb{R}$, para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se que $D = \mathbb{R}$.

Exemplo 3: $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x}}$.

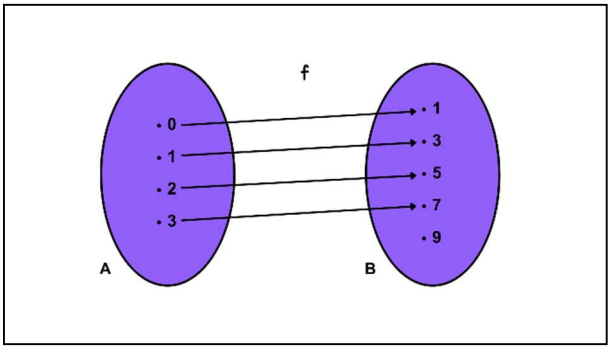
Sendo $\frac{1}{x} \in \mathbb{R}$ e se $x \in \mathbb{R}$ e $x \neq 0$, tem-se que $D = \mathbb{R}^*$.

Propriedades das funções

Função injetiva (injetora)

Considere que $f: A \to B$ é uma função injetiva, se: $f(x_1) = f(x_2)$ implica que $x_1 = x_2$, ou semelhantemente $x_1 = x_2$ implica que $f(x_1) = f(x_2)$.

Exemplo 1: A função f de $A = \{0,1,2,3\}$ e $B = \{1,3,5,7,9\}$ que é definida pela lei $f(x) = 2x + 1$, enquadra-se como função injetora, tendo em vista que dois elementos distintos da A possuem como imagem dois elementos distintos de B.

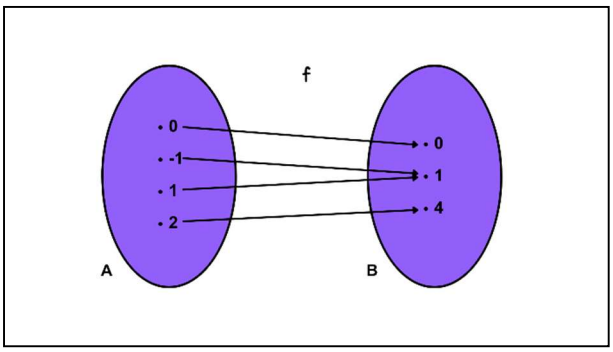


Observação: Não há duas ou mais flechas em direção a um elemento do conjunto B.

Função sobrejetiva (sobrejetora)

Considere que $f: A \to B$ é uma função sobrejetiva, se: $f(A) = B$.

Exemplo 1: A função f de $A = -1,0,1,2$ e $B = 0,1,4$ que é definida pela lei $f(x) = x^2$ é sobrejetora, tendo que para todo elemento $y \in B$, existe o elemento em A, tal que $y = x^2$.

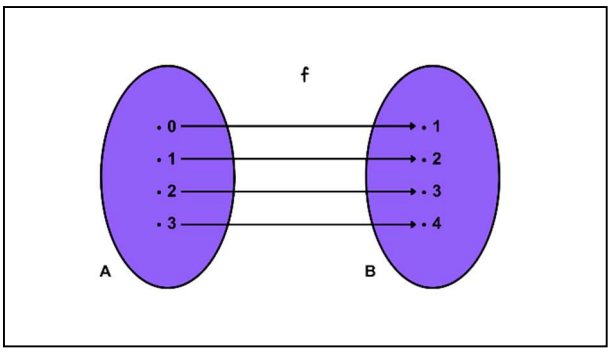


Observação: Para todo elemento de B converge pelo menos uma flecha.

Função bijetiva (bijetora)

Considere que $f: A \to B$ é uma função bijetiva, se: f é injetiva e também sobrejetiva.

Exemplo 1: A função f de $A = 0,1,2,3$ e $B = 1,2,3,4$ que é definida pela lei $f(x) = x + 1$ é bijetora, pois f é tanto sobrejetora como injetora, desse modo para todo $y \in B$, existe um único elemento $x \in A$, tal que $y = x + 1$.



Observação: Para cada elemento de B direciona-se a uma só flecha.

Gabarito

Frente A

Capítulo 1 - MMC e MDC

Gabarito

01 - E	12 - D	23 - E
02 - E	13 - D	24 - D
03 - D	14 - A	25 - B
04 - B	15 - D	26 - A
05 - E	16 - E	27 - B
06 - D	17 - C	28 - 05
07 - B	18 - E	29 - B
08 - A	19 - C	30 - D
09 - C	20 - A	31 -B
10 - E	21 - A	32 - E
11 - C	22 - B	

33 - a) Se d é a quantidade de pacotes e x, y e z são as quantidades de camisas, calças e pares de sapatos, em cada pacote, respectivamente, então se tem $x \cdot d = 2160$, $y \cdot d = 1800$ e $z \cdot d = 1200$. Assim, d é divisor comum de 2160, 1800 e 1200, logo o máximo valor de d é o máximo divisor comum de 2160, 1800 e 1200, que é 120. Para d = 120, tem-se $x = \frac{2160}{120} = 18$, $y = \frac{1800}{120} = 15$ e $z = \frac{1200}{120} = 10$.

b) A quantidade de escolhas, que ele pode fazer, de um conjunto de três elementos, formado por 1 camisa, 1 calça e 1 par de sapatos, é igual a $l \cdot m \cdot n$.

Capítulo 2 - Frações, Números decimais e Porcentagem

Gabarito

01 - C	06 - B	11 - C
02 - C	07 - D	12 - A
03 - B	08 - B	13 - A
04 - A	09 - D	14 - 03
05 - A	10 - C	15 - 03

16 - D
17 - 01
18 - C
19 - D
20 - C
21 - 03
22 - A
23 - B
24 - D
25 - B
26 - B
27 - E
28 - B
29 - E
30 - B
31 - A
32 - D
33 - B
34 - D
35 - D
36 - D
37 - C
38 - D
39 - A
40 - A
41 - C
42 - E
43 - B
44 - B
45 - B

Capítulo 3 - Razão e Proporção

Gabarito

01 - A
02 - C
03 - B
04 - A
05 - B
06 - B
07 - A
08 - B
09 - D
10 - B
11 - B
12 - B
13 - B
14 - C
15 - B
16 - E
17 - B
18 - B
19 - B
20 - B
21 - E
22 - C
23 - D
24 - B
25 - D
26 - D
27 - A
28 - C
29 - D
30 - A
31 - B
32 - E
33 - C
34 - C
35 - E
36 – B

Capítulo 4 - Regra de Três Simples e Composta

Gabarito

01 - A
02 - A
03 - B
04 - A
05 - A
06 - D
07 - C
08 - A
09 - A
10 - C
11 - D
12 - B
13 - C
14 - B
15 - E
16 - D
17 - A
18 - E
19 - B
20 - C
21 - C
22 - D
23 - C
24 - B
25 - B
26 - B
27 - D
28 - C
29 - A
30 - D

31 - D
32 - D
33 - E
34 - D
35 - D
36 - B
37 - C
38 - E
39 - C
40 - D
41 - C
42 - B
43 - C
44 - C
45 - A
46 - E
47 - B
48 - C
49 - B
50 - D
51 - D
52 - B
53 - A
54 - A
55 - B
56 - C
57 - B

Capítulo 5 - Produtos Notáveis e Fatoração

Gabarito

01 – A
02 – B
03 – B
04 – A
05 – C
06 – D
07 – D
08 – A
09 – E
10 – E
11 – E
12 – C
13 – A
14 – C
15 – C
16 – E
17 – A
18 – C
19 – D
20 – B
21 – D
22 – D
23 – B
24 – B
25 – C
26 – B
27 – B
28 – A
29 – B
30 – A
31 – D
32 – C
33 – E
34 – E
35 – B
36 – C
37 – B
38 – D
39 – C
40 – C
41 – C

Capítulo 6 - Matrizes e Determinantes

Gabarito

01 – A
02 – B
03 – A
04 – D
05 – E
06 – A
07 – E
08 – D
09 – B
10 – C
11 – D
12 – D
13 – E
14 – E
15 – B
16 – A
17 – D
18 – B
19 – C
20 – D
21 – B
22 – B
23 – B
24 – A
25 – B
26 – C
27 – A

28 – E
29 – B
30 – 04
31 – D
32 – 03
33 – E
34 – B
35 – B
36 – E
37 – A
38 – B
39 – 03
40 – 05
41 – D
42 – E
43 – D
44 – D
45 – D
46 – B
47 – C
48 – E
49 – C
50 – 04
51 – A
52 – E
53 – B
54 – C
55 – D

Capítulo 7 - Sistemas Lineares

Gabarito

01 – D
02 – A
03 – D
04 – A
05 – A
06 – D
07 – B
08 – E
09 – B
10 – D
11 – B
12 – D
13 – B
14 – A
15 – C
16 – C
17 – D
18 – D
19 – A
20 – B
21 – B
22 – E
23 – E
24 – D
25 – D
26 – C
27 – B
28 – D
29 – A
30 – E
31 – E
32 – B
33 – C
34 – A
35 – A
36 – E
37 – C
38 – B
39 – A
40 – A
41 – B
42 – D
43 – B
44 – C
45 – A
46 – E
47 – C
48 – E
49 – B
50 – C
51 – D
52 – C
53 – A
54 – E
55 – D
56 – D
57 – D
58 – D
59 – A

Frente B

Capítulo 8 - Função Constante e Função Afim

Gabarito

01 – B
02 – A
03 – B
04 – D
05 – B
06 – D
07 – C
08 – D
09 – E
10 – C
11 – E
12 – E
13– C
14– E
15 – D
16 – D
17 – B
18 – C
19 – B
20 – A
21 – E
22 – E
23 – A
24 – C
25 – D
26 – D
27 – 02
28 – D
29 – A
30 – B
31 – B
32 – E
33 – E
34 – B
35 – D
36 – A
37 – D
38 – 04
39 – C
40 – A
41 – D
42 – C
43 – B
44 – E
45 – A
46 – D
47 – B
48 – B
49 – E

Capítulo 9 - Função Quadrática

Gabarito

01 – A
02 – D
03 – B
04 – E
05 – D
06 – D
07 – D
08 – A
09 – B
10 – C
11 – E
12 – D
13 – A
14 – C
15 – D
16 – C
17 – A
18 – D
19 – E
20 – C
21 – E
22 – E
23 – B
24 – A
25 – D
26 – B
27 – A
28 – A
29 – C
30 – D
31 – C
32 – D
33 – D
34 – A
35 – D
36 – C
37 – C
38 – B
39 – A
40 – B
41 – A
42 – B
43 – D
44 – B
45 – B
46 – A
47 – D
48 – D

49 – B
50 – C
51 – B
52 – D

Capítulo 10 - Função Modular

Gabarito

01 – B
02 – C
03 – C
04 – C
05 – D
06 – E
07 – C
08 – A
09 – A
10 – B
11 – VFFF
12 – A
13 – 05
14 – A
15 – C
16 – C
17 – B

Capítulo 11 - Função Exponencial

Gabarito

01- D
02- C
03- D
04- D
05- C
06- C
07- 05
08- B
09- B
10- C
11- B
12- 01
13- B
14- B
15- D
16- C
17- B
18- C
19- A
20- A
21- C
22- D
23- D
24- A
25- D
26- C
27- A
28- B
29- A
30- E
31- C
32- A
33- B
34- D
35- E
36- A
37- E
38- E
39- B
40- C
41- B
42- A
43- C
44- E
45- D
46- C
47- C
48- A
49- D
50- C
51- C
52- A
53- D
54- B
55- D
56- D

Capítulo 12 - Logaritmo e Função Logarítmica

Gabarito

01- E
02- A
03- C

04- 04
05- B
06- C
07- A
08- D
09- D
10- A
11- A
12- B
13- D
14- C
15- D
16- A
17- D
18- D
19- E
20- E
21- B
22- D
23- B
24- A
25- D
26- D
27- C
28- D
29- A
30- D
31- A
32- B
33- A
34- E
35- D
36- B

Capítulo 13 - Função Trigonométrica

Gabarito

01- A
02- B
03- A
04- A
05- A
06- D
07- D
08- C
09- D
10- E
11- E
12- B
13- C
14- D
15- C
16- E
17- E
18- E
19- B
20- D
21- E
22- A
23- E
24- 13
25- D
26- B
27- C
28- A
29- D
30- B
31- D
32- E
33- A
34- D
35- E

Capítulo 14 - Progressão Aritmética

Gabarito

01- B
02- C
03- B
04- D
05- A
06- D
07- D
08- D
09- E
10- C
11- D
12- C
13- A
14- C
15- B
16- A
17- D
18- D
19- C
20- D
21- B
22- E
23- D
24- D

25- 01
26- C
27- D
28- B
29- A
30- 02
31- B
32- D
33- D
34- B
35- B
36- B
37- B
38- C
39- A
40- D
41- D
42- D
43- C
44- B
45- C
46- C
47- C
48- D
49- B
50- C
51- E
52- E
53- C
54- C
55- C
56- D
57- A

Capítulo 15 - Progressão Geométrica

Gabarito

01- C
02- D
03- 10
04- 04
05- C
06- A
07- E
08- C
09- E
10- B
11- D
12- D
13- A
14- D
15- D
16- B
17- B
18- D
19- C
20- A
21- B
22- D
23- B
24- D
25- A
26- D
27- C
28- D
29- D
30- B
31- C
32- E
33- C
34- C
35- C
36- E
37- C
38- E
39- 04
40- D
41- E
42- 02
43- A
44- C
45- C
46- B
47- B
48- D
49- A
50- A
51- E
52- C
53- D

Frente C

Capítulo 16 - Áreas de Figuras Planas

Gabarito

1- A
2- A
3- C

4- C
5- D
6- A
7- A
8- D
9- A
10- B
11- C
12- C
13- B
14- E
15- B
16- D
17- C
18- C
19- E
20- B
21- C
22- E
23- B
24- B
25- B
26- A
27- B
28- E
29- B
30- C
31- C
32- B
33- D
34- B
35- D
36- D
37- E
38- A
39- A
40- C

Capítulo 17 - Semelhança de Triângulos

Gabarito

01- D
02- D
03- A
04- C
05- C
06- A
07- D
08- C
09- B
10- E
11- D
12- B
13- C
14- C
15- A
16- E
17- A
18- B
19- C
20- A
21- E
22- B
23- E
24- D
25- B
26- D
27- A
28- B
29- E
30- A
31- C
32- B
33- B
34- C
35- D
36- A
37 - D
38- C
39- C
40- E
41- C
42- B
43- B
44- E
45- B
46- D
47- A

Capítulo 18 - Relações Métricas e Trigonométricas no Triângulo Retângulo

Gabarito

01- A
02- A
03- A
04- C
05- C
06- D

07- D
08- C
09- E
10- D
11- A
12- D
13- A
14- 02
15- B
16- B
17- C
18- D
19- D
20- C
21- A
22- D
23- C
24- E
25- A
26- E
27- A
28- C
29- D
30- C
31- A
32- D
33- B
34- D
35- B
36- B
37- D
38- D
39- A
40- E
41- A
42- C
43- B
44- B
45- C
46- A
47- A
48- C
49- E
50- C

Capítulo 19 - Lei dos Senos e Lei dos Cossenos

Gabarito

01- A
02- A
03- A
04- C
05- C
06- B
07- C
08- C
09- B
10- 04
11- A
12- D
13- E
14- B
15- E
16- B
17- C
18- E
19- A
20- A
21- A
22- C
23- D
24- C
25- B
26- C
27- A
28- E
29- A
30- C

Capítulo 20 - Poliedros, Prismas e Cilindros

Gabarito

01- A
02- C
03- A
04- C
05- B
06- B
07- C
08- A
09- D
10- A
11- B
12- E

13- A
14- B
15- E
16- A
17- B
18- E
19- D
20- A
21- C
22- B
23- D
24- C
25- C
26- B
27- D
28- D
29- C
30- B
31- D
32- D
33- E
34- A
35- A
36- E
37- B
38- A
39- E
40- D
41- A
42- A
43- E
44- A
45- B
46- A
47- A
48- B
49- E
50- E
51- A

Capítulo 21 - Pirâmides e Cones

Gabarito

1- A
2- A
3- A
4- C
5- D
6- B
7- A
8- E
9- A
10- E
11- A
12- E
13- B
14- D
15- B
16- B
17- C
18- D
19- A
20- D
21- A
22- B
23- B
24- B
25- E
26- D
27- A
28- C
29- A
30- C
31- B
32- A
33- C
34- D
35- B
36- A
37- D
38- A
39- B
40- C
41- C
42- A
43- A
44- C
45- C
46- B
47- C
48- D
49- B
50- E
51- B
52- C
53- E

Capítulo 22 – Esfera

Gabarito

1- C
2- B
3- B

4- A
5- C
6- C
7- D
8- C
9- C
10- E
11- C
12- E
13- D
14- A
15- E
16- E
17- E
18- D
19- D
20- A
21- C
22- A
23- B
24- C
25- B
26- B
27- B
28- C
29- A
30- E
31- D
32- A
33- E
34- C
35- C

Capítulo 23 - Ponto, Reta e Circunferência

Gabarito

1- A
2- A
3- B
4- C
5- B
6- A
7- B
8- C
9- D
10- A
11- D
12- D
13- B
14- C
15- B
16- B
17- E
18- D
19- D
20- B
21- E
22- A
23- D
24- D
25- A
26- B
27- B
28- C
29- A
30- C
31- A
32- D
33- A
34- C
35- E
36- E
37- D
38- D
39- E
40- B
41- E
42- E
43- A
44- A
45- A
46- B
47- E
48- A
49- E
50- B
51- E
52- B
53- C
54- B
55-

Capítulo 24 - Juros Simples

Gabarito

1- 05
2- C
3- A

4- D
5- B
6- C
7- A
8- D
9- A
10- A
11- B
12- C
13- C
14- D
15- C
Gab16) : B
17- C
18- D
19- A
20- C
21- A
22- B
23- A
24- C
25- 03
26- A
27- C
28- A
29- D
30- A
31- A
32- C
33- B
34- B
35- C

Capítulo 25 - Juros Compostos

Gabarito

1- E
2- D
3- C
4- B
5- 01
6- E
7- A
8- E
9- C
10- C
11- B
12- C
13- D
14- B
15- C
16- D
17- B
18- B
19- C
20- C
21- C
22- B
23- B
24- 03
25- E
26- C
27- C
28- B
29- D
30- D

Capítulo 26 – Estatística

Gabarito

1- E
2- A
3- B
4- B
5- E
6- C
7- C
8- D
9- A
10- B
11- E
12- D
13- C
14- D
15- C
16- C
17- B
18- D
19- A
20- B
21- B
22- C
23- E
24- A
25- C
26- B
27- E
28- E
29- E
30- D

31- B
32- A
33- B
34- D
35- D
36- C
37- C
38- E
39- E
40- A
41- D
42- A
43- C
44- C
45- E
46- A
47- A
48- B
49- B

Capítulo 27 - Análise Combinatória

Gabarito

1- E
2- C
3- D
4- B
5- E
6- A
7- A
8- B
9- D
11- E
12- B
13- B
14- A
15- E
16- A
17- E
18- E
19- D
20- A
21- D
22- E
23- D
24- C
25- E
26- A
27- B
28- C
29- A
30- B
31- B
32- C
33- C
34- C
35- E
36- B
37- A
38- B
39- B
40- E
41- A
42- C
43- B
44- E
45- B
46- E
47- E
48- E
49- B
50- E

Capítulo 28 – Probabilidade

Gabarito

1- B
2- B
3- B
4- B
5- C
6- D
7- C
8- A
9- E
10- D
11- A
12- D
13- E
14- A
15- E
16- D
17- B
18- E
19- B
20- E
21- A

Gabarito

22- E
23- E
24- C
25- B
26- B
27- D
28- D
29- D
30- A
31- E
32- A
33- E
34- E
35- B
36- A
37- C
38- A
39- A
40- E
41- B
42- B
43- B
44- B
45- E
46- B
47- D
48- C
49- C
50- E

Referências

DANTE, L. R. **Matemática: contexto & aplicações**. 3 ed. vol. 1. São Paulo: Ática, 2016.

DANTE, L. R. **Matemática: contexto & aplicações**. 3 ed. Vol. 2. São Paulo: Ática, 2016.

DOLCE, O., POMPEO, J. N. **Fundamentos da matemática elementar: geometria plana**. 9 ed. Vol. 9. São Paulo: Atual, 2013.

DOLCE, O., POMPEO, J. N. **Fundamentos da matemática elementar: geometria espacial, posição e métrica**. 7 ed. Vol. 10. São Paulo: Atual, 2013.

GIOVANNI JÚNIOR, J. R.; CASTRUCCI, B. **A Conquista da Matemática: 6° ano**. 4 ed. São Paulo: FTD, 2018.

GIOVANNI JÚNIOR, J. R. **A Conquista da Matemática: 7° ano**. São Paulo: FTD, 2022.

GIOVANNI JÚNIOR, J. R. **A Conquista da Matemática: 8° ano**. São Paulo: FTD, 2022.

GIOVANNI JÚNIOR, J. R. **A Conquista da Matemática 9° ano**. São Paulo: FTD, 2022.

HAZZAN, S. **Fundamentos da matemática elementar: combinatória, probabilidade**. 8 ed., vol. 5. São Paulo: Atual, 2013.

IEZZI, G., MURAKAMI, C. **Fundamentos da matemática elementar: conjuntos, funções**. 9 ed., vol. 1. São Paulo: Atual, 2013.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; MURAKAMI, C. **Fundamentos da matemática elementar: logaritmos**. 10 ed. vol. 2. São Paulo: Atual, 2013.

IEZZI, G. **Fundamentos da matemática elementar: trigonometria**. 9 ed., vol. 3. São Paulo: Atual, 2013.

IEZZI, G., HAZZAN, S. **Fundamentos da matemática elementar: sequências, matrizes, determinantes e sistemas**. 8 ed., vol. 4. São Paulo: Atual, 2013.

IEZZI, G.; HAZZAN, S. **Fundamentos da matemática elementar: matemática comercial, matemática financeira, estatística descritiva**. 9 ed., vol. 11. São Paulo: Atual, 2013.

Ministério da Educação (MEC); Secretaria de Educação Básica (SEB); Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE); Diretoria de Assistência a Programas Especiais (DIPRO). **Caderno de Teoria e Prática 4- Medidas e Grandezas**; Brasília, 2007. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/arquivos/pdf/gestar/tpmatematica/mat_tp4.pdf>. Acesso em: 20 set. 2024.

Ministério da Educação (MEC); Escola Técnica Aberta do Brasil (e- TEC BRASIL); Secretaria de Educação a Distância – SEDIS; Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN). Curso Técnico em Segurança do Trabalho. **Matemática 03, Conhecendo as unidades de medidas (parte I)**. Disponível em: <https://redeetec.mec.gov.br/images/stories/pdf/eixo_amb_saude_seguranca/tec_seguranca/matema tica/061112_mat_a03.pdf>. Acesso em: 20 set. 2024.

SAMPAIO, J. C. V.; CAETANO, P. A. S. **Introdução à teoria dos números: um curso breve**. São Carlos: EdUFSCar, 2008

H_2O
$\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
$E=mc^2$
$a-b$
$x-y$
$90°$
$a^\circ=1$
$a^2+b^2=c^2$
B
A
C
$s=vt$
$x+y=a^2b$
$P=S(1-$
$P\ \Delta ABC \sim \Delta$
$S=\frac{}{1-n\cdot d}$
$\frac{n!}{r!(n-}$
$\frac{2}{3}\times 2x)$
$1=2$
$a=b^2)$
R

EDITORA
UEMASUL

A Matemática está presente em todos os aspectos da nossa vida, desde as situações mais simples do cotidiano até as grandes descobertas científicas. Esta **Apostila de Matemática - Coleção Educação Transforma** foi elaborada para guiar os estudantes para vestibulares em uma jornada de aprendizado estruturada e acessível, proporcionando uma compreensão sólida dos principais conceitos matemáticos.

Ao longo do material, os conteúdos são apresentados de forma clara e progressiva, passando por temas fundamentais como aritmética, álgebra, geometria, estatística e matemática financeira. A abordagem adotada busca não apenas ensinar fórmulas e regras, mas estimular o raciocínio lógico e a capacidade de resolução de problemas, habilidades essenciais para o sucesso em vestibulares e na vida acadêmica.

Mais do que um compilado de conteúdos, este material é um convite à descoberta e à reflexão matemática, incentivando o estudante a enxergar essa ciência não como um obstáculo, mas como uma ferramenta poderosa para compreender e transformar o mundo.

